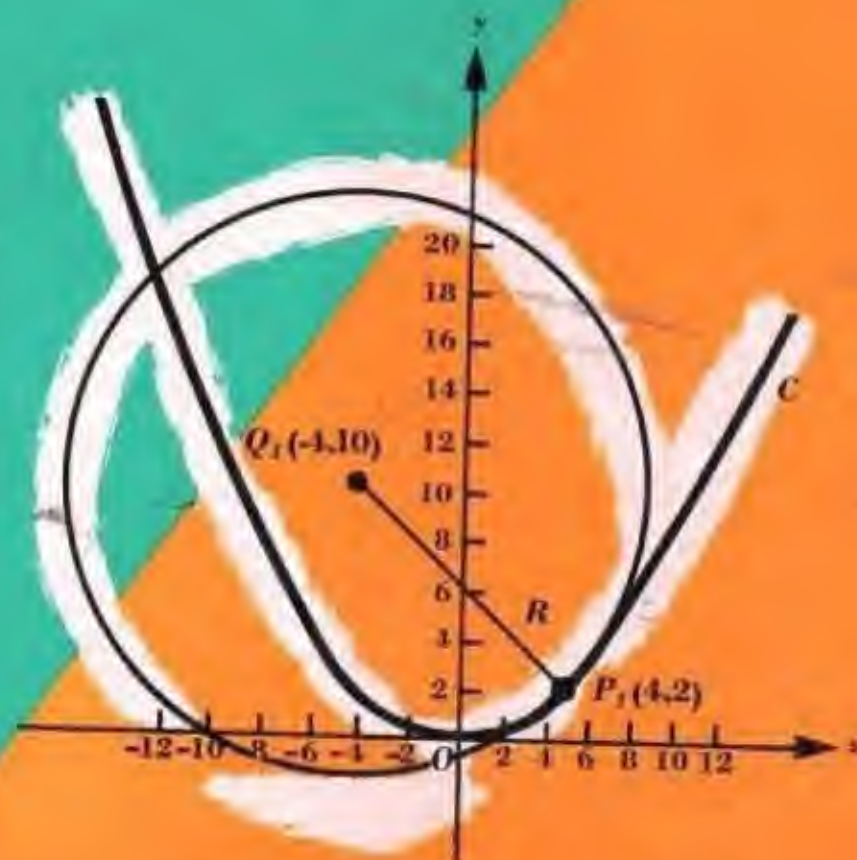


Cálculo

diferencial
e integral



Howard E. Taylor
Thomas L. Wade

CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

HOWARD E. TAYLOR
Profesor asociado de Matemáticas

y

THOMAS L. WADE
Principal del Depto. de Matemáticas
y profesor de Matemáticas
de la Universidad de Florida.



EDITORIAL LIMUSA
MEXICO

Título de la obra en inglés
UNIVERSITY CALCULUS
© 1962, by John Wiley & Sons, Inc.

Versión española del
Lic. HUMBERTO GUTIÉRREZ, M. C.
Jefe del Departamento de Matemáticas del
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey, N. L.

y del Lic. JOSÉ GUEVARA ALFARO
Profesor de Matemáticas
del mismo centro de estudios.

Todos los derechos reservados:

© 1981, EDITORIAL LIMUSA, S. A.
Balderas 95, Primer piso, México 1, D. F.
Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Registro Núm. 121

Primera edición: 1965
Primera reimpresión: 1966
Segunda reimpresión: 1967
Tercera reimpresión: 1968
Cuarta reimpresión: 1969
Quinta reimpresión: 1970
Sexta reimpresión: 1971
Séptima reimpresión: 1971
Octava reimpresión: 1971
Novena reimpresión: 1972
Décima reimpresión: 1973
Decimaprimer reimpresión: 1974
Decimasegunda reimpresión: 1974
Decimatercera reimpresión: 1975
Decimacuarta reimpresión: 1975
Decimaquinta reimpresión: 1976
Decimasexta reimpresión: 1977
Decimaséptima reimpresión: 1979
Decimaoctava reimpresión: 1981

Impreso en México
(3673)

Prólogo

¿Qué factores importantes deben considerarse en la preparación o en la selección de un texto de cálculo para usarse en la década de 1960? Las palabras "en la década de 1960" implican que existe un punto de vista o énfasis en las matemáticas que se pueden llamar "contemporáneas" o "modernas". Las actividades de gran alcance de The School Mathematics Study Group, The Commission on Mathematics of the College Entrance Examination Board, The Committee on the Undergraduate Program in Mathematics y The University of Illinois Committee on School Mathematics apoyan esta consideración.

Creemos que las llamadas "matemáticas modernas" que han empezado a hacer su aparición en la secundaria y en los niveles inferiores universitarios, no sólo abarcan las matemáticas tradicionales sino que además dan reconocimiento explícito y usos frecuentes de algunos conceptos que hasta ahora habían sido considerados y usados sólo brevemente, si acaso, a estos niveles. Entre éstos están los conceptos de *conjunto*, *elemento* o *miembro* de un conjunto, *universo*, *conjunto solución*, *subconjunto*, *intersección* de conjuntos, *unión* de conjuntos, *relación* como conjunto de pares ordenados, *función* como un tipo especial de relaciones, *dominio* de una función, *rango* de una función e *intervalo*. Además, las matemáticas modernas dan reconocimiento más explícito a todos los niveles a definiciones, teoremas y demostraciones, que el que antes se les daba.

Algunos estudiantes inician el estudio del cálculo con la intención de especializarse en matemáticas; otros (usualmente la mayoría) lo hacen planeando una especialización en alguna materia distinta de las matemáticas y aún los hay que lo hacen estando todavía indecisos. Es nuestro deseo que todos estos estudiantes logren una comprensión clara de los conceptos y un dominio genuino de los procedimientos básicos de cálculo en un tiempo no mayor (y preferiblemente en menos) que el requerido cuando se usa un texto tradicional de cálculo.

Por una parte, parece que el estudio del cálculo en la década de 1960 debe hacer uso frecuente de los conceptos que hemos enlistado. Creemos que el cálculo construido sobre dichos conceptos básicos será no sólo más comprensible, sino más interesante y agradable a los estudiantes que el cálculo presentado en forma tradicional. El capítulo 1 trata de la presentación de los conceptos básicos. Nuestra experiencia nos indica que el tiempo empleado en aclarar conceptos básicos al

principio del curso resulta más que compensado después. Un tratamiento del cálculo que haga uso de aquellos conceptos, permite al estudiante comprender la materia de modo más completo.

Por otra parte, tal parece que muchos, si no la mayoría, de los estudiantes que cursan cálculos en la década de 1960 estudiarán aplicaciones de cálculo en cursos tales como ecuaciones diferenciales, cálculo avanzado para ingenieros y científicos y econométrica, cursos que durante algún tiempo seguirán organizados sobre lineamientos tradicionales. Así pues, aunque debemos procurar usar conceptos contemporáneos en el tratamiento del cálculo, no debemos variar totalmente de las formas tradicionales. Por tanto, nos hemos esforzado en escribir un libro de cálculo que prepare a los estudiantes a estudiar, sin ningún obstáculo, ya sea los últimos y más complicados libros de cálculo avanzado o libros de ecuaciones diferenciales y cálculo avanzado de naturaleza tradicional.

Suponemos que el estudiante tiene conocimientos de la geometría analítica elemental,* incluyendo los hechos básicos acerca de gráficas y ecuaciones de líneas, círculos, parábolas, elipses e hipérbolas. Los más modernos planes de estudio de preparatorias incluyen estos temas y los tradicionales les dan cada día más importancia en ellos. Como un escritor afirmó recientemente: "Los elementos de esta asignatura [geometría analítica plana] están actualmente en los cursos secundarios".†

Aunque suponemos estos conocimientos de la geometría analítica básica, presentamos considerable material sobre geometría analítica que tiene en cuenta y extiende los conocimientos básicos. El mayor énfasis se hace en la graficación de relaciones consideradas como conjuntos de parejas ordenadas.

Tras de dar el material fundamental acerca de conjuntos, relaciones e intervalos en las Secs. 1.1 y 1.2, en la Sec. 1.3 definimos *función* como un conjunto de parejas ordenadas en el cual no hay dos parejas con igual primera componente. Si F denota una función y si $(x, y) \in F$, llamamos a y la *correspondiente* de x ante F , y la denotamos por $F(x)$. Más comúnmente especificamos una función poniendo

$$F = \{(x, y) \mid y = F(x)\},$$

y si $(a, F(a)) \in F$, llamamos a $F(a)$, valor de $F(x)$ en $x = a$.

Nos hemos esforzado consistentemente, en distinguir entre la función F y la correspondiente $F(x)$. Observamos la precaución de un distinguido escritor que dice: "La decisión de reservar la palabra 'función' para expresar F y emplear otro término... para expresar $F(x)$ necesitará, si se quiere ser consistente, de

* Un opúsculo titulado *Geometría Analítica Bidimensional. Subconjuntos del Plano*, por Taylor y Wade, publicado por Editorial Limusa-Wiley, S. A., México, D. F., 1965, está disponible para las personas que deseen aprender geometría analítica plana y cálculo en forma conjunta.

† "Offerings for Freshmen" por Bancroft H. Brown, *The American Mathematical Monthly*, Marzo, 1961, pp. 285-287.

numerosos cambios en nuestro tratamiento acostumbrado de los entes matemáticos."*

Conceptualmente, distinguimos entre la función constante $\bar{c} = \{(x, y) \mid y = c\}$ y el número c (p. 47). Puesto que una función es un conjunto de parejas ordenadas, la suma de dos funciones, es un conjunto de parejas ordenadas (p. 52) y la inversa de una función (p. 62) es un conjunto de parejas ordenadas (que puede ser una función o no).

El capítulo 2, trata sobre límites y continuidad. Hablamos del límite de la correspondiente $F(x)$, mejor que del límite de la función F . En la Sec. 2.1, después de un análisis informal de límites, se da la definición clásica (ϵ, δ) del límite de $F(x)$ y esperamos que los estudiantes usen esta definición para demostrar los teoremas acerca de límites. En la Sec. 2.2 los límites trigonométricos, se tratan con más detalle que el usual. En la Sec. 2.3 definimos lo que significa función continua F .

En la Sec. 3.1 definimos la *derivada de la correspondiente* $F(x)$. Si esta derivada de $F(x)$ existe, se expresa por $D_x F(x)$ y escribimos

$$F' = \{(x, y) \mid y = D_x F(x)\}.$$

Llamamos a la función F' , derivada de la función F , de modo que $F'(x) = D_x F(x)$.

Aun cuando creemos que las distinciones conceptuales entre la función F y la correspondiente $F(x)$ y entre la derivada F' de una función y la derivada $D_x F(x)$ de la correspondiente ayudan a la comprensión del cálculo, creemos también que el estudiante trabajará primordialmente con correspondientes y las derivadas de correspondientes. De cuando en cuando resumimos para el estudiante las derivadas de correspondientes que ha estudiado (en la p. 175, cap. 6).

Tal como hablamos de la derivada de una correspondiente y de la derivada de una función, hablamos de la antiderivada de una correspondiente y de la antiderivada de una función (p. 156). Sin embargo, hablamos sólo de la diferencial de una correspondiente. (Sec. 3.14).

Puesto que una función es un conjunto de parejas ordenadas no hablamos de una función creciente. Sin embargo, definimos una correspondiente creciente (Sec. 4.1) que nos lleva a la consideración de los valores máximos y mínimos de correspondientes (Sec. 4.2).

La temprana introducción del Teorema del Valor Medio para Derivadas (en la Sec. 3.10) nos permite demostrar pronto en el libro, la unicidad de la solución de un sistema con derivadas (Sec. 3.11), los teoremas clásicos sobre correspondientes crecientes y decrecientes (Sec. 4.1) y el Teorema Fundamental del Cálculo (Sec. 5.6).

Como las antiderivadas se presentan en la Sec. 3.11, el estudiante logra una

* J. Barkley Rosser, *Logic for Mathematicians*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1953, pp. 305-329, y especialmente p. 317.

8/PROLOGO

práctica considerable en las Secs. 3.11 a 3.14 y en el capítulo 5, al resolver las ecuaciones diferenciales $dy = au^p du$, $dy = a \sin u du$ y $dy = a \cos u du$. Intentamos que el estudiante comprenda que la habilidad para resolver estas tres ecuaciones en una gran variedad de situaciones le permite resolver muchos de los problemas que se le presentan en las aplicaciones del cálculo.

Después de comentarios preliminares sobre sumas, particiones, normas y aumentos (Secs. 5.2 y 5.3), damos una definición general de la integral definida de una función F sobre un intervalo cerrado $[a; b]$ en la Sec. 5.4. Usamos una suma de aproximación, pero cuidadosamente evitamos la noción de que una integral definida es, en general, un límite como el definido en la Sec. 2.1 ó en la Sec. 5.1.

Sin embargo, señalamos que si sabemos que existe la integral definida $\int_a^b F(x) dx$,

entonces podemos definir una sucesión S para la cual $\int_a^b F(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S(n)$.

El teorema básico de la existencia de la integral de una función continua se enuncia sin demostración y se toma como base para las aplicaciones de las integrales. Si bien el estudiante tendrá algunas lagunas, tales como la demostración de ciertos teoremas, que habrá de llenar en cursos posteriores de cálculo avanzado, todo lo que aprenda en este curso le será de utilidad.

El capítulo 6 concierne a las funciones trascendentales y el capítulo 7, a los métodos de integración. El capítulo 8 trata de otras aplicaciones de derivadas e integrales de funciones con una variable independiente.

El capítulo 9 provee al estudiante de los conocimientos básicos de la geometría analítica del espacio, necesarios para el estudio de las derivadas parciales y las integrales múltiples. Este estudio de la geometría analítica del espacio se basa en los conceptos de triadas ordenadas y relaciones en un espacio tridimensional. Ya que un conjunto de triadas ordenadas puede considerarse como un conjunto de pares ordenados cuyas primeras componentes son pares ordenados, el capítulo 9 brinda la base para el estudio, en el capítulo 10, de funciones con dos variables independientes tales como

$$F = \{(x, y; z) \mid z = F(x, y)\}.$$

Nuestra notación para funciones de dos variables independientes es análoga a nuestra notación para funciones con una variable independiente, llamamos $F(x, y)$ a la correspondiente del par (x, y) ante la función F .

Después de un tratamiento más completo de la derivación parcial y sus aplicaciones en el capítulo 10, estudiamos las integrales múltiples en el capítulo 11, con más aplicaciones a problemas de la física en el capítulo 12. Este tratamiento de las integrales múltiples en el capítulo 11 es similar al tratamiento de integrales simples en el capítulo 5. Las transformaciones de integrales múltiples se logran mediante el uso de Jacobianos (Sec. 11.9). El capítulo 13 trata de las reglas de L'Hôpital y las integrales generalizadas, el capítulo 14, de las sucesiones infinitas y las series infinitas y el capítulo 15 trata de aproximaciones.

Este texto está arreglado para permitir flexibilidad y selectividad. El material más teórico sobre límites y continuidad del capítulo 2 y sobre integrales, de la Sec. 5.7 se puede omitir o posponerse. El material en los capítulos del 9 al 15 es independiente del material del capítulo 8 salvo dos excepciones: la Sec. 8.5 acerca de coordenadas polares se necesita para algunas partes de los capítulos 11 y 12, y la Sec. 8.9 es necesaria para la Sec. 10.13 y para el capítulo 14. Los capítulos 13, 14 y 15 se pueden dar en cualquier momento después del capítulo 7 y la Sec. 8.9. El lector puede proceder a estudiar las integrales múltiples y sus aplicaciones en los capítulos 11 y 12 después de estudiar sólo un mínimo del material del capítulo 10 (Secs. 10.1, 10.2, 10.4 y 10.5).

Este libro provee suficiente material para usarse en cursos que totalicen de 10 a 12 horas crédito por semestre. Para cursos de cálculo sobre la base de 3-3, 3-3 horas semestre, los capítulos del 1 al 8 brindan material suficiente para los primeros dos cursos (o trabajo del 1er. año); y los capítulos del 9 al 15 proporcionan material para los dos últimos cursos (o el trabajo del segundo año). Un programa más intensivo, con los primeros dos cursos sobre la base de 5-5 horas semestre puede usar los capítulos del 1 al 7 con algún material del capítulo 8 para el primer curso y los capítulos del 9 al 15 con algunas omisiones (posiblemente de los capítulos 10, 13 y 15) para el segundo curso. Para indicar más claramente a qué velocidad se puede usar el material hemos sugerido asignaciones para un cálculo I de 5 horas semestre y un cálculo II y un cálculo III de 3 horas semestre cada uno.

El libro contiene más de 2,800 ejercicios y 300 figuras.

HOWARD E. TAYLOR
THOMAS L. WADE

Tallahassee, Florida

Contenido

Sugestión para la distribución de clases	17
Lista de símbolos especiales	21
Capítulo 1. Relaciones y funciones	25
1.1 Conjuntos, 25	
1.2 Relaciones e intervalos, 31	
1.3 Funciones, 38	
1.4 Algunas funciones especiales, 46	
1.5 El álgebra de las funciones, 52	
1.6 Funciones compuestas, 55	
1.7 Funciones inversas, 59	
1.8 Desigualdades y valores absolutos, 66	
1.9 Pendiente y función pendiente, 74	
Ejercicios adicionales al capítulo 1, 78	
Capítulo 2. Límites y continuidad	81
2.1 Límites, 81	
2.2 Algunos límites trigonométricos, 93	
2.3 Continuidad, 100	
Ejercicios adicionales al capítulo 2, 110	
Capítulo 3. Derivadas	111
3.1 Definición de derivada, 111	
3.2 Existencia de la derivada y continuidad, 117	
3.3 Algunos teoremas sobre derivadas, 118	
3.4 Segunda derivada y derivadas de orden superior, 125	
3.5 Derivadas por la derecha y por la izquierda, 127	
3.6 Movimiento rectilíneo, 129	

12 / CONTENIDO

- 3.7 Derivación de seno y coseno, 134
- 3.8 Fórmulas para productos y cocientes, 138
- 3.9 La derivada de una función compuesta, 142
- 3.10 El teorema del valor medio para derivadas, 149
- 3.11 Antiderivadas, 155
- 3.12 Derivación implícita, 161
- 3.13 La notación de incrementos, 167
- 3.14 Diferenciales, 170
- Ejercicios adicionales al capítulo 3, 179

Capítulo 4. Algunas aplicaciones de las derivadas

- 4.1 Correspondientes crecientes y decrecientes, 181
- 4.2 Valores máximos y mínimos, 188
- 4.3 Concavidad y puntos de inflexión, 197
- 4.4 Funciones inversas y derivadas, 207
- Ejercicios adicionales al capítulo 4, 215

Capítulo 5. Integrales definidas

- 5.1 Sumas en que el número de términos crece sin límite, 217
- 5.2 Notaciones para sumas, 222
- 5.3 Particiones, normas y aumentos, 225
- 5.4 La integral definida, 227
- 5.5 El teorema fundamental del cálculo, 234
- 5.6 Demostración del teorema fundamental, 239
- 5.7 Propiedades de las integrales definidas, 240
- 5.8 Áreas, 245
- 5.9 Volúmenes de sólidos de revolución, 256
- 5.10 Trabajo, 267
- 5.11 Fuerza debida a la presión de fluidos, 277
- Ejercicios adicionales al capítulo 5, 284

Capítulo 6. Funciones trascendentes

- 6.1 Funciones trigonométricas, 286
- 6.2 Funciones trigonométricas inversas, 291
- 6.3 Funciones exponenciales y logarítmicas, 305
- 6.4 El Número e , 311
- 6.5 La derivada de \log_a , 313

- 6.6 Derivación logarítmica, 319
- 6.7 Derivación de Exp_a , 321
- 6.8 Leyes exponenciales de crecimiento y disminución, 327
- Ejercicios adicionales al capítulo 6, 330

Capítulo 7. Integración indefinida

- 7.1 Integrales indefinidas; fórmulas elementales, 333
- 7.2 Integración por partes, 338
- 7.3 Integrales trigonométricas, 342
- 7.4 Integración por substitución, 348
- 7.5 Integrandos racionales, 362
- 7.6 Fórmulas de reducción, 368
- 7.7 Tablas de integrales, 371
- Ejercicios adicionales al capítulo 7, 371

Capítulo 8. Aplicaciones adicionales de la derivación e integración

- 8.1 Razones relacionadas, 375
- 8.2 Representación paramétrica, 379
- 8.3 Vectores y movimiento curvilíneo en un plano, 391
- 8.4 Proyectiles, 401
- 8.5 Coordenadas polares, 403
- 8.6 Longitud de una curva, 417
- 8.7 Área de una superficie de revolución, 427
- 8.8 Curvatura, 435
- 8.9 Fórmula de Taylor con residuo para $F(x)$, 443
- Ejercicios adicionales al Capítulo 8, 454

Capítulo 9. Geometría analítica del espacio

- 9.1 Sistemas de coordenadas rectangulares de 3 dimensiones, 457
- 9.2 Ángulos directores, cosenos directores y números directores, 466
- 9.3 El ángulo formado por dos líneas, 472
- 9.4 Planos en el espacio-3, 475
- 9.5 Líneas en el espacio-3, 482
- 9.6 Cilindros, 488
- 9.7 Superficies de revolución, 490
- 9.8 Superficies cuadráticas, 494
- 9.9 Curvas en el espacio-3, 501
- Ejercicios adicionales al capítulo 9, 505

Capítulo 10. Funciones en diferentes variables independientes: Diferenciación parcial 509

- 10.1 Funciones de dos o más variables independientes, 509
 - 10.2 Derivadas parciales, 515
 - 10.3 Sistemas de derivadas parciales, 523
 - 10.4 Interpretación geométrica de las derivadas parciales, 527
 - 10.5 Límites y continuidad, 531
 - 10.6 Un teorema básico, 535
 - 10.7 Derivadas totales, 539
 - 10.8 Derivada direccional, 547
 - 10.9 Diferenciales, 554
 - 10.10 Funciones compuestas, 558
 - 10.11 Derivación implícita, 564
 - 10.12 Derivadas parciales de orden superior, 559
 - 10.13 Fórmula de Taylor con residuo para $F(x,y)$, 575
 - 10.14 Valores máximos y mínimos de $F(x,y)$, 579
- Ejercicios adicionales al capítulo 10, 585

Capítulo 11. Integrales múltiples 587

- 11.1 Integrales dobles, 587
 - 11.2 Integrales iteradas de $F(x,y)$, 591
 - 11.3 El teorema fundamental para integrales dobles, 595
 - 11.4 Áreas y volúmenes por integrales dobles, 604
 - 11.5 Integrales triples, 611
 - 11.6 Integrales iteradas de $F(x,y,z)$, 613
 - 11.7 El teorema fundamental para integrales triples, 617
 - 11.8 Volúmenes por integrales triples, 625
 - 11.9 Transformación de integrales múltiples, 626
 - 11.10 Coordenadas cilíndricas y esféricas, 641
 - 11.11 Área de una superficie, 653
- Ejercicios adicionales al capítulo 11, 657

Capítulo 12. Aplicaciones de la integración a problemas de la física 659

- 12.1 Centro de masa de un sistema de partículas, 659
 - 12.2 Centro de masa de un cuerpo continuo, 661
 - 12.3 Centro de masa de una lámina, 667
 - 12.4 Centro de masa de un alambre plano, 673
 - 12.5 Teoremas de Pappus, 676
 - 12.6 Momentos de inercia, 682
- Ejercicios adicionales al capítulo 12, 682

Capítulo 13. Reglas de L'Hopital. Asíntotas. Integrales generalizadas 685

- 13.1 Reglas de L'Hopital, 685
 - 13.2 Límites cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$, 692
 - 13.3 Correspondientes que tienden a infinito o menos infinito, 692
 - 13.4 Asíntotas, 707
 - 13.5 Integrales generalizadas, 711
 - 13.6 Integrales curvilíneas, 720
 - 13.7 Teorema de Green, 730
- Ejercicios adicionales al capítulo 13, 745

Capítulo 14. Sucesiones infinitas y series 749

- 14.1 Sucesiones infinitas, 749
 - 14.2 Series cuyos términos son números reales, 758
 - 14.3 Series alternadas, convergencia absoluta, 768
 - 14.4 Series cuyos términos son correspondientes, 774
 - 14.5 Series de potencias, 777
 - 14.6 Representación de funciones por medio de series de potencias, 785
- Ejercicios adicionales al capítulo 14, 794

Capítulo 15. Aproximaciones 797

- 15.1 Aproximación polinomial, 797
 - 15.2 Construcción de tablas exponenciales y trigonométricas, 801
 - 15.3 Construcción de tablas de logaritmos, 803
 - 15.4 Integración aproximada usando series infinitas, 806
 - 15.5 Integración aproximada por medio de la regla trapezoidal, 810
 - 15.6 Integración aproximada por la regla de Simpson, 814
 - 15.7 Método de Newton, 818
- Ejercicios adicionales al capítulo 15, 822

Tablas I y II 825**Respuestas de algunos ejercicios con números impares** 827**Índice alfabético** 859

SUGESTIONES PARA LA DISTRIBUCION DE CLASES

Para Cálculo I—5 horas semestre

CLASE No.	MATERIAL	CLASE No.	MATERIAL
1	Secs. 1.1, 1.2	28	Sec. 3.13
2	Secs. 1.3, 1.4	29	Sec. 3.14
3	Sec. 1.5	30	
4	Sec. 1.6	31	Repaso
5	Sec. 1.7	32	Prueba 3
6	Secs. 1.8, 1.9	33	Sec. 4.1
7	Secs. 2.1, 2.2	34	Sec. 4.2
8		35	Ejercicios en el pizarrón
9		36	Sec. 4.3
10	Sec. 2.3	37	
11	Repaso	(La Sec. 4.4 se usará como material de referencia)	
12	Prueba 1	38	Repaso
13	Sec. 3.1	39	Prueba 4
14	Sec. 3.2	40	Sec. 5.1
15	Sec. 3.3	41	Secs. 5.2, 5.3
16	Secs. 3.4, 3.5	42	Sec. 5.4
17	Sec. 3.6	43	
18	Sec. 3.7	44	Sec. 5.5
19	Sec. 3.8	45	Sec. 5.7 (sea ligero en la teoría)
20	Sec. 3.9	46	Sec. 5.8
21		47	Ejercicios en el pizarrón
22	Repaso	48	Sec. 5.9
23	Prueba 2	49	Sec. 5.10
24	Sec. 3.10		
25	Sec. 3.11		
26			
27	Sec. 3.12		

18/SUGESTIONES PARA LA DISTRIBUCION DE CLASES

CLASE No.	MATERIAL	CLASE No.	MATERIAL
50	Ejercicios en el pizarrón	64	Sec. 6.8
51	Sec. 5.11	65	Repaso
52	Repaso	66	Prueba 6
53	Prueba 5	67	Sec. 7.1
54	Sec. 6.1	68	Sec. 7.2
55	Sec. 6.2	69	Sec. 7.3
56		70	Sec. 7.4
57	Sec. 6.3	71	
58	Sec. 6.4	72	Repaso
59	Sec. 6.5	73	Prueba 7
60		74	Repaso para el examen final.
61	Sec. 6.6	75	
62	Sec. 6.7		
63			

Para Cálculo II—3 horas semestre

CLASE No.	MATERIAL	CLASE No.	MATERIAL
1	Sec. 9.1	25	Prueba 3
2	Secs. 9.2, 9.3	26	Sec. 11.1
3	Sec. 9.4	27	Sec. 11.2
4	Sec. 9.5		Los métodos de integración que se omiten en el primer curso (Véase el capítulo 7).
5	Ejercicios en el pizarrón	28	
6	Secs. 9.6, 9.7	29	
7	Sec. 9.8	30	Sec. 11.3
8	Repaso	31	Ejercicios en el pizarrón
9	Prueba 1	32	Sec. 11.4
10	Secs. 10.1, 10.2	33	Secs. 11.5, 11.6
11	Sec. 10.3	34	Secs. 11.7, 11.8
12	Sec. 10.4	35	Repaso
13	Sec. 10.5	36	Prueba 4
14	Sec. 10.6	37	Sec. 11.9
15	Sec. 10.7	38	
16	Sec. 10.8	39	Sec. 11.10
17	Repaso	40	
18	Prueba 2	41	Material seleccionado del capítulo 12.
19	Sec. 10.9	42	
20	Sec. 10.10	43	
21		44	Repaso para el examen final.
22	Sec. 10.11	45	
23	Sec. 10.12		
24	Repaso		

SUGESTIONES PARA LA DISTRIBUCION DE CLASES/19

Para Cálculo III—3 horas semestre

CLASE No.	MATERIAL	CLASE No.	MATERIAL
1	Sec. 8.1	24	Sec. 14.2
2	Sec. 8.2	25	
3	Sec. 8.3	26	Sec. 14.3
4	Sec. 8.5	27	
5	Sec. 8.6	28	Ejercicios en el pizarrón
6	Ejercicios en el pizarrón	29	Sec. 14.4
7	Sec. 8.9	30	Sec. 14.5
8	Repaso	31	
9	Prueba 1	32	Sec. 14.6
10	Sec. 13.1	33	Repaso
11	Sec. 13.2	34	Prueba 3
12	Sec. 13.3	35	Sec. 15.1
13		36	Sec. 15.2
14	Sec. 13.4	37	Sec. 15.3
15	Sec. 13.5	38	Sec. 15.4
16		39	Secs. 15.5, 15.6
17	Sec. 13.6	40	Sec. 15.7
18	Ejercicios en el pizarrón	41	Repaso
19	Sec. 13.7	42	Prueba 4
20		43	Repaso para el examen final.
21	Repaso	44	
22	Prueba 2	45	
23	Sec. 14.1		

LISTA DE SIMBOLOS ESPECIALES

SÍMBOLO	SIGNIFICADO	SECCIÓN
\in	Es elemento de	1.1
\notin	No es elemento de	1.1
$\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$	Un conjunto	1.1
$\{x \in U \mid S_x\}$	El conjunto de todos los elementos de U que satisfacen S_x	1.1
Z	El conjunto vacío o conjunto nulo	1.1
(a, b)	Un par ordenado	1.1
$\{(x, y) \mid S_{xy}\}$	El conjunto de todos los pares ordenados que satisfacen S_{xy} y cuyas componentes son elementos del universo U	1.1
\subseteq	Es un subconjunto de	1.1
\subset	Es un subconjunto propio de	1.1
$p \Rightarrow q$	Si p es verdadero, entonces q es verdadero	1.1
$p \leftrightarrow q$	p es verdadero si y sólo si q es verdadero	1.1
\cap	Intersección	1.1
\cup	Unión	1.1
Re	El conjunto de todos los números reales	1.2
$R = \{(x, y) \mid S_{xy}\}$	Una relación en Re	1.2
$Re \times Re$	El conjunto de todos los pares ordenados de números reales	1.2
$[a; b]$	Un intervalo cerrado de a a b	1.2
$(a; b)$	Un intervalo abierto de a a b	1.2
$[a; b)$	Un intervalo abierto por la derecha de a a b	1.2
$(a; b]$	Un intervalo abierto por la izquierda de a a b	1.2

SÍMBOLO	SIGNIFICADO	SECCIÓN
$(-\infty; +\infty)$	Re	1.2
$[a; +\infty)$	El conjunto de todos los números reales mayores o iguales que a	1.2
$(-\infty; a]$	El conjunto de todos los números reales menores o iguales que a	1.2
$F(x)$	La correspondiente de x ante la función F	1.3
$F(a)$	El valor de $F(x)$ en $x = a$	1.3
$\{(x, y) \mid y = F(x)\}$	La función que es el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) tales que $y = F(x)$	1.3
$U[V]$	La compuesta de U con V	1.6
$\lim_{x \rightarrow a} F(x)$	El límite de $F(x)$ cuando x tiende a a	2.1
$D_x F(x)$	La derivada de $F(x)$ con respecto a x	3.1
$F'(x)$	La derivada de $F(x)$ con respecto a x	3.1
DF	La derivada de la función F	3.1
F'	La derivada de la función F	3.1
$D_x^n F(x)$	La n -ésima derivada de $F(x)$ con respecto a x	3.4
$d_x F(x)$	La diferencial de $F(x)$ con respecto a x	3.14
$\lim_{n \rightarrow \infty} F(n)$	El límite de $F(n)$ cuando n crece sin límite	5.1
$\sum_{i=m}^n$	La suma desde $i = m$ hasta $i = n$	5.2
$\int_a^b F(x) dx$	La integral definida de F sobre $[a; b]$	5.4
$\int F(x) dx$	Una integral indefinida de $F(x)$	7.1
\mathbf{a}	El vector (a_1, a_2)	8.3
\mathbf{i}	El vector unitario $(1, 0)$	8.3
\mathbf{j}	El vector unitario $(0, 1)$	8.3
\mathbf{R}	El vector de posición $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$	8.3
\mathbf{V}	El vector velocidad $x_t\mathbf{i} + y_t\mathbf{j}$	8.3
\mathbf{A}	El vector aceleración $x_{tt}\mathbf{i} + y_{tt}\mathbf{j}$	8.3
(a, b, c)	Una triada ordenada	9.1
$\{(x, y, z) \mid S_{xyz}\}$	El conjunto de triadas ordenadas de números reales que satisfacen la proposición S_{xyz}	9.1

SÍMBOLO	SIGNIFICADO	SECCIÓN
$F(x, y)$	La correspondiente de (x, y) ante la función F	10.1
$F(a, b)$	El valor de $F(x, y)$ en (a, b)	10.1
$(x, y; z)$	El par ordenado cuya primera componente es (x, y) y cuya segunda componente es z	10.1
$\{(x, y; z) \mid z = F(x, y)\}$	La función que es el conjunto de todas las parejas ordenadas $(x, y; z)$ tales que $z = F(x, y)$	10.1
$D_x F(x, y)$	La derivada parcial de $F(x, y)$ con respecto a x	10.2
F_x	La derivada parcial de F con respecto a x	10.2
$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} F(x, y)$	El límite de $F(x, y)$ cuando (x, y) tiende a (a, b)	10.5
$D_{\theta} z$	La derivada direccional de $z = F(x, y)$ en (x_1, y_2) , en la dirección θ	10.8
$F_{xx}(x, y)$	La segunda derivada parcial de $F(x, y)$ con respecto a x	10.12
F_{xx}	La segunda derivada parcial de F con respecto a x	10.12
$F_{yx}(x, y)$	La segunda derivada parcial de $F(x, y)$, primero con respecto a x , después con respecto a y	10.12
F_{yx}	La segunda derivada parcial de F , primero con respecto a x , después con respecto a y	10.12
$\iint_R F(x, y) dA$	La integral doble de F sobre la región R	11.1
$\iiint_{R^3} F(x, y, z) dV$	La integral triple de F sobre la región R^3	11.5
$J\left(\frac{x, y}{u, v}\right)$	El Jacobiano de una transformación	11.9
$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$	El límite de $F(x)$ cuando x crece sin límite	13.2
$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$	$F(x)$ crece sin límite cuando x tiende a a	13.3
$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$	$F(x)$ crece sin límite cuando x crece sin límite	13.3
$\int_a^+ F(x) dx$	La integral generalizada de F sobre $[a; +\infty)$	13.3

Relaciones

y funciones

Se dice frecuentemente que la asignatura llamada *cálculo* descansa sobre tres conceptos básicos: el concepto de *variable*, el concepto de *función* y el concepto de *límite*. Es nuestro propósito estudiar, en los capítulos 1 y 2, estos tres conceptos básicos. Puesto que deseamos presentar estas ideas por medio de conjuntos, haremos primero una breve exposición acerca de los mismos.

1.1 Conjuntos. Consideramos determinado un conjunto, cuando tenemos un medio para decidir si un objeto está en el conjunto o no. Hablando estrictamente, consideramos "conjunto" como un concepto no definido. Los objetos contenidos en un conjunto son llamados *elementos* o *miembros* del conjunto. Aunque los miembros de un conjunto pueden ser objetos de cualquier clase, a nosotros nos interesan aquí, especialmente, los conjuntos de *números reales*. Suponemos que el lector está familiarizado con los números reales, con los postulados que ellos satisfacen y con sus propiedades fundamentales.

Usualmente emplearemos letras minúsculas para designar los elementos de un conjunto y letras mayúsculas para designar los conjuntos. Así, hablaremos del elemento a (léase: a minúscula), del conjunto A (léase: A mayúscula). Si el número de miembros de un conjunto se puede expresar mediante un entero positivo, diremos que el conjunto es un *conjunto finito*; en caso contrario se dirá que es un *conjunto infinito*. Un conjunto finito se puede indicar escribiendo sus elementos dentro de llaves. Por ejemplo, si A es el conjunto de los enteros positivos impares menores que 10, entonces:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

Si un conjunto es finito, pero tiene un número grande de elementos, podemos expresarlo escribiendo una cantidad suficiente de éstos para indicar cómo se pueden determinar los restantes y cuántos elementos tiene. Por ejemplo: si B es el conjunto de los enteros impares positivos menores que 100, escribiremos

$$B = \{1, 3, 5, \dots, 99\}.$$

De forma más general, si el conjunto C tiene como elementos a c_1, c_2, \dots, c_n , entonces escribiremos

$$C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}.$$

Especificaremos un conjunto infinito, enlistando un número suficiente de sus elementos para indicar la regla con que se determinan los elementos restantes seguidos de tres puntos, \dots , que se leen: "etc." Por ejemplo: Si D es una progresión geométrica infinita cuyo primer término es a y cuya razón es r , entonces

$$D = \{a, ar, ar^2, \dots\}.$$

Cuando especificamos un conjunto enlistando sus elementos, como hicimos con A, B, C y D , se dice que hemos *tabulado* el conjunto.

Si un objeto a es un elemento del conjunto A , escribiremos $a \in A$ y leeremos " a es elemento de A ". Si un objeto b no es un elemento del conjunto A , escribiremos $b \notin A$ y leeremos " b no es elemento de A ". Por ejemplo:

$$3 \in \{1, 2, 3, 4\}, \text{ pero } 6 \notin \{1, 2, 3, 4\}.$$

Si N es el conjunto de los números naturales, o enteros positivos, entonces $5 \in N$, pero $-4 \notin N$ y $\frac{1}{2} \notin N$.

En general, el orden en que se escriben los elementos de un conjunto no tiene significado y sólo se entiende que los elementos son distintos. Como ilustración: no consideraremos en general que los símbolos a, b, c, d, b, c constituyan un conjunto con seis elementos, sino un conjunto con cuatro elementos, al que representamos por $\{a, b, c, d\}$. También consideraremos como iguales a los conjuntos $\{a, b, c\}$ y $\{a, c, b\}$. Se dice que dos conjuntos A y B son **iguales** si tienen los mismos elementos. Si los conjuntos A y B son iguales, escribiremos $A = B$, y si no lo son escribiremos $A \neq B$.

Como se ilustra en el párrafo precedente, seguiremos la convención de que cuando definamos un término matemático mediante una proposición verbal, el término se pondrá en "**negritas**". Cuando definamos un término mediante el uso de símbolos matemáticos y el signo de igualdad ($=$), solamente diremos "**definimos**", seguido de la igualdad, con "**definimos**" en negritas y con el término definido a la izquierda del signo de igualdad. Por ejemplo: **Definimos:**

$$a^3 = a \cdot a \cdot a.$$

Seguiremos la convención de que cuando enunciemos una definición en cualquiera de las formas siguientes: " q si p " o " q si y sólo si p ", significaremos " q si y sólo si p ". Como ilustración, hemos dado la definición: "Dos conjuntos, A y B , son **conjuntos iguales** si tienen los mismos elementos"; esto significa: "Dos conjuntos, A y B , son **conjuntos iguales** si y sólo si tienen los mismos elementos".

Una **variable** es un símbolo que representa un elemento no especificado de un conjunto dado. Dicho conjunto es llamado **conjunto universal** de la variable o **universo** de la variable, y cada elemento del conjunto es un **valor** de la variable. Sea x una variable cuyo universo es el conjunto $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$; enton-

ces x tiene los valores 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13. En otras palabras, x puede reemplazarse por cualquier entero positivo impar menor que 14. Por esta razón, a menudo se dice que una variable es un *reemplazo* de cualquier elemento de su universo.

Consideremos el conjunto A de los enteros impares mayores que 1 y menores que 5. Entonces A tiene sólo un elemento, el 3; esto es $A = \{3\}$. Si la variable y tiene como universo $A = \{3\}$, entonces y tiene sólo un valor o sea, el 3, y decimos que y es una constante. En general, una **constante** es un símbolo para designar el elemento de un conjunto compuesto de solo un elemento.

Supóngase que S_x es una proposición que contiene a la variable x cuyo universo es U . Supóngase también que cuando reemplazamos x por cualquier elemento de U , obtenemos una expresión que puede ser cierta o falsa. Entonces llamamos a S_x una **condición** en U . Si a es un elemento del universo U , con la propiedad de que S_x es verdadera cuando a sustituye a x , decimos que a satisface la condición S_x . Los símbolos

$$\{x \in U \mid S_x\} \quad (1)$$

denotan "el conjunto de todos los elementos del universo U que satisfacen la condición S_x ". Para ilustrarlo: si U es el conjunto de enteros positivos, entonces

$$\begin{aligned} \{x \in U \mid x < 9\} &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}; \\ \{x \in U \mid x^2 - 5x + 6 = 0\} &= \{2, 3\}. \end{aligned}$$

Observamos que la condición $x^2 - 5x + 6 = 0$ se satisface por 2 y 3 y que son estos los únicos elementos de U que cumplen dicha condición.

Si el conjunto universal U a que nos referimos no ofrece ambigüedad, abreviamos (1) de la siguiente manera:

$$\{x \mid S_x\} \quad (2)$$

y leemos estos símbolos como "el conjunto de todos los elementos del universo que satisfacen la condición S_x ". Por ejemplo: con el conjunto de enteros positivos como universo, podemos escribir las ilustraciones del párrafo precedente como:

$$\begin{aligned} \{x \mid x < 9\} &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}; \\ \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\} &= \{2, 3\}. \end{aligned}$$

El conjunto $\{x \mid S_x\}$, formado por todos los elementos del universo que satisfacen la condición S_x , frecuentemente se llama **conjunto solución** de la condición S_x . Por ejemplo: si el universo es el conjunto de todos los enteros,

el conjunto solución de la ecuación $x^2 = 9$ es $\{-3, 3\}$,

el conjunto solución de la ecuación $2x^2 + 5x = 0$ es $\{0\}$,

el conjunto solución de la desigualdad $x^2 \leq 3$ es $\{-1, 0, 1\}$.

Al conjunto que no tiene elementos se le llama **conjunto cero** o **conjunto vacío** y se denotará por Z . Para indicar que un conjunto dado, A , no tiene elementos, escribiremos $A = Z$, y para significar que B tiene cuando menos un elemento, escribiremos $B \neq Z$.

Si $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, entonces

$$\{x \in U \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\},$$

$$\{x \in U \mid x^2 = 0\} = \{0\},$$

$$\{x \in U \mid x^2 = -1\} = \emptyset.$$

Nótese que el conjunto vacío y el conjunto con el cero como único elemento, son diferentes. En ocasiones trabajaremos con conjuntos en los cuales dos o más elementos pueden ser iguales, o bien, en que el orden de los elementos puede tener significado, o ambas cosas. Pero en tales ocasiones nos referiremos a dichos conjuntos con un nombre distinto de "conjunto", tal como "par ordenado", "n-ada ordenada", "progresión finita" o "progresión geométrica infinita". Por ejemplo: los elementos de una progresión geométrica infinita $D = \{a, ar, ar^2, \dots\}$ están ordenados, siendo a el primer término, ar , el segundo, ar^2 el tercero, etc.

En la geometría analítica plana se está acostumbrando a trabajar con coordenadas rectangulares de puntos. Las coordenadas de un punto constituyen un par ordenado de números. Tendremos un **par ordenado** de objetos cuando tengamos dos objetos, uno de los cuales se identificará como el primero y el otro como el segundo. Por ej.: (a, b) es un par ordenado, en el cual a es la **primera componente** y b es la **segunda**. Los pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales si y sólo si $a = c$ y $b = d$. Luego $(a, b) \neq (b, a)$, o menos que $a = b$.

Las dos componentes de un par ordenado pueden ser elementos de un mismo conjunto o de conjuntos diferentes. Por ejemplo: si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3, 4\}$, los pares ordenados

$$(1, 3), (1, 4), (2, 3) \text{ y } (2, 4)$$

son de la forma (a, b) , con $a \in A$ y $b \in B$.

Sea S_{xy} una proposición en las variables x y y , con universo U , y con la propiedad de que cuando reemplacemos x por cualquier elemento de U , y y por cualquier elemento de U , obtengamos un predicado que puede ser cierto o falso. Se dice que un par ordenado (a, b) , con a y $b \in U$, satisface la proposición S_{xy} , si S_{xy} es verdadera cuando x se substituye por a , y y se substituye por b . Los símbolos

$$\{(x, y) \mid S_{xy}\}$$

denotan "el conjunto de todos los pares ordenados que satisfacen S_{xy} y cuyas componentes son elementos del universo U ".

El conjunto $\{(x, y) \mid S_{xy}\}$, es el conjunto solución de la proposición S_{xy} . Por ejemplo: si el universo es el conjunto de números reales, Re , el conjunto solución de la ecuación

$$x - y = 2$$

se expresa por

$$\{(x, y) \mid x - y = 2\}$$

y consta de un número infinito de pares ordenados de números reales, algunos de cuyos elementos son

$$(0, -2), \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right), (7, 5) \text{ y } (11, 9).$$

Para el mismo universo, el conjunto solución de la proposición

$$2x + y = 5 \text{ y } x + y = 2$$

se expresa por

$$\{(x, y) \mid 2x + y = 5 \text{ y } x + y = 2\},$$

y consta de la pareja ordenada $(3, -1)$.

Un conjunto A , es **subconjunto** de un conjunto B , si cada elemento de A es un elemento de B , indicamos esto escribiendo $A \subseteq B$. Por ej.: $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ y $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$. Nótese que cualquier conjunto es un subconjunto de sí mismo: $A \subseteq A$. Si A no es un subconjunto de B , escribimos $A \not\subseteq B$. Así $\{1, 4\} \not\subseteq \{1, 2, 3\}$.

Hallamos conveniente el uso de los símbolos

$$p \Rightarrow q$$

como abreviación de la proposición:

"Si p es verdadera, entonces q es verdadera".

De modo semejante, usaremos los símbolos

$$p \Leftrightarrow q$$

como abreviación de la proposición:

" p es verdadera si y sólo si q es verdadera".

Como ejemplo del uso de estos símbolos, tenemos:

"El conjunto A es subconjunto de B ", significa: " $x \in A \Rightarrow x \in B$ ";

$$A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A \Leftrightarrow A = B.$$

Si A es un subconjunto de B , y si hay al menos un elemento de B que no es miembro de A , entonces A es un **subconjunto propio** de B , y escribimos $A \subset B$. Si A no es un subconjunto propio de B , escribimos $A \not\subset B$. Por ejemplo $\{a, b\} \not\subset \{a, b\}$.

Seguiremos la convención que el conjunto vacío Z , es subconjunto de cualquier conjunto y es subconjunto propio de cualquier conjunto excepto de sí mismo.

Los subconjuntos de $\{a, b, c\}$ son $\{a, b, c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, Z . Con excepción del primero, todos son subconjuntos propios. Nótese que el número de subconjuntos de $\{a, b, c\}$ es $2^3 = 8$. Un conjunto con n elementos tiene 2^n subconjuntos.

La **intersección** de los conjuntos A y B , se expresa por $A \cap B$ y se lee " A intersección B ", representa el conjunto de objetos que son elementos de A y de B . Esto es

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ y } x \in B.$$

La **unión** de los conjuntos A y B , se expresa por $A \cup B$, y se lee " A unión B ", representa el conjunto de objetos que son elementos de cuando menos uno de los conjuntos A y B . Esto es[†]

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ y/o } x \in B.$$

Por ejemplo si:

$$A = \{a, b, c, d\} \text{ y } B = \{c, d, e, f\},$$

entonces

$$A \cap B = \{c, d\} \text{ y } A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}.$$

Nótese que $A \cap A = A$ y $A \cup A = A$. Además $A \cap Z = Z$ y $A \cup Z = A$.

EJERCICIOS

Si el universo U es el conjunto de los enteros positivos menores que 25, tabule cada uno de los conjuntos en los ejercicios del 1 al 3.

1. (a) $\{x \mid x \in U\}$ (b) $\{x \mid x^2 \in U\}$.
2. (a) $\{x \mid x^2 < 10\}$ (b) $\{x \mid x^2 - 5x = 0\}$.
3. (a) $\{x \mid x^2 - 11x + 28 = 0\}$ (b) $\{x \mid x^2 - 24x - 25 = 0\}$.

En cada uno de los ejercicios del 4 al 7 halle el conjunto solución de la ecuación dada si el universo es el conjunto de los enteros.

4. $2x + 4 = 12$.
5. $-3x^2 + 12 = 0$.
6. $3x^2 - 4 = 23$.
7. $x^2 - x - 12 = 0$.

En cada uno de los ejercicios del 8 al 11 encuentre el conjunto solución de la ecuación dada si el universo es el conjunto de los números reales.

8. $x^3 - 4x^2 = 0$.
9. $6x^2 - x - 35 = 0$.
10. $\sqrt{3}x^2 - 4x + \sqrt{3} = 0$.
11. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

12. Si $U = \{1, 2\}$, enliste todos los pares ordenados cuyas componentes sean elementos de U .

13. Si $U = \{1, 2, 3, 4\}$, enliste todos los pares ordenados cuyas componentes sean elementos de U .

14. Para los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{b, d, e\}$, determine $A \cap B$; $A \cup B$; $A \cap A$; $B \cap B$; $A \cup A$; $B \cup B$; $A \cap Z$; $B \cap Z$; $A \cup Z$; $B \cup Z$.

15. Sean $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ y $B = \{3, 6, 9\}$. Halle $A \cap B$ y $A \cup B$.

16. Para los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{b, d, e\}$, enliste los conjuntos C que tienen la propiedad de que $C \subset A$ y $C \subset B$, y compruebe que cada $C \subseteq (A \cap B)$.

17. Enliste los subconjuntos de $\{a, b, c, d\}$. ¿Cuáles de ellos son subconjuntos propios del conjunto dado?

18. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, ¿cuáles son los conjuntos B , tales que $\{1, 2\} \subset B$ y $B \subset A$?

[†] Seguiremos la convención de usar "y/o" para indicar el "o" inclusivo que significa una u otra o ambas posibilidades. Esto es, $x \in A \cup B$ si $x \in A$ ó $x \in B$ ó $x \in A \cap B$.

1.2 Relaciones e intervalos. Hicimos breves comentarios sobre los pares ordenados y notamos que éstos se presentan en relación con las ecuaciones con dos variables. Por ejemplo, una *solución* de una ecuación

$$ax + by = c \quad (3)$$

en las variables x y y , es una pareja ordenada de número (x_1, y_1) que satisface la ecuación. El conjunto solución de una ecuación de la forma (3), es un conjunto infinito de pares ordenados, si el universo es el conjunto de números reales, Re , y no puede ser tabulado.

Sin embargo, si se toma como universo $U = \{1, 2, 3\}$, podemos tabular los siguientes conjuntos soluciones de las expresiones dadas en las variables x y y , que tienen la propiedad de que $x \in U$ y $y \in U$:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(x, y) \mid y = x\} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}, \\ R_2 &= \{(x, y) \mid y > x\} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}, \\ R_3 &= \{(x, y) \mid x + y = 4\} = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}, \\ R_4 &= \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 5\} = \{(1, 2), (2, 1)\}. \end{aligned}$$

Un conjunto K de pares ordenados cuyas componentes sean elementos de un universo U , se llama **relación** en U . Los conjuntos R_1, R_2, R_3, R_4 , antes especificados, son relaciones del conjunto $\{1, 2, 3\}$. El conjunto

$$R_5 = \{(x, y) \mid x - y = 2\}$$

tratado en la sección precedente, es una relación del conjunto de números reales.

El **dominio** de una relación R , en un conjunto U , es el subconjunto de U cuyos elementos son la primera componente de los pares ordenados que pertenecen a R . El **rango** de una relación R en U , es el subconjunto de U , cuyos elementos son la segunda componente de los pares ordenados que están en R . Por ejemplo: para las relaciones R_1, R_2, R_3 y R_4 que dimos, y para las cuales $U = \{1, 2, 3\}$,

- el dominio de $R_1 = \{1, 2, 3\}$, el rango de $R_1 = \{1, 2, 3\}$;
- el dominio de $R_2 = \{1, 2\}$, el rango de $R_2 = \{2, 3\}$;
- el dominio de $R_3 = \{1, 2, 3\}$, el rango de $R_3 = \{1, 2, 3\}$;
- el dominio de $R_4 = \{1, 2\}$, el rango de $R_4 = \{1, 2\}$.

Si el universo U no está especificado, consideraremos que es el conjunto de números reales, Re . Seguiremos la convención de que, a menos que se especifique lo contrario, el dominio de una relación en Re ,

$$R = \{(x, y) \mid S_{xy}\},$$

es el conjunto D de todos los números reales, con la propiedad de que $a \in D$ si y sólo si, existe un número $b \in Re$, tal que $(a, b) \in R$.

Para la relación

$$R_5 = \{(x, y) \mid x - y = 2\}$$

el dominio es el conjunto de números reales, Re , y el rango es también Re . Para la relación

$$R_6 = \{(x, y) \mid y = x^2\}$$

el dominio es el conjunto de números reales y el rango es el conjunto de números reales no negativos. Para la relación

$$R_7 = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x}\}$$

el dominio es el conjunto de los números reales no negativos y el rango es, asimismo, el conjunto de números reales no negativos. Para la relación

$$R_8 = \{(x, y) \mid y = \sin x\}$$

el dominio es el conjunto de números reales y el rango es el conjunto de los números reales desde -1 hasta 1 , incluyendo a ambos.

Para la relación

$$\{(x, y) \mid y = \frac{2}{4-x^2}\}$$

el dominio consiste en todos los números reales, excepto -2 y 2 . Para la relación

$$\{(x, y) \mid y^2 = \frac{2}{4-x^2}\}$$

el dominio consiste en todos los reales mayores que -2 y menores que 2 .

El **producto cartesiano**, $U \times V$, de dos conjuntos dados, U y V , es la totalidad de pares ordenados que se puedan formar con elementos de U , como primeras componentes, y con elementos de V , como segundas:

$$(x, y) \in U \times V \iff x \in U \text{ y } y \in V.$$

Por ejemplo, si $U = \{1, 2\}$ y $V = \{1, 2, 3\}$, entonces

$$U \times V = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}.$$

$$V \times U = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}.$$

Aunque $U \times V$ y $V \times U$ tienen el mismo número de elementos, en el ejemplo anterior, en general, $U \times V \neq V \times U$.

El producto Cartesiano de U y U , esto es $U \times U$, se llama **conjunto Cartesiano** de U :

$$(x, y) \in U \times U \iff x \in U \text{ y } y \in U.$$

Frecuentemente encontraremos el conjunto Cartesiano de un conjunto universal dado, U , y subconjuntos de este conjunto Cartesiano. Sea el universo $U = \{1, 2, 3\}$. Entonces

$$U \times U = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}.$$

Hay que tener presente que una relación en U es un conjunto de pares ordenados, cuyas componentes son elementos de U . Por tanto, una relación en U , es un subconjunto de $U \times U$. Por ejemplo: las relaciones R_1, R_2, R_3 y R_4 , especificadas en el segundo párrafo de esta sección, son subconjuntos de $U \times U$, siendo $U = \{1, 2, 3\}$.

Una relación en Re , es un subconjunto de $Re \times Re$. Las relaciones R_5, R_6 y R_7 , son relaciones en Re , y cada una de ellas es un subconjunto de $Re \times Re$.

En la geometría analítica plana cada punto $P(a, b)$ del plano, corresponde a un elemento del conjunto Cartesiano $Re \times Re$, siendo Re el conjunto de números reales, y cada elemento de $Re \times Re$ corresponde a un punto del plano coordenado.

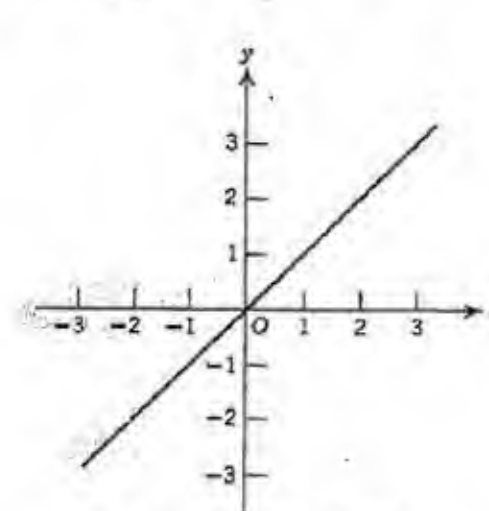


Fig. 1.1 $R_1 = \{(x, y) \mid y = x\}$

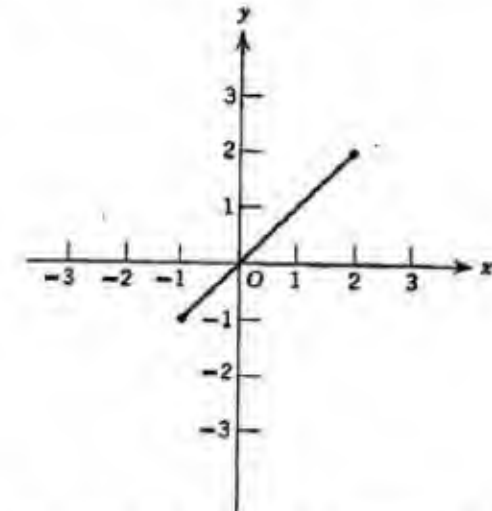


Fig. 1.2 $R_2 = \{(x, y) \mid y = x \text{ y } -1 < x \leq 2\}$

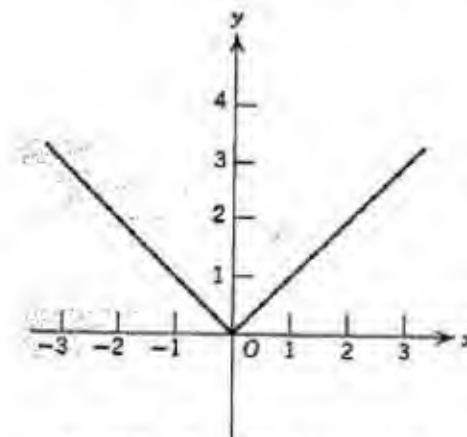


Fig. 1.3 $R_3 = \{(x, y) \mid y = |x|\}$

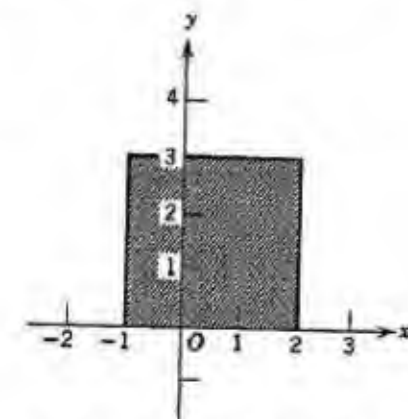


Fig. 1.4 $R_4 = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 2 \text{ y } 0 \leq y \leq 3\}$

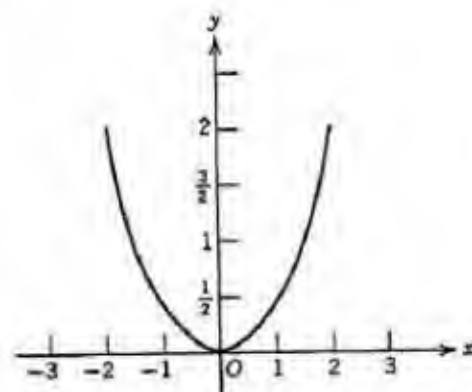
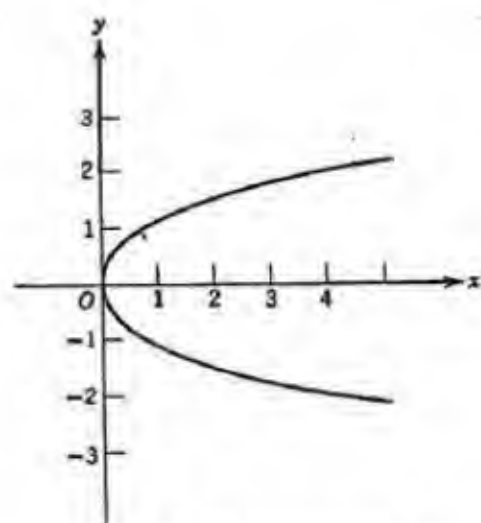
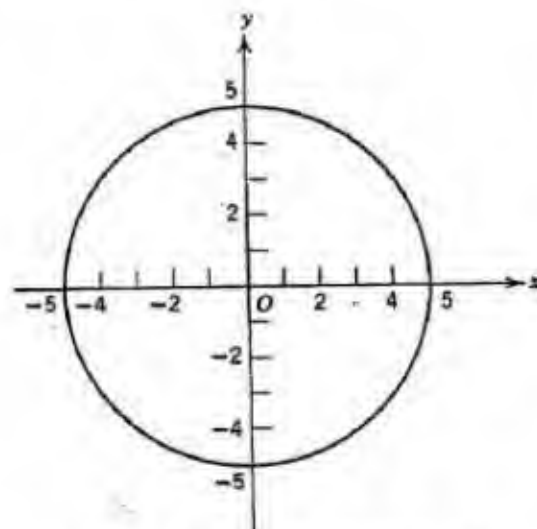
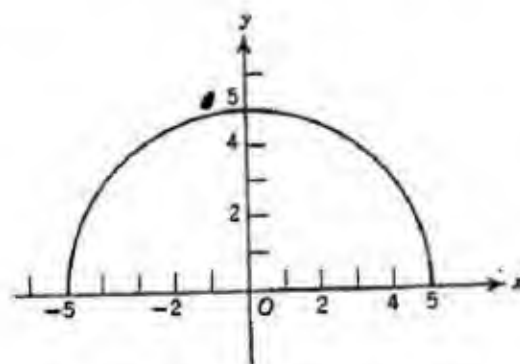
La **gráfica de una relación** R , es el conjunto G , de todos los puntos del plano coordenado, con la propiedad siguiente:

$$P(a, b) \in G \iff (a, b) \in R.$$

Además, la gráfica de una proposición S_{xy} , que comprende las variables x y y , es la gráfica de la relación

$$R = \{(x, y) \mid S_{xy}\}$$

En las Figs. 1.1-1.8 se dan algunos ejemplos de gráficas de relaciones.

Fig. 1.5 $R_n = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{2}x^2\}$ Fig. 1.6 $R_n = \{(x, y) \mid y^2 = x\}$ Fig. 1.7 $R_n = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25\}$ Fig. 1.8 $R_n = \{(x, y) \mid y = \sqrt{25 - x^2}\}$

En la Fig. 1.1 se debe entender que la gráfica de R_0 es la recta que bisecta los cuadrantes primero y tercero, y que se extiende indefinidamente en las dos direcciones. El punto $P(3, 3)$ está en la gráfica porque $(3, 3) \in \{(x, y) \mid y = x\}$. Por lo contrario el punto $P(2, 1)$ no está en la gráfica porque $(2, 1) \notin \{(x, y) \mid y = x\}$. En la figura 1.2, la gráfica de R_{10} es un segmento de recta que incluye sus puntos extremos, los cuales están indicados en forma visible. En la Fig. 1.4, la gráfica de R_{12} consiste de todos los puntos que están en el rectángulo sombreado y sobre la frontera del rectángulo.

Al describir el dominio y el rango de una relación en R_0 , frecuentemente conviene usar la notación y terminología de *intervalos*, que son subconjuntos de R_0 . Describiremos nueve intervalos, cuatro de ellos finitos y cinco infinitos. En la definición de intervalos finitos, a y b son números reales, siendo $a < b$.

Fig. 1.9 $[a; b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ Fig. 1.10 $(a; b) = \{x \mid a < x < b\}$ Fig. 1.11 $[a; b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ Fig. 1.12 $(a; b] = \{x \mid a < x \leq b\}$

El conjunto de todos los números reales mayores o iguales que a y menores o iguales que b , se expresa por $\{x \mid a \leq x \leq b\}$. Este conjunto se llama **intervalo cerrado** de a a b ; y también se expresa por $[a; b]$; esto es:

$$[a; b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}.$$

El conjunto de números reales mayores que a y menores que b , se expresa por $\{x \mid a < x < b\}$. Este conjunto se llama **intervalo abierto** de a a b y también se denota por $(a; b)$; esto es:

$$(a; b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

El conjunto de todos los números reales mayores o iguales que a y menores que b , se expresa por $\{x \mid a \leq x < b\}$. Este conjunto se llama **intervalo abierto a la derecha**, de a a b , y también se expresa por $[a; b)$; esto es:

$$[a; b) = \{x \mid a \leq x < b\}.$$

El conjunto de todos los números reales mayores que a y menores o iguales que b , se expresa por $\{x \mid a < x \leq b\}$. Este conjunto se llama **intervalo abierto a la izquierda** de a a b y también se expresa por $(a; b]$; esto es:

$$(a; b] = \{x \mid a < x \leq b\}.$$

Representamos estos intervalos en la escala de números reales en las Figs. 1.9-1.12.

Puesto que existe una correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de una escala numérica, frecuentemente hablaremos de la representación de un intervalo en la escala numérica, como del intervalo mismo. Consecuentemente, usaremos la palabra "intervalo" para significar uno de los conjuntos

de números reales antes definidos, o la representación de ese conjunto sobre la escala numérica.

En cada una de las Figs. 1.9–1.12, los puntos visibles (como en el punto a en la Fig. 1.11), indican que el punto está incluido en el intervalo y un arco de círculo en un punto (como en el punto b en la Fig. 1.11), indica que el punto no está incluido en el intervalo.

Como ejemplo $[0; 4] = \{x \mid 0 \leq x \leq 4\}$, es el intervalo cerrado formado por todos los números reales desde 0 hasta 4, inclusive (Fig. 1.13).

Similarmente, $(0; 4] = \{x \mid 0 < x \leq 4\}$, es el intervalo abierto a la izquierda, formado por todos los números mayores que 0 y menores o iguales que 4 (Fig. 1.14).

Cada uno de los intervalos $[a; b]$, $(a; b)$, $[a; b)$ y $(a; b]$ se llama **intervalo finito**, con a como **punto extremo izquierdo** y b como **punto extremo derecho**.

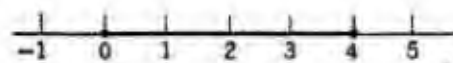


Fig. 1.13

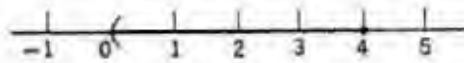


Fig. 1.14

A veces es conveniente considerar una porción de la escala numérica real, que se extiende indefinidamente en una o ambas direcciones. Al hacerlo así, usaremos los cinco intervalos infinitos

$$\{x \mid a \leq x\}, \quad \{x \mid a < x\}, \quad \{x \mid x \leq b\}, \\ \{x \mid x < b\}, \quad \{x \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

Se pueden tener notaciones alternativas para estos intervalos, usando el símbolo ∞ como sigue:

$$[a; +\infty) = \{x \mid a \leq x\}, \quad (a; +\infty) = \{x \mid a < x\}, \\ (-\infty; b] = \{x \mid x \leq b\}, \quad (-\infty; b) = \{x \mid x < b\}, \\ (-\infty; +\infty) = \mathbb{R}.$$

Tabla 1.1

Relación	Dominio	Rango
$R_5 = \{(x, y) \mid x - y = 2\}$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
$R_6 = \{(x, y) \mid y = x^2\}$	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$
$R_7 = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x}\}$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$
$R_8 = \{(x, y) \mid y = \sin x\}$	$(-\infty; +\infty)$	$[-1; 1]$
$R_9 = \{(x, y) \mid y = x\}$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
$R_{10} = \{(x, y) \mid y = xy - 1 \leq x \leq 2\}$	$[-1, 2]$	$[-1; 2]$
$R_{11} = \{(x, y) \mid y = x \}$	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$
$R_{12} = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 2 \text{ y } 0 \leq y \leq 3\}$	$[-1, 2]$	$[0; 3]$
$R_{13} = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{2}x^2\}$	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$
$R_{14} = \{(x, y) \mid y^2 = x\}$	$[0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
$R_{15} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25\}$	$[-5; 5]$	$[-5; 5]$
$R_{16} = \{(x, y) \mid y = \sqrt{25 - x^2}\}$	$[-5; 5]$	$[0; 5]$

Por ejemplo: cuando escribimos $(-\infty; b]$ representamos el conjunto de todos los números reales de los cuales b es el mayor, pero en que no hay uno que sea el menor. Cuando escribimos $(a; +\infty)$ representamos el conjunto de todos los números reales mayores que a y en el que no hay uno que sea el mayor.

Mediante el uso de intervalos indicamos en la tabla 1.1 el dominio y el rango de cada una de las relaciones R_5, \dots, R_{16} , antes especificadas.

EJERCICIOS

1. Si $U = \{1, 2\}$, tabule cada una de las relaciones:

$$R_1 = \{(x, y) \mid y = x\}, \\ R_2 = \{(x, y) \mid y > x\}, \\ R_3 = \{(x, y) \mid y < x\}.$$

Grafique cada relación y dé el dominio y el rango.

2. Si $U = \{1, 2, 3, 4\}$, tabule cada una de las relaciones:

$$R_1 = \{(x, y) \mid y = x\}, \quad R_2 = \{(x, y) \mid y > x\}, \\ R_3 = \{(x, y) \mid y < x\}, \quad R_4 = \{(x, y) \mid x + y = 5\}.$$

3. Si el universo U , es el conjunto de los enteros:

(a) encuentre cinco pares ordenados que sean elementos de la relación $R = \{(x, y) \mid y = 2x\}$;

(b) encuentre cinco pares ordenados que sean elementos de la relación $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25\}$.

4. Tabule el conjunto Cartesiano $A \times A$, si $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

5. Si el universo es $A = \{1, 2, 3, 4\}$, tabule y dé el dominio y el rango de cada relación.

$$(a) R_1 = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{2}x\} \quad (b) R_2 = \{(x, y) \mid x + y = 5\} \\ (c) R_3 = \{(x, y) \mid x = 2\} \quad (d) R_4 = \{(x, y) \mid y = 3\} \\ (e) R_5 = \{(x, y) \mid y < \frac{1}{2}x\} \quad (f) R_6 = \{(x, y) \mid y < x\}.$$

6. Si el universo es $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, determine una proposición S_{xy} , en forma de ecuación, que describa la relación dada por

$$(a) \{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3)\} \\ (b) \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\} \\ (c) \{(3, 1), (4, 2), (5, 3)\}.$$

En cada uno de los ejercicios 7–18, el universo es el conjunto de los números reales. Grafique cada relación y dé el dominio y el rango.

7. $R = \{(x, y) \mid x = 2 \text{ y } y > 0\}$.
 8. $R = \{(x, y) \mid x = 2 \text{ y } 0 < y < 3\}$.
 9. $R = \{(x, y) \mid y = x^2 - 4x \text{ y } y \leq 0\}$.
 10. $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 9\}$.
 11. $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$.
 12. $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 9\}$.
 13. $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$.
 14. $R = \{(x, y) \mid y = \sqrt{4 - x^2}\}$.
 15. $R = \{(x, y) \mid y = -\sqrt{4 - x^2}\}$.
 16. $R = \{(x, y) \mid y^2 = -8x\}$.
 17. $R = \{(x, y) \mid 25x^2 + 9y^2 = 225\}$.
 18. $R = \{(x, y) \mid 16x^2 - 9y^2 = 144\}$.

En cada uno de los ejercicios 19–22, grafique la relación especificada por la ecuación dada. Dé el dominio y el rango de cada relación, en forma de intervalo o de unión de intervalos.

19. $x^2 + y^2 + 10y - 75 = 0.$

20. $y = |x^2 - 9|.$

21. $y = \sqrt{3 - x}.$

22. $y = \sqrt{x^2 - 4}.$

En cada uno de los ejercicios 23–26, represente el intervalo dado o el conjunto dado, mediante un diagrama semejante a los de las Figs. 1.13 y 1.14.

23. $[2; 7].$

24. $[-3; 2].$

25. $\{x \mid -4 < x \leq 5\}.$

26. $\{x \mid x \geq 2\}.$

En cada uno de los ejercicios 27–30, se da una relación en Re . Grafique dicha relación. Dé el dominio y el rango de cada relación, como un intervalo o una unión de intervalos.

27. $R = \{(x, y) \mid y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}\}$

28. $R = \{(x, y) \mid y > \frac{2}{3}x - 2\}.$

29. $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 9 \text{ y } x + 2y > 4\}.$

30. $R = \{(x, y) \mid xy = 4\}.$

1.3 Funciones. Consideramos otra vez las relaciones

$$R_6 = \{(x, y) \mid y = x^2\} \quad \text{y} \quad R_{14} = \{(x, y) \mid y^2 = x\}$$

ya examinadas en la sección 1.2. Nótese que a cada elemento del dominio de R_6 , se le asocia sólo un elemento de su rango; por ejemplo: al número 4, en el dominio, se le hace corresponder el número 16, en el rango. Esto es, $(4, 16) \in R_6$. Sin embargo, a cada elemento del dominio de R_{14} , se le asigna más de un elemento de su rango; por ejemplo: al número 4, en el dominio, le corresponden los elementos $+2$ y -2 , del rango. Esto es, $(4, 2) \in R_{14}$, y $(4, -2) \in R_{14}$.

Una relación con la propiedad de que a cada elemento de su dominio se le asocia un único elemento de su rango, se llama función. Definimos una **función**, como un conjunto no vacío de pares ordenados, de los cuales no hay dos con primera componente igual. Esto es, una relación, F , es una función si y sólo si

$$(a, b) \in F \text{ y } (a, b') \in F \Rightarrow b = b'.$$

Aunque los pares ordenados que son elementos de una función, pueden ser objetos de cualquier clase, a nosotros nos interesarán aquellas que sean pares de números reales; esto es, nos referiremos a funciones en Re . A una función en Re , la llamaremos **función real**.

Puesto que hemos definido una función (real), como una clase especial de relación (real), y ya que las gráficas de relaciones han sido ampliamente estudiadas en la geometría analítica, y además han sido analizadas en la sec. 1.2, no existe aquí la necesidad de profundizar en el tema. Bastará el comentar que la gráfica de una función F , es intersectada cuando más una vez por cualquier recta perpendicular al eje sobre el cual se grafica su dominio. Esto es cierto, puesto que para cada número a , del dominio, hay uno y sólo un par ordenado $(a, b) \in F$, y por tanto un y sólo un punto de la gráfica de F , cuya primera coordenada sea a .

Observemos en la Fig. 1.15 que la gráfica de la relación R_6 (la cual es una función) se corta, cuando más en un punto, con una recta perpendicular al eje x ; y en la Fig. 1.16, que la gráfica de R_{14} (que no es una función) se corta en dos puntos con una recta perpendicular al eje positivo de las x .

Una función establece una correspondencia, mediante la cual precisamente un elemento b , del rango Y de F , se asocia con cada elemento a , del dominio X de F . Sin embargo, un elemento del rango puede asociarse con más de un elemento del dominio. Por ejemplo: sea

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \quad \text{y} \quad Y = \{y_1, y_2, y_3\}.$$

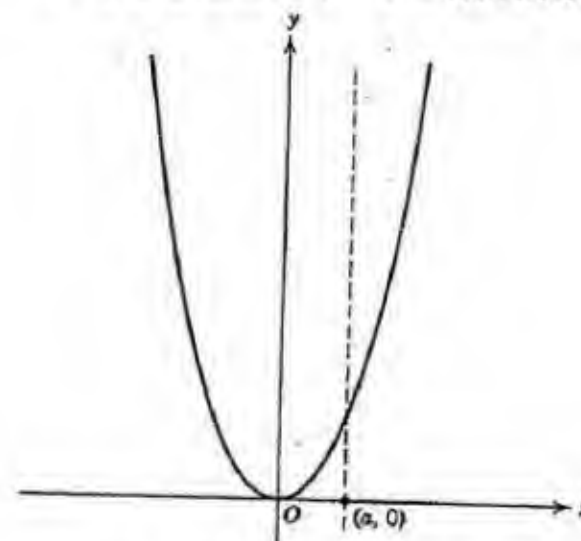


Fig. 1.15 $R_6 = \{(x, y) \mid y = x^2\}$

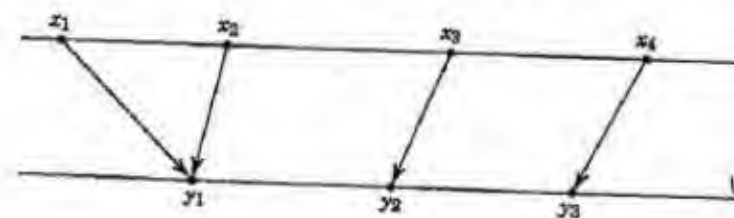


Fig. 1.16

y consideremos la función

$$F = \{(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_3, y_2), (x_4, y_2)\}.$$

La correspondencia establecida por esta función, está representada en la Fig. 1.16.

Sean F una función, x una variable cuyo universo es el dominio D de F , y y una variable cuyo universo es el rango de F ; y si $(x, y) \in F$, llamaremos a y , la **correspondiente de x ante F** . La correspondiente de x ante F se expresa

$$F(x),$$

que lo veremos simplemente como " F de x ". $F(x)$ es la única segunda componente de la pareja ordenada que pertenece a F , y cuya primera componente es x . Esto es

$$y = F(x) \iff (x, y) \in F \quad (4)$$

Si a es el valor de x , esto es, si $a \in D$, entonces existe un valor b , de y , tal que $(a, b) \in F$. Si $(a, b) \in F$, escribiremos

$$b = F(a),$$

llamaremos a $F(a)$, el valor de $F(x)$ en a . Por tanto, si F es una función y d y 2 son elementos del dominio de F , entonces

$F(d)$ es la segunda componente del par ordenado que pertenece a F y cuya primera componente es d ; $F(d)$ es el valor de $F(x)$, en d ;

$F(2)$ es la segunda componente del par ordenado que pertenece a F y cuya primera componente es 2 ; $F(2)$ es el valor de $F(x)$, en 2 .

Por ejemplo: si

$$F = \{(x, y) \mid y = x^2 + 2x - \frac{1}{2}\}$$

con

$$F(x) = x^2 + 2x - \frac{1}{2},$$

entonces

$$F(d) = d^2 + 2d - \frac{1}{2} \text{ y } F(2) = (2)^2 + 2(2) - \frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}.$$

En síntesis, enfatizamos que si F es una función y si $a \in (\text{dominio de } F)$, entonces el símbolo $F(a)$, tiene una sola representación: la segunda componente del par ordenado, que pertenece a F y cuya primera componente es a . Si tenemos una fórmula que exprese la segunda componente de un par ordenado de F , en términos de la primera componente, esto es, si tenemos una fórmula para la correspondiente de x ante F , podremos encontrar una expresión para $F(a)$, en términos de a .

Mediante la notación $F(x)$, para la correspondiente de x ante F , podemos escribir

$$F = \{(x, y) \mid y = F(x)\}.$$

Cuando $F(x)$ es una expresión sencilla, usaremos a veces los símbolos $\{(x, F(x))\}$, para representar al conjunto $\{(x, y) \mid y = F(x)\}$. Por ejemplo podemos escribir:

$$\{(x, x^2)\} \text{ en vez de } \{(x, y) \mid y = x^2\}$$

y

$$\{(x, \sin x)\} \text{ en vez de } \{(x, y) \mid y = \sin x\}.$$

Antes de poder decir que una función F ha sido especificada o definida, debemos (i) conocer el dominio de F y (ii) estar en posibilidad de determinar el elemento del rango de F que corresponda a cualquier miembro dado del dominio. Hay muchas formas para realizarlo. La mayor parte de las veces, especificaremos una función, escribiendo $F = \{(x, y) \mid S_{xy}\}$, o bien dando una fórmula

para $F(x)$; en ambos casos estableceremos explícitamente el dominio de F ó (usando la convención citada en la sec. 1.2) entenderemos que el dominio es el subconjunto, D , de los números reales, que tiene la propiedad de que $a \in D$, si y sólo si existe un número real, b , tal que $(a, b) \in F$.

Ejemplo 1. Considérese la función

$$F = \{(x, y) \mid y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}\},$$

que es la función F dada por

$$F(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Observemos que la expresión $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ no es real si x se sustituye por 2 ; por tanto no hay valor de $F(x)$, en 2 , y de ahí $2 \notin (\text{dominio de } F)$. Sin embargo, la expresión $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ es un número real, cuando x se sustituye por cualquier real diferente de 2 ; si $a \in \text{Re}$, y $a \neq 2$, hay un valor de $F(x)$ en a , que es $F(a) = \frac{a^2 - 4}{a - 2}$; y por tanto,

$$\text{el dominio de } F = \{x \mid x \in \text{Re y } x \neq 2\}$$

En este ejemplo el símbolo $F(2)$ no tiene significado, o como se dice comúnmente, $F(2)$ no está definido.

Ejemplo 2. Considérese la función F_1 , definida por la ecuación

$$F_1(x) = 2x^2 - 3x + 4.$$

Puesto que la expresión $2x^2 - 3x + 4$ tiene un valor cuando x se substituye por cualquier número real, el dominio de F_1 es el conjunto de los números reales. Ante la función F_1 , corresponde a cada número real a , el real

$$F_1(a) = 2a^2 - 3a + 4.$$

En particular,

$$\begin{aligned} F_1(0) &= 2(0)^2 - 3(0) + 4 = 4; \\ F_1(3) &= 2(3)^2 - 3(3) + 4 = 13; \\ F_1(2a) &= 2(2a)^2 - 3(2a) + 4 = 8a^2 - 6a + 4; \\ F_1\left(\frac{b}{2}\right) &= 2\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{b}{2}\right) + 4 = \frac{b^2}{2} - \frac{3b}{2} + 4. \end{aligned}$$

Ejemplo 3. Consideremos la función F_2 definida por

$$F_2(x) = 2x^2 - 3x + 4, \quad -3 < x \leq 5.$$

Aquí el dominio está dado explícitamente como el intervalo $(-3; 5]$. Por tanto,

$$F_2(a) = 2a^2 - 3a + 4 \quad \text{si } a \in (-3; 5];$$

sin embargo, para $b \notin (-3; 5]$, $F(b)$ no está definido.

Nótese que aunque la expresión para $F_1(x)$ en el ejemplo 2 y la expresión para $F_2(x)$ en este ejemplo, son la misma, las funciones F_1 y F_2 , no son la misma función.

Ejemplo 4. Sea G la función dada por

$$G(x) = x \quad \text{donde } -1 \leq x \leq 2.$$

Aquí, el dominio de G está dado por el intervalo $[-1; 2]$, y puesto que ante la función G , la correspondiente de x es igual a x , podemos decir que el rango de G es el intervalo $[-1; 2]$. La gráfica de G , aparece en la Fig. 1.2.

Ejemplo 5. Sea H la función especificada por:

$$H(x) = \sqrt{x-2}.$$

La gráfica de H es la gráfica de $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x-2}\}$, y se muestra en la Fig. 1.17. La gráfica consiste de los puntos de la parábola con ecuación $y^2 = x - 2$ cuyas segundas coordenadas sean no-negativas. Aquí,

el dominio de $H = [2; +\infty)$ y el rango de $H = [0; +\infty)$.

Por tanto, para cualquier número real a , que sea mayor o igual a 2, existe $H(a)$. En particular,

$$H(3) = \sqrt{3-2} = 1, \quad H(6) = \sqrt{6-2} = 2;$$

$$H(w) = \sqrt{w-2} \quad \text{si } w \in [2; +\infty);$$

$$H(2h) = \sqrt{2h-2} = \sqrt{2}\sqrt{h-1} \quad \text{si } 2h \in [2; +\infty), \text{ o } h \in [1; +\infty).$$

En el ejemplo 3, señalamos que las dos funciones F_1 y F_2 no eran la misma, aunque la expresión para $F_1(x)$ y $F_2(x)$ fuera igual. Puesto que las funciones son conjuntos, dos funciones son iguales si y sólo si tienen los mismos pares ordenados como elementos. Por esto dos funciones F y G , son funciones iguales si y sólo si

(i) dominio de $F =$ dominio de G ;

(ii) para cada x en el dominio de F , $F(x) = G(x)$.

Por ejemplo, las funciones

$$F = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \right\} \quad \text{y} \quad G = \{(x, y) \mid y = x + 2, x \neq 2\}$$

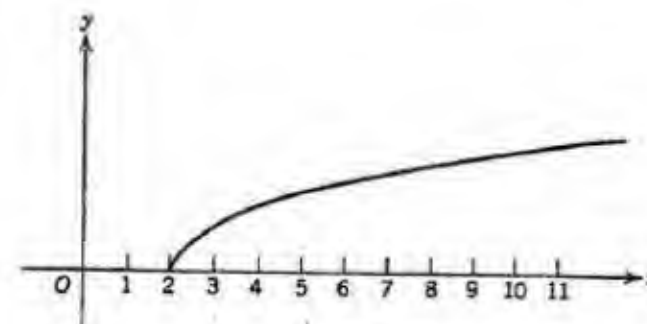


Fig. 1.17 $H = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x-2}\}$

son iguales, porque el dominio de F (véase el ejemplo 1) y el de G , son cada uno el conjunto de todos los reales, excepto 2, y dentro de este dominio

$$F(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2 = G(x).$$

Cuando consideramos una función dada por una fórmula para $F(x)$, a veces deseamos encontrar una expresión para $F(x+h)$, siendo x y $x+h$, elementos del dominio de F . Puesto que $F(x+h)$ representa la segunda componente del par ordenado que está en F y cuya primera componente es $x+h$, obtenemos una expresión para $F(x+h)$, usando simplemente la fórmula dada para $F(x)$ y reemplazando x , por $x+h$. Para ilustrarlo: si F está dada por la fórmula

$$F(x) = 2x^2 - 3x + 4, \quad (5)$$

entonces

$$\begin{aligned} F(x+h) &= 2(x+h)^2 - 3(x+h) + 4 \\ &= 2x^2 + 4xh + 2h^2 - 3x - 3h + 4. \end{aligned}$$

Frecuentemente para una función dada F , deseamos expresar el cociente

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}, \quad h \neq 0$$

de modo tal que h aparezca explícitamente como factor del numerador; si hacemos esto, podemos dividir numerador y denominador entre h , para obtener lo que llamamos la forma más simple del cociente. Por ejemplo, para $F(x)$ tal como fue dada en (5), tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{(2x^2 + 4xh + 2h^2 - 3x - 3h + 4) - (2x^2 - 3x + 4)}{h} \\ &= (4x - 3 + 2h) \frac{h}{h} = 4x - 3 + 2h, \quad h \neq 0. \end{aligned}$$

Es interesante notar en este ejemplo, que $F(x+h) \neq F(x) + F(h)$.

Ejemplo 6. Sea G la función dada por $G(x) = 5^x$.

(a) Halle $G(0)$, $G(-2)$, $G(2)$, $G(x+h)$.

(b) Expresa $\frac{G(x+h) - G(x)}{h}$ en términos de x y de h , donde $h \neq 0$.

(c) Demuestre que $G(a) \cdot G(b) = G(a+b)$.

Solución. (a) $G(0) = 5^0 = 1$; $G(-2) = 5^{-2} = 1/5^2 = 1/25$, $G(2) = 5^2 = 25$; $G(x+h) = 5^{x+h}$.

$$(b) \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \frac{5^{x+h} - 5^x}{h} = \frac{5^x(5^h - 1)}{h};$$

$$(c) G(a) \cdot G(b) = 5^a \cdot 5^b = 5^{a+b}, \text{ y } G(a+b) = 5^{a+b}.$$

Ejemplo 7. Para la función F dada por $F(x) = \sqrt{x}$ exprese

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}, \quad h \neq 0$$

en la forma más simple

$$\begin{aligned} \text{Solución. } \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{(x+h) - (x)}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}, \quad h \neq 0. \end{aligned}$$

En matemáticas, frecuentemente se hace referencia a la gráfica de una ecuación de la forma $y = F(x)$. La **gráfica de una ecuación** $y = F(x)$ es la gráfica de la función $F = \{(x, y) \mid y = F(x)\}$.

Una variable cuyo universo sea el dominio de una función F dada, se llama **variable independiente**, y una variable cuyo universo sea el rango de F , es llamada **variable dependiente**. Por ejemplo en

$$F = \{(x, y) \mid y = x^2\}$$

x es la variable independiente y y es la dependiente. En

$$G = \{(t, u) \mid u = \sin t\},$$

t es la variable independiente y u es la variable dependiente.

Observemos que las letras usadas para representar las variables independientes o dependientes, o independiente y dependiente, pueden reemplazarse por otras letras sin cambiar la función. Por ejemplo, si

$$F = \{(x, y) \mid y = x^2\}, \text{ y } G = \{(x, u) \mid u = x^2\},$$

entonces $F = G$, porque claramente F y G constan de los mismos pares ordenados de números reales.

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 10, diga si la relación dada es una función o no y dé una razón para su respuesta. En cada ejercicio dé el dominio y rango de la función o la relación no funcional. Grafique cada relación.

1. $\{(x, y) \mid y^2 = 25\}$.

2. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 16\}$.

3. $\{(x, y) \mid y = 4x - 5\}$.

4. $\{(x, y) \mid y = \sqrt{8-x}\}$.

5. $\{(x, y) \mid y = 6/x\}$.

6. $\{(u, v) \mid u = \sqrt{8-v}\}$.

7. $\{(z, w) \mid z = w^2\}$.

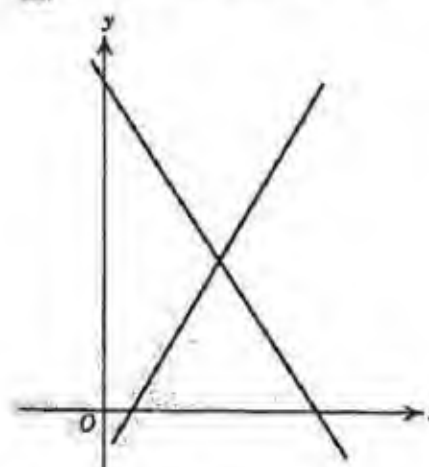
8. $\{(t, s) \mid s = \sqrt{1+t^2}\}$.

9. $\{(x, y) \mid y^2 = 9x^2\}$.

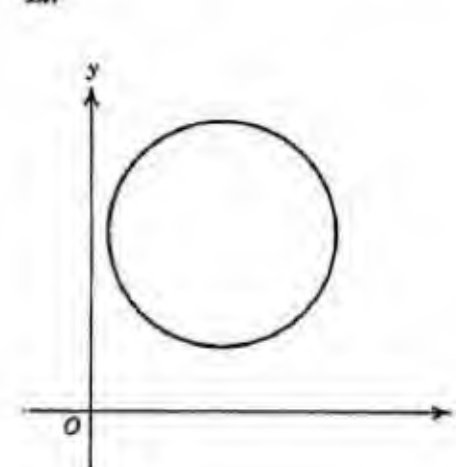
10. $\{(w, y) \mid y = \sqrt{-w}\}$.

La gráfica de cada ejercicio del 11 al 14, es la gráfica de una relación en \mathbb{R} . En cada caso, diga si la relación es una función o una relación no funcional y dé una razón para la respuesta.

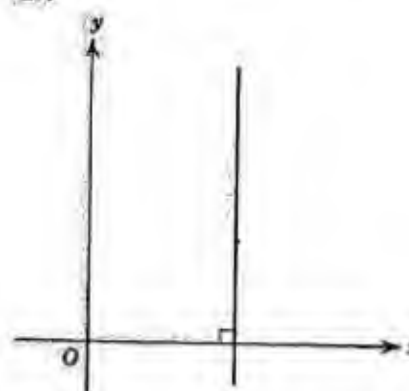
11.



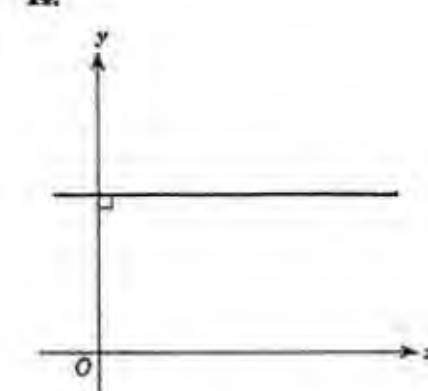
12.



13.



14.



15. En la tabla 1.1 (Sec. 1.2), listamos 12 relaciones. Hemos discutido dos de ellas, R_6 y R_{14} , y señalando que R_6 es una función y que R_{14} no lo es. Clasifique como función o como relación no funcional cada una de las otras diez relaciones de dicha tabla, y dé razones para la clasificación.

16. Casi-al comienzo de la Sec. 1.2 están listadas cuatro relaciones, R_1 , R_2 , R_3 y R_4 , en $U = \{1, 2, 3\}$. Grafique cada relación, diciendo si es función o relación no funcional y dé razones para las respuestas.

En cada uno de los ejercicios del 17 al 20, dé el dominio y el rango de la función especificada. Grafique la función en el plano coordenado xy , haciendo $y = F(x)$.

17. $F(x) = 4 - x^2$.

18. $F(x) = \sqrt{3 - x}$.

19. $F(x) = \frac{2}{3} \sqrt{x^2 - 16}$.

20. $F(x) = 3$.

21. Si F es la función dada por $F(x) = 2x^n$ halle

(a) $F(-2)$, $F(-1)$, $F(0)$, $F(1)$, $F(2)$,

(b) $F(x_1)$, $F(x_2)$, $F(x_2 - x_1)$, $F(x_2) - F(x_1)$,

(c) $\frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1}$ en la forma más simple, donde $x_2 \neq x_1$.

$\frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1}$ en la forma más simple, donde $x_2 \neq x_1$.

22. Si G es la función dada por $G(x) = ax + b$, halle $G(x + h)$. Halle también $\frac{G(x + h) - G(x)}{h}$ en la forma más simple; donde $h \neq 0$.

23. Si $F(x) = ax^2 + bx + c$, halle $\frac{F(x + h) - F(x)}{h}$ en la forma más simple, donde $h \neq 0$.

24. Si $U(x) = ax^3$, halle $\frac{U(x + h) - U(x)}{h}$ en la forma más simple, donde $h \neq 0$.

Para cada uno de los ejercicios del 25 al 28, dé una fórmula para la correspondiente indicada ante la función descrita

25. La función F , ante la cual $F(e)$ es el volumen de un cubo de lado e .

26. La función G , ante la cual $G(v)$ es la arista de un cubo de volumen v .

27. La función V , ante la cual $V(r)$ es el volumen de una esfera de radio r .

28. La función V , ante la cual $V(x)$ es el volumen de una caja cuya descripción es la siguiente: la caja (sin tapa) se construye a partir de una pieza rectangular de metal, de 12 por 15 cms., recortando cuadrados iguales, de lado x , de cada esquina de la pieza, y doblando hacia arriba el metal para formar los lados de la caja.

29. Sea I_n el conjunto de todos los enteros y sea Re , el de todos los reales. Considere las funciones

$$F = \{(x, y) \in I_n \times I_n \mid F(x) = x^2 \text{ y } -3 \leq x \leq 4\}.$$

$$G = \{(x, y) \in Re \times Re \mid G(x) = x^2 \text{ y } -3 \leq x \leq 4\}.$$

Grafique las funciones F y G y dé el dominio y el rango de cada función.

30. Dada la función $F = \{(r, s) \mid s = r^2 + 3\}$, use letras distintas de r y s , para dar la misma función.

1.4 Algunas funciones especiales. La función F dada por la ecuación $F(x) = ax + b$ es la **función general de primer grado**,

$$F = \{(x, y) \mid y = ax + b\},$$

donde a y b son constantes y $a \neq 0$.

Un caso especial de la función general de primer grado es la **función identidad**

$$I = \{(x, y) \mid y = x\},$$

para lo cual $I(x) = x$.

La función F , dada por la ecuación $F(x) = ax^2 + bx + c$ es la **función general de segundo grado**,

$$F = \{(x, y) \mid y = ax^2 + bx + c\},$$

donde a , b , y c son constantes y $a \neq 0$.

Un caso especial de la función general de segundo grado, es la **función simple de segundo grado**,

$$I^2 = \{(x, y) \mid y = x^2\},$$

para la cual $I^2(x) = x^2$. La gráfica de I^2 está dada en la Fig. 1.15, y el dominio

$$\text{de } I^2 = Re, \text{ y el rango de } I^2 = [0; +\infty).$$

Recuérdese que una expresión de la forma

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

donde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ y a_n , son constantes reales, n es un entero no negativo, y $a_0 \neq 0$, es un **polinomio en x , de grado n** .

Si

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

es un polinomio de grado n , la función

$$F = \{(x, y) \mid y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n\}$$

es una **función polinomial de grado n** y

$$F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n.$$

Una **función polinomial** es de grado n , o es la **función cero**, $\{(x, y) \mid y = 0\}$. Si el dominio de una función polinomial F , no está dado en forma explícita, se considerará como el conjunto de los números reales Re . El rango de F será un subconjunto de Re .

Las funciones de primero y segundo grados, son casos especiales de funciones polinomiales. Otra función polinomial especial es la **función constante general**,

$$C = \{(x, y) \mid y = c\},$$

para lo cual $C(x) = c$, siendo c un número real. Ante la función constante C , todos los elementos del conjunto de los números reales corresponden al número real c , y

$$\text{el dominio de } C = (-\infty; +\infty), \quad \text{rango de } C = \{c\}.$$

La gráfica de C es una recta paralela al eje x y a c unidades de él. A veces resulta conveniente denotar la función constante mediante \bar{c} , esto es,

$$\bar{c} = \{(x, y) \mid y = c\}.$$

Por ejemplo

$$\overline{7} = \{(x, y) \mid y = 7\}, \quad \overline{-2} = \{(x, y) \mid y = -2\}.$$

Hay otras varias funciones polinomiales especiales, de las cuales sólo mencionaremos dos.

La **función simple de tercer grado** es:

$$I^3 = \{(x, y) \mid y = x^3\},$$

para la cual $I^3(x) = x^3$. La gráfica de I^3 está dada en la Fig. 1.18 y el dominio

$$\text{de } I^3 = (-\infty; +\infty), \quad \text{rango de } I^3 = (-\infty; +\infty).$$

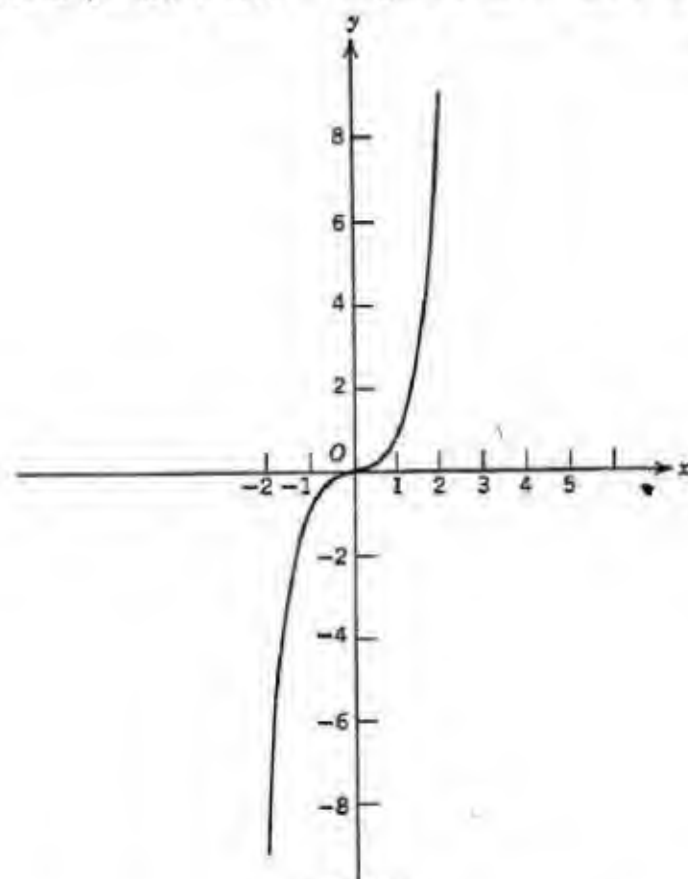


Fig. 1.18

La **función simple de grado n** , siendo n un entero positivo, es

$$I^n = \{(x, y) \mid y = x^n\},$$

siendo $I^n(x) = x^n$. Si n es par, I^n tiene una gráfica semejante a la de I^2 y tiene el mismo dominio y el mismo rango que I^2 . Si n es impar, I^n tiene una gráfica similar a la de I^3 , y tiene el mismo dominio y el mismo rango que I^3 .

Si U y V son funciones polinomiales, la función F , dada por

$$F(x) = \frac{U(x)}{V(x)}$$

es una **función racional**. Como ejemplo, la función G dada por

$$G(x) = \frac{x^3(x-1)}{x^2-4}$$

es una función racional. El dominio de G es el conjunto de todos los reales, excluyendo al 2 y al -2, ya que $G(2)$ y $G(-2)$ no existen, y $G(a)$ existe para cualquier número real a , distinto de 2 y de -2.

Una función F , para la cual se puede obtener una fórmula para $F(x)$, expresada mediante un número finito de operaciones de suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces para x y constantes, es una **función algebraica simple**. Las funciones dadas por las igualdades siguientes son ejemplos de funciones algebraicas simples:

$$F_1(x) = 2x^2 - 4x + 7, \quad F_2(x) = \frac{2x-3}{x+4}, \quad F_3(x) = \left(\frac{x+3}{2x+5}\right)^{2/3},$$

$$F_4(x) = \left(\frac{x+2}{x-3} + \sqrt{x+5}\right)^{1/3}.$$

Las funciones algebraicas simples, incluyen a las funciones racionales como casos especiales.

Sea S_{ny} la proposición

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \dots + P_{n-1}(x)y + P_n(x) = 0,$$

en la cual $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n$ son funciones polinomiales y n es un entero positivo. Entonces, si la relación

$$\{(x, y) \mid S_{ny}, x \in X, y \in Y\}$$

es una función, será una **función algebraica**. Por ejemplo, la relación

$$\{(x, y) \mid xy^2 - 1 = 0, x \in [1; 9], y \in [\frac{1}{3}; 1]\}$$

es una función algebraica.

Toda función polinomial es una función racional, y toda función racional es una función algebraica. Sin embargo, existen funciones no algebraicas, tales como la función seno

$$\text{Sen} = \{(x, y) \mid y = \text{sen } x\}.$$

Las funciones no algebraicas se llaman, a veces, **funciones trascendentales**.

Recuérdese que $|a|$ se lee "valor absoluto de a " y que está definido de la manera siguiente:

$$|a| = a, \text{ si } a \geq 0; \quad |a| = -a, \text{ si } a < 0.$$

La función F expresada por

$$F(x) = |x|$$

es la **función valor absoluto**. Los elementos del conjunto F son pares ordenados de la forma $(x, |x|)$. La gráfica de F está dada en la Fig. 1.3 (Sec. 1.2). Puesto que $F(x) \geq 0$, para $x \in \text{Re}$,

$$\text{el dominio de } F = (-\infty, +\infty), \quad \text{rango de } F = [0; +\infty).$$

Una función cuya gráfica consiste de un segmento de recta o de la unión de segmentos de recta, es llamada **función seccionalmente lineal**. Por ejemplo, sea la función dada por

$$F(x) = \begin{cases} -2, & \text{si } -4 \leq x < -2; \\ x, & \text{si } -2 \leq x \leq 4; \\ 4, & \text{si } 4 < x < 6; \end{cases}$$

que es una función seccionalmente lineal. La gráfica de F aparece en la figura 1.19. En ella

el dominio de $F = [-4; 6)$, el rango de $F = [-2; 4]$.

Sea $[a]$, el mayor entero que es menor o igual que a , para toda a real.

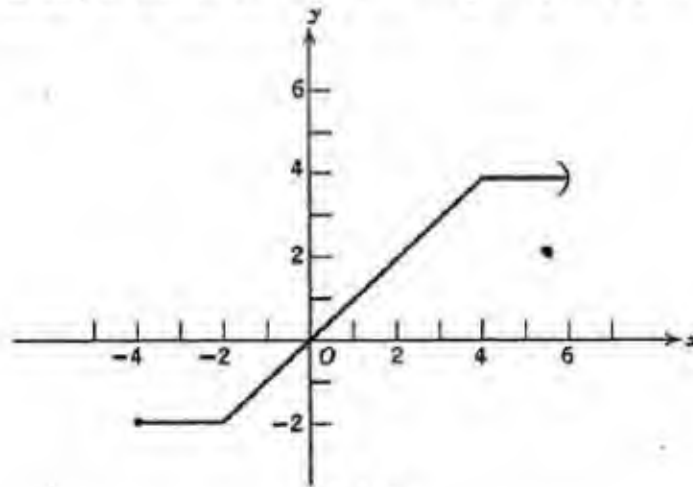


Fig. 1.19

Como ejemplo, $[-3] = -3$, $[-\frac{3}{2}] = -2$, $[2.3] = 2$. La función F , dada por

$$F(x) = [x]$$

es la **función entero mayor**. En virtud de la definición del símbolo $[a]$, podemos especificar F , mediante

$$F(x) = n \quad \text{para } n \leq x < n+1, \quad \text{siendo } n \text{ entero.}$$

Para obtener una base, con objeto de poder graficar F , especificaremos F para algunos intervalos de longitud unitaria, a cada lado del origen:

$$F(x) = [x] = \begin{cases} -3, & \text{para } -3 \leq x < -2 \\ -2, & \text{para } -2 \leq x < -1 \\ -1, & \text{para } -1 \leq x < 0 \\ 0, & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{para } 1 \leq x < 2 \\ 2, & \text{para } 2 \leq x < 3 \\ 3, & \text{para } 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

En la Fig. 1.20 se muestra la porción de la gráfica de F comprendida entre $-3 \leq x < 4$. Obsérvese que está formada por un conjunto de segmentos de

recta, cada uno de longitud unitaria y que en cada segmento está incluido el punto extremo de la izquierda y se excluye el de la derecha.

En la especificación $F(x) = [x]$, dada a F , siempre que x es reemplazada por

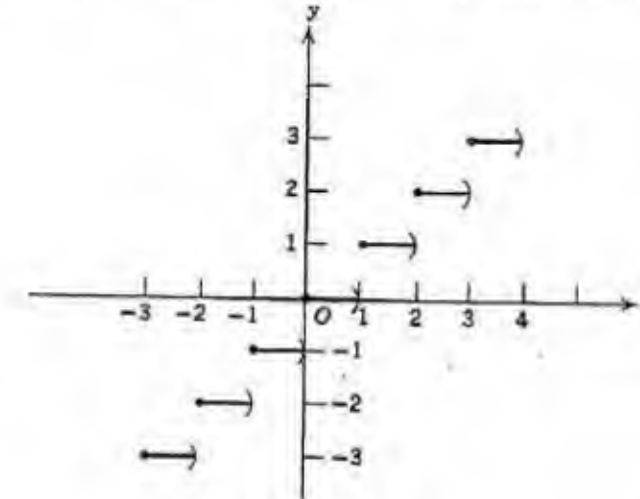


Fig. 1.20

cualquier real, $F(x)$ es un entero. Por esto, el dominio de F es Re y el rango de F es el conjunto de los enteros.

La función

$$I^{1/2} = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x}\}$$

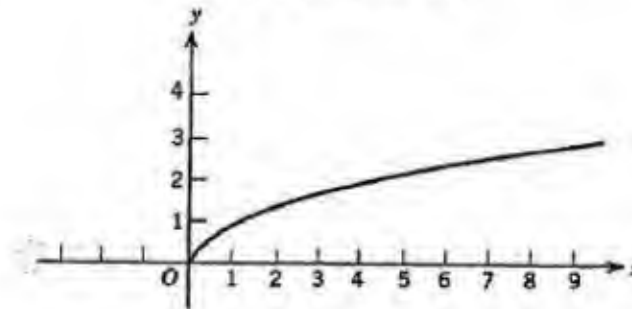


Fig. 1.21

para la cual $I^{1/2}(x) = \sqrt{x}$ es la **función raíz cuadrada simple**. La gráfica de $I^{1/2}$ consiste en los puntos de la parábola de ecuación $y^2 = x$, cuyas segundas coordenadas sean no negativas. Véase la Fig. 1.21, que nos muestra que

el dominio de $I^{1/2} = [0; +\infty)$, el rango de $I^{1/2} = [0; +\infty)$.

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 8, grafique la función dada y señale su dominio y su rango.

1. $F(x) = -|x|$.
3. $F(x) = |\sin x|$.

2. $F(x) = |x - 3| - 2$.
4. $F(x) = [x] + 4$.

$$5. f(x) = \frac{2x-2}{x-1}.$$

$$6. f(x) = \frac{x}{|x|}.$$

$$7. f(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ 3, & \text{para } 1 \leq x < 2 \\ 2, & \text{para } 2 \leq x < 3 \\ 0, & \text{para } 3 \leq x < 4. \end{cases}$$

$$8. f(x) = \begin{cases} x, & \text{para } x < -2.5 \\ \sqrt{4-x^2}, & \text{para } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2, & \text{para } 3 < x < 4. \end{cases}$$

9. Dé los valores de cada una de las siguientes expresiones:

- | | |
|----------------------|---|
| (a) $\sqrt{16}$ | (b) $\sqrt[3]{-5}$ |
| (c) $[-1.5]$ | (d) $[5/3]$ |
| (e) $\sqrt{[9.5]}$ | (f) $\sqrt{(-3)^2} + \sqrt{[4.2]}$ |
| (g) $ \cos(2\pi/3) $ | (h) $\sqrt{-\frac{1}{2}[\cos(4\pi/3)]}$ |

Grafique la función dada en cada uno de los ejercicios del 10 al 13.

$$10. \{(x, x^2)\}. \quad 11. \{(x, \cos x)\}.$$

$$12. \{(x, \frac{1}{2}|x|)\}. \quad 13. \{(x, x - [x])\}.$$

14. ¿Cuáles son el dominio y el rango de la función dada en el ejercicio 13?

15. (a) Señale las diferencias entre el símbolo 4 y el símbolo $\bar{4}$.

(b) Grafique la función $\bar{4}$.

(c) Grafique la función $\bar{7}$.

1.5 El álgebra de las funciones. Sean U y V dos funciones para las cuales las correspondientes de x sean $U(x)$ y $V(x)$, respectivamente. Denotemos los correspondientes dominios de U y de V , por D_U y D_V . Definimos entonces las cuatro funciones expresadas por $U+V$, $U-V$, $U \cdot V$ y U/V , de la manera siguiente (donde $D_U \cap D_V \neq \emptyset$):

$$U+V = \{(x, y) \mid y = U(x) + V(x), x \in (D_U \cap D_V)\},$$

$$U-V = \{(x, y) \mid y = U(x) - V(x), x \in (D_U \cap D_V)\},$$

$$U \cdot V = \{(x, y) \mid y = U(x) \cdot V(x), x \in (D_U \cap D_V)\},$$

$$\frac{U}{V} = \{(x, y) \mid y = \frac{U(x)}{V(x)}, x \in (D_U \cap D_V) \text{ y } V(x) \neq 0\}.$$

Estas funciones se llaman, respectivamente, la **suma** de U y V , la **diferencia** de U y V , el **producto** de U y V y el **cociente** de U y V . Nótese que el dominio para cada una de las primeras tres funciones es $D_U \cap D_V$, pero que el dominio del cociente de U entre V es $D_U \cap D_V$ menos los elementos de D_V para los cuales $V(x) = 0$.

Ejemplo 1. Hállese $U+V$, $U-V$, $U \cdot V$ y U/V donde

$$U = \{(4, 3), (5, 6), (0, 5), (3, 2), (8, 11)\}$$

$$V = \{(5, -4), (0, 6), (3, 3), (8, 9), (7, 10)\}.$$

y

Solución. Obviamente no existe un número $a \in D_V$, tal que $V(a) = 0$. Por tanto, el dominio de cada una de las funciones que deseamos determinar es $D_U \cap D_V = \{5, 0, 3, 8\}$, y usando las definiciones dadas para estas funciones, tenemos:

$$U+V = \{(5, 2), (0, 11), (3, 5), (8, 20)\};$$

$$U-V = \{(5, 10), (0, -1), (3, -1), (8, 2)\};$$

$$U \cdot V = \{(5, -24), (0, 30), (3, 6), (8, 99)\};$$

$$U/V = \{(5, -\frac{24}{5}), (0, \frac{11}{6}), (3, \frac{5}{3}), (8, \frac{11}{9})\}.$$

Ejemplo 2. Dadas las funciones U y V tales que

$$U(x) = x^2 \text{ y } V(x) = 4x^3$$

halle las ecuaciones para las funciones $U+V$, $U-V$, $U \cdot V$ y U/V . Dé el dominio de cada función.

Solución. Para $U+V$ la correspondiente de x es $U(x) + V(x) = x^2 + 4x^3$.

Para $U-V$, es $U(x) - V(x) = x^2 - 4x^3$.

Para $U \cdot V$, es $U(x) \cdot V(x) = 4x^5$.

Para U/V , finalmente, la correspondiente de x es $U(x)/V(x) = 1/4x$.

El dominio de U y V es \mathbb{R} . Puesto que $\mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$, el dominio de $U+V$, $U-V$, y $U \cdot V$, es igualmente \mathbb{R} . Como el único valor de x tal que $V(x) = 0$, es 0, entonces el dominio de U/V es \mathbb{R} , excepto 0.

Ejemplo 3. Si las funciones U y V están dadas por

$$U(x) = \sqrt{4-x^2} \text{ y } V(x) = \frac{2}{x},$$

encuentre las ecuaciones para $U+V$ y U/V , dando además los dominios de $U+V$ y U/V .

Solución. Aquí el dominio de $U = [-2; 2]$, y el dominio de $V = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, y

$$U(x) + V(x) = \sqrt{4-x^2} + 2/x, \quad D_{U+V} = [-2; 0) \cup (0; 2].$$

$$\frac{U(x)}{V(x)} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2/x} = \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}; \quad D_{U/V} = [-2; 0) \cup (0; 2];$$

Recuérdese que, como vimos en la Sec. 1.4, para cualquier constante c , la función c está definida por $\bar{c} = \{(x, y) \mid y = c\}$. Entonces, para cualquier función $V = \{(x, y) \mid y = V(x)\}$, se sigue que

$$\bar{c} + V = \{(x, y) \mid y = c + V(x)\},$$

$$\bar{c} - V = \{(x, y) \mid y = c - V(x)\},$$

$$\bar{c} \cdot V = \{(x, y) \mid y = c \cdot V(x)\},$$

$$\frac{\bar{c}}{V} = \{(x, y) \mid y = \frac{c}{V(x)}; V(x) \neq 0\}.$$

Como frecuentemente trataremos de funciones de la forma $\bar{c} + V$, $\bar{c} - V$, $\bar{c} \cdot V$ y \bar{c}/V , donde $V \neq \bar{0}$, seguiremos la convención de escribir:

$$c + V \text{ en vez de } \bar{c} + V, \quad c - V \text{ en vez de } \bar{c} - V,$$

$$cV \text{ en vez de } \bar{c} \cdot V \text{ y } c/V \text{ en vez de } \bar{c}/V.$$

En realidad este convenio indica que usaremos el símbolo c para representar tanto al número real c , como a la función constante \bar{c} . El significado que se deba dar a c , se verá claramente del contexto; por ejemplo: cuando c se presente en una suma, diferencia, producto o cociente con V , c representará a la función constante \bar{c} .

Un caso especial de cV es $(-1)V$, que usualmente representaremos por $-V$.

De acuerdo con el convenio establecido, escribiremos $7 + 4I^2$ para designar la función $\{(x, y) \mid y = 7 + 4x^2\}$. O sea que, en la expresión $7 + 4I^2$ (donde I^2 representa la función $\{(x, y) \mid y = x^2\}$), los símbolos 7 y 4 , representan funciones constantes, aunque en la ecuación $y = 7 + 4x^2$, los símbolos 7 y 4 representan números reales. De modo semejante

$$\frac{3I^4 + 2}{I - 1} = \{(x, y) \mid y = \frac{3x^4 + 2}{x - 1}\},$$

$$y \ 5 + \text{Sen} = \{(x, y) \mid y = 5 + \text{sen } x\}.$$

Ejercicios

En cada uno de los ejercicios 1-8, se dan dos funciones, U y V . Halle las ecuaciones para las funciones $U + V$, $U - V$, $U \cdot V$ y U/V , dando además el dominio de U , V , $U + V$, $U - V$, $U \cdot V$ y U/V .

- $U(x) = \sqrt{x-2}$; $V(x) = \sqrt{x+3}$.
- $U(x) = \sqrt{9-x^2}$; $V(x) = x, x \geq 0$.
- $U(x) = \sqrt{9-x^2}$; $V(x) = \sqrt{x^2-1}$.
- $U(x) = \sqrt{16-x^2}$; $V(x) = \sqrt{x^2-9}$.
- $U(x) = 2x, 0 \leq x \leq 3$; $V(x) = x^2, 1 \leq x \leq 3$.
- $U(x) = x^2$; $V(x) = 1/x$.
- $U(x) = \sqrt{9-x^2}$; $V(x) = \text{sen } x$.
- $U(x) = \sqrt{9-\text{sen}^2 x}$; $V(x) = x$.
- Halle $U + V$, $U - V$, $U \cdot V$, y U/V siendo

- $U = \{(2, 4), (3, 9), (4, 6), (5, 7)\}$,
 $V = \{(2, 2), (3, 3), (4, 2), (5, 0)\}$;
- $U = \{(-1, 0), (3, 9), (4, 6), (7, 10)\}$,
 $V = \{(0, 3), (3, 3), (4, 2), (8, 11)\}$.

10. (a) Encuentre $V - U$ para las U y V dadas en el ejercicio 9(a). ¿Es $V - U = U - V$?

(b) Para las mismas U y V , dadas en el ejercicio 9(a), calcúlese V/U . ¿Es $V/U = U/V$?

11. Recuerde que la función constante $\bar{7}$ y la función identidad I , pueden expresarse mediante:

$$\bar{7} = \{(x, y) \mid y = 7\} \quad \text{e} \quad I = \{(x, y) \mid y = x\}.$$

respectivamente. Entonces, $\bar{7} + I$, o simplemente $7 + I$, puede expresarse como:

$$7 + I = \{(x, y) \mid y = 7 + x\}.$$

Dé expresiones semejantes para las funciones:

- $4 + I, 4 - I, 4I$ y $4/I$,
- $7I - 4$ y $7I + 4$.

12. Recuerde que para la función identidad $I, I(x) = x$. Podemos construir otras funciones aplicando a I las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. Note que en particular

$$I \cdot I = I^2 = \{(x, y) \mid y = x \cdot x\} = \{(x, y) \mid y = x^2\}$$

$$\text{e} \quad I^n = \{(x, y) \mid y = x^n\}.$$

Estos resultados indican por qué ya habíamos encontrado conveniente expresar $\{(x, x^2)\}$ mediante I^2 , y $\{(x, x^n)\}$ mediante I^n , siendo n un entero.

Note también que $c \cdot I$, o simplemente cI^n , está dado por

$$cI^n = \{(x, y) \mid y = cx^n\}.$$

Dé expresiones semejantes para cada una de las funciones siguientes:

- $7I^2$
- $4I^2 - 3I + 6$
- $(2 + I)I^2$
- $\frac{2I^2 + 3}{I - 3}$

13. Demuestre que la función general de primer grado, F dada por

$$F(x) = ax + b,$$

donde a y b son constantes, puede expresarse en la forma

$$F = \bar{a} \cdot I + \bar{b} = aI + b.$$

Como consecuencia de este resultado, a veces se designa por $aI + b$, a la función general de primer grado.

14. Demuestre que la función general de segundo grado F , dada por

$$F(x) = ax^2 + bx + c,$$

donde a, b y c son constantes, se puede expresar en la forma

$$F = \bar{a} \cdot I^2 + \bar{b} \cdot I + \bar{c} = aI^2 + bI + c.$$

Como consecuencia de este resultado, la función general del segundo grado se designa a veces por $aI^2 + bI + c$. En forma semejante, a una función polinomial de grado n se le designa, en ocasiones, por

$$a_n I^n + a_{n-1} I^{n-1} + \cdots + a_{n-2} I^2 + a_{n-1} I + a_n, \quad a_n \neq 0.$$

Si $U = 3I + 4$, y $V = I^2 - 2$, entonces $U + V = I^2 + 3I + 2$; y en consecuencia, la correspondiente de x ante $U + V$ es:

$$U(x) + V(x) = x^2 + 3x + 2.$$

En cada uno de los ejercicios 15-18 dé una expresión semejante para $U + V$, $U - V$, $U \cdot V$ y U/V , y una fórmula para la correspondiente de x ante cada función. Dé también el dominio de U , V , $U + V$, $U - V$, $U \cdot V$ y U/V .

$$15. \quad U = \bar{3}, V = I^2. \quad 16. \quad U = I^4, V = -I.$$

$$17. \quad U = \frac{I^2 + 2}{I - 1}, V = \frac{I^2 - 8}{I + 1}. \quad 18. \quad U = \text{Sen}, V = I.$$

1.6 Funciones compuestas. Notemos que como consecuencia de las dos ecuaciones

$$y = u^3 \quad \text{y} \quad u = 2x^2 + 1,$$

podemos escribir

$$y = (2x^2 + 1)^3.$$

Más generalmente, si

$$y = U(u) \quad \text{y} \quad u = V(x),$$

entonces

$$y = U[V(x)].$$

Las últimas tres ecuaciones especifican, respectivamente, las funciones

$$U = \{(u, y) \mid y = U(u)\}, \quad V = \{(x, u) \mid u = V(x)\},$$

y

$$F = \{(x, y) \mid y = U[V(x)]\}.$$

La función F para la cual

$$F(x) = U[V(x)]$$

es la **compuesta** de U con V ; llamamos a F **función compuesta** y la denotamos mediante

$$F = U[V].$$

Los símbolos $U[V(x)]$ denotan la correspondiente de x ante la composición de U con V y se leen " U de V de x ".

Por ejemplo, supóngase que

$$U = \{(u, y) \mid y = u^3\} \quad \text{y} \quad V = \{(x, u) \mid u = 2x^2 + 1\},$$

para las cuales

$$U(u) = u^3 \quad \text{y} \quad V(x) = 2x^2 + 1.$$

Entonces la compuesta de U con V es la función

$$F = U[V] = \{(x, y) \mid y = U[V(x)]\} = \{(x, y) \mid y = (2x^2 + 1)^3\},$$

para la cual

$$F(x) = (2x^2 + 1)^3.$$

El dominio de $U[V]$ está formado por todas las $x \in D_V$, tales que $V(x) \in D_U$. Esto es

$$\text{dominio de } U[V] = \{x \mid x \in D_V \text{ y } V(x) \in D_U\}.$$

En consecuencia, el dominio de $U[V]$ es un subconjunto del dominio de V .

Ejemplo 1. Calculemos $F = U[V]$, siendo

$$(a) \quad U = \{(0, 5), (8, 1), (2, 9)\}, \quad V = \{(2, 0), (3, 8), (4, 8), (6, 2), (5, 0)\};$$

$$(b) \quad U = \{(1, 7), (5, 4), (3, 5), (4, 6)\}, \quad V = \{(0, -3), (3, 5), (4, 1)\}.$$

Solución (a). Puesto que

$$\text{el dominio de } U[V] = \{x \mid x \in D_V \text{ y } V(x) \in D_U\},$$

seleccionamos los pares ordenados de V cuyas segundas componentes aparezcan entre las primeras de los pares ordenados de U . Para U y V , tal como están dadas en (a), todos los pares ordenados de V tienen dicha propiedad. Por tanto, el dominio de la compuesta es $\{2, 3, 4, 5, 6\}$. Así pues, tenemos:

$$F = \{(2,), (3,), (4,), (5,), (6,)\},$$

dejando vacías, la segunda componente de los pares ordenados indicados. Ya que para cada $a \in D_V$ sucede que $F(a) = U[V(a)]$, se tiene

$$F(2) = U[V(2)] = U(0) = 5.$$

En igual forma calculamos las restantes segundas componentes y encontramos que

$$F = \{(2, 5), (3, 1), (4, 1), (6, 9), (5, 5)\}.$$

(b). Observamos que en V hay sólo dos pares ordenados cuyas segundas componentes aparezcan como primeras en U , siendo estas $(3, 5)$ y $(4, 1)$. Por esto, el dominio de F es $\{3, 4\}$. Procediendo como en (a), encontramos que

$$F = \{(3, 4), (4, 7)\}.$$

Para dar claridad a la definición de la compuesta de U con V , usamos u para denotar la variable independiente al especificar la función U , y la variable dependiente para la función V ; también usamos x para representar la variable independiente en la especificación de la función V . Obviamente, la definición no depende, en modo alguno, de la selección de los símbolos usados para las variables, y a menudo encontraremos composiciones de funciones en las que el símbolo para la variable independiente es el mismo que se usa en la especificación de ambas funciones, U y V , y asimismo, el símbolo de la variable dependiente es el mismo para las dos funciones.

Por ejemplo, consideremos las funciones:

$$U = \{(x, y) \mid y = x^2 + 3x\} \quad \text{para la cual} \quad U(x) = x^2 + 3x,$$

y

$$V = \{(x, y) \mid y = \frac{x-3}{2}\} \quad \text{para la cual} \quad V(x) = \frac{x-3}{2}.$$

Para la compuesta F , de U con V , sucede que si $x \in D_V$ y $V(x) \in D_U$,

$$F(x) = U[V(x)] = \{V(x)\}^2 + 3V(x) = \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x-3}{2}\right) = \frac{x^2-9}{4}.$$

Esto es

$$F = \{(x, y) \mid y = \frac{x^2-9}{4}\}.$$

Ejemplo 2. Para las funciones U y V dadas por $U(x) = \sqrt{x}$ y $V(x) = 1 - x^2$, escribir la ecuación de la función $F = U[V]$, y el dominio de U , de V y de $U[V]$.

Solución. Para $F = U[V]$, se tiene

$$F(x) = U[V(x)] = \sqrt{V(x)} = \sqrt{1-x^2}.$$

Aquí

el dominio de $U = [0; +\infty)$, el dominio de $V = (-\infty; +\infty)$,

pero

$$\text{el dominio de } U[V] = [-1; 1].$$

Ejemplo 3. Si $U(x) = \sqrt{x}$ y $V(x) = 1 - x^2$ y si el dominio de $V = [2; 3]$, especifique $U[V]$ y dé el dominio U y el de $U[V]$.

Solución. Para $F = U[V]$, tenemos, como en el ejemplo 2,

$$F(x) = U[V(x)] = \sqrt{1-x^2}.$$

En este caso el dominio de $U = [0; +\infty)$, y no existe un número a , en el dominio de V , para el cual $V(a)$ esté en el dominio de U . Por tanto, el dominio de $U[V]$ es el conjunto vacío y en ese caso no existe la compuesta de U con V .

Ejemplo 4. Si

$$U = \{(x, y) \mid y = 2\} \quad \text{y} \quad V = \{(x, y) \mid y = 2x^2 - 5\},$$

especifiquemos (a) $F_1 = U[V]$ y (b) $F_2 = V[U]$.

Solución (a). Para determinar F_1 , recordemos que $F_1(x) = U[V(x)]$ y notamos que si $a \in D_V$, entonces existe $b = V(a) \in D_U$ y que $U[V(a)] = U(b) = 2$. (O sea que si $(a, b) \in V$, entonces $b \in D_U$ y $U(b) = 2$). Por tanto, si $x \in Re$,

$$F_1(x) = 2 \text{ y } U[V] = \bar{2}.$$

(b). Para determinar una expresión para F_2 , ponemos $F_2(x) = V[U(x)]$ y notamos que si $a \in D_U$, entonces $U(a) = 2$, de modo que ciertamente $U(a) \in D_V$ y $V[U(a)] = V(2) = 3$. Por tanto, para toda $x \in Re$

$$F_2(x) = 3 \text{ y } V[U] = \bar{3}.$$

A veces resulta conveniente encontrar la compuesta de dos funciones dadas, de la siguiente manera:

Para encontrar $(4I + 1)[I^2]$, hagamos $U = 4I + 1$, y $V = I^2$. Entonces $U(x) = 4x + 1$ y $V(x) = x^2$. De donde $U[V(x)] = 4x^2 + 1$ y $(4I + 1)[I^2] = 4I^2 + 1$.

De modo semejante para las U y V especificadas tenemos:

$$V[U(x)] = (4x + 1)^2 = 16x^2 + 8x + 1,$$

y así

$$I^2[4I + 1] = 16I^2 + 8I + 1.$$

EJERCICIOS

1. Para las U y V dadas en el ejemplo 1(a) de esta sección, halle $V[U]$. ¿Es $U[V] = V[U]$?

2. Calcule $U[V]$ y $V[U]$, si

(a) $U = \{(6, 9), (9, 12), (4, 7)\}$, $V = \{(3, 6), (5, 9), (8, 4), (7, 6)\}$;

(b) $U = \{(6, 9), (9, 12), (4, 7), (8, 10)\}$,
 $V = \{(3, 6), (5, 9), (8, 4), (7, 6), (10, 5)\}$.

Se dan dos funciones en cada ejercicio del 3 al 6. Encuentre las expresiones correspondientes para las compuestas $U[V]$ y $V[U]$. Dé el dominio de cada una de las funciones U , V , $U[V]$ y $V[U]$, y escriba cuatro pares ordenados que sean elementos de cada función.

3. $U = \{(x, y) \mid y = 4\}$, $V = \{(x, y) \mid y = 4x - 4\}$.

4. $U = \{(x, y) \mid y = x^2\}$, $V = \{(x, y) \mid y = 2x + 3\}$.

5. $U(x) = 7 - 2x$, $V(x) = (7 - x)/2$. 6. $U(x) = x^2$, $V(x) = \sin x$.

En cada uno de los ejercicios del 7 al 10 se dan dos funciones U y V . Dé una expresión para la función compuesta $U[V]$. Dé los dominios de las funciones U , V y $U[V]$.

7. $U(x) = \sqrt{x}$, $V(x) = 1 - x^3$. 8. $U(x) = \sqrt{x}$, $V(x) = 1 - \sin^2 x$.

9. $U(x) = 1/(x - 2)$, $V(x) = \sqrt{x}$. 10. $U(x) = \sqrt{x}$, $V(x) = 1 + x$.

11. Demuestre que $U[I] = U$ y que $I[U] = U$, si U es cualquier función o I es la función identidad $I = \{(x, y) \mid y = x\}$. Como consecuencia de estos resultados decimos que la función identidad I , es *neutral* ante la composición de funciones.

Para cada ejercicio del 12 al 15 encuentre (a) $F = U \cdot V$ y (b) $G = U[V]$.

12. $U = \{(x, 2x)\}$, $V = \{(x, 3x)\}$.

Solución (a). $F(x) = U(x) \cdot V(x) = 2x \cdot 3x = 6x^2$. Así que $F = U \cdot V = \{(x, 6x^2)\}$.

(b). $G(x) = U[V(x)] = 2(3x) = 6x$. Así que $G = U[V] = \{(x, 6x)\}$.

13. $U = \{(x, x + 1)\}$, $V = \{(x, x^2)\}$.

14. $U = \{(x, \sin x)\}$, $V = \{(x, 2x)\}$.

15. $U = \{(x, 2x)\}$, $V = \{(x, \sin x)\}$.

16. Demuestre que la función seno, que es expresada por Sen y está dada por

$$\text{Sen} = \{(x, y) \mid y = \sin x\}$$

$$\text{Sen} = \text{Sen}[I].$$

A causa de este resultado la función seno se llama a veces Sen $[I]$. En forma semejante, la función coseno, expresada por Cos y dada por

$$\text{Cos} = \{(x, y) \mid y = \cos x\},$$

recibe a veces el nombre de Cos $[I]$.

17. Demuestre que el dominio de $C[U] = \text{dominio de } U$, y que $C[U] = C$, siendo U cualquier función y C una función constante.

18. Dadas $U = 3I + 1$ y $V = I^2 + 4$, calcule (a) $U[V]$, (b) $V[U]$.

19. Dadas $U = \bar{2}$ y $V = I^2$, calcule (a) $U[V]$, (b) $V[U]$.

20. Dadas $U = I^2 + 3I + 2$ y $V = \text{Sen}$, calcule (a) $U[V]$, (b) $V[U]$.

1.7 Funciones inversas. Si R es una relación, la *inversa* de R es la relación R^* definida por la expresión:

$$(a, b) \in R \iff (b, a) \in R^* \quad (6)$$

Esto es, la inversa de una relación R , es la relación R^* que se tiene al intercambiar las componentes de cada uno de los pares ordenados de R . Por ejemplo, si $R = \{(2, 1), (4, -5), (6, 3)\}$, entonces $R^* = \{(1, 2), (-5, 4), (3, 6)\}$. De la definición expresada en (6), se ve claramente que el dominio de R es el rango de R^* y que el rango de R es el dominio de R^* .

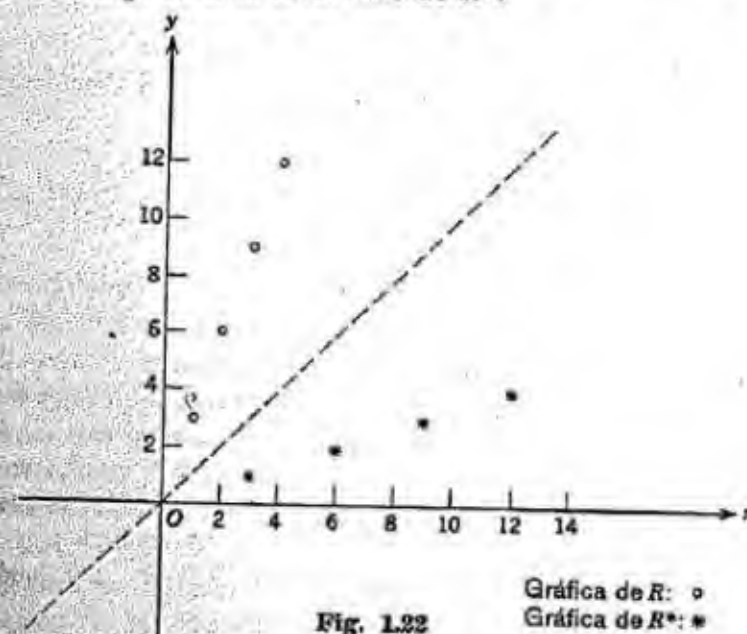


Fig. 1.22

Gráfica de R : \circ
 Gráfica de R^* : $*$

Ejemplo 1. Sea R la relación dada por

$$R = \{(x, y) \mid y = 3x\}.$$

y cuyo dominio es $\{1, 2, 3, 4\}$. Encuentre una expresión para R^* . Grafique R y R^*

Solución. El dominio de R es $\{1, 2, 3, 4\}$ y su rango es $\{3, 6, 9, 12\}$; por tanto, el dominio de R^* es $\{3, 6, 9, 12\}$ y su rango es $\{1, 2, 3, 4\}$. Puesto que la especificación de R indica que la segunda componente de un par ordenado es el triple de la primera, es evidente que la primera componente de un par ordenado que esté en R^* , será el triple de su segundo componente, o sea

$$R^* = \{(x, y) \mid x = 3y\},$$

y dominio de $R^* = \{3, 6, 9, 12\}$.

Las gráficas de R y R^* se muestran en la Fig. 1.22.

Observemos que en el ejemplo 1 la proposición $x = 3y$, que se usa en la especificación de R^* , se puede obtener de la proposición $y = 3x$ usada para especificar R , mediante el cambio de papeles de x y y . En general resulta cierto que

$$R = \{(x, y) \mid S_{xy}\} \iff R^* = \{(x, y) \mid S_{yx}\}. \quad (7)$$

La expresión (7) se sigue inmediatamente, de que

$$(a, b) \in \{(x, y) \mid S_{xy}\}$$

si y sólo si S_{xy} resulta una proposición verdadera si x se reemplaza por a y y se reemplaza por b . De donde

$$(a, b) \in \{(x, y) \mid S_{xy}\} \iff (b, a) \in \{(x, y) \mid S_{yx}\}.$$

Ejemplo 2. Si

$$R = \{(x, y) \mid y^2 = 9x - 1 \text{ y } x > 1\},$$

encuentre una especificación para R^* . Determine el dominio de R^* . Grafique R y R^* .

Solución. Mediante la expresión (7), tendremos:

$$R^* = \{(x, y) \mid x^2 = 9y - 1 \text{ y } y > 1\}.$$

De esta especificación para R^* , notamos que si $(a, b) \in R^*$, entonces $b > 1$ y $a^2 = 9b - 1 > 8$ ó bien $|a| > \sqrt{8}$; luego:

$$\text{dominio } R^* = (-\infty; -\sqrt{8}) \cup (\sqrt{8}; +\infty).$$

Notamos, por supuesto, que

$$\text{rango } R^* = (1; +\infty)$$

que es igual al dominio de R . Las gráficas de R y R^* están dadas en la Fig. 1.23.

Al considerar las gráficas de una relación R y de su inversa R^* , observamos que el punto P_1 de coordenadas (a, b) , estará en la gráfica de R si y sólo si el punto P_2 de coordenadas (b, a) están en la gráfica de R^* . Notamos también que el punto $P_1 (a, b)$ es el reflejo del punto $P_2 (b, a)$ respecto a la línea cuya ecuación es $y = x$; o sea que la línea cuya ecuación es $y = x$ es la mediatriz del segmento de recta que une a $P_1 (a, b)$ con $P_2 (b, a)$. De estas observaciones se sigue que la gráfica R^* es el reflejo de la gráfica de R respecto a la línea cuya ecuación es $y = x$. Esto se evidencia en las Figs. 1.22 y 1.23 donde la línea punteada es la gráfica de $y = x$.

Si F es una función, entonces F , siendo relación, tiene una inversa definida por la expresión (6). Sin embargo, la inversa de una función F puede a su vez no ser función. Un ejemplo sencillo es suficiente para probar esta aseveración. Sea:

$$F = \{(1, 2), (3, 2), (4, 6)\};$$

luego la inversa de F es $\{(2, 1), (2, 3), (6, 4)\}$, que no es función porque contiene dos pares ordenados con la misma primera componente.

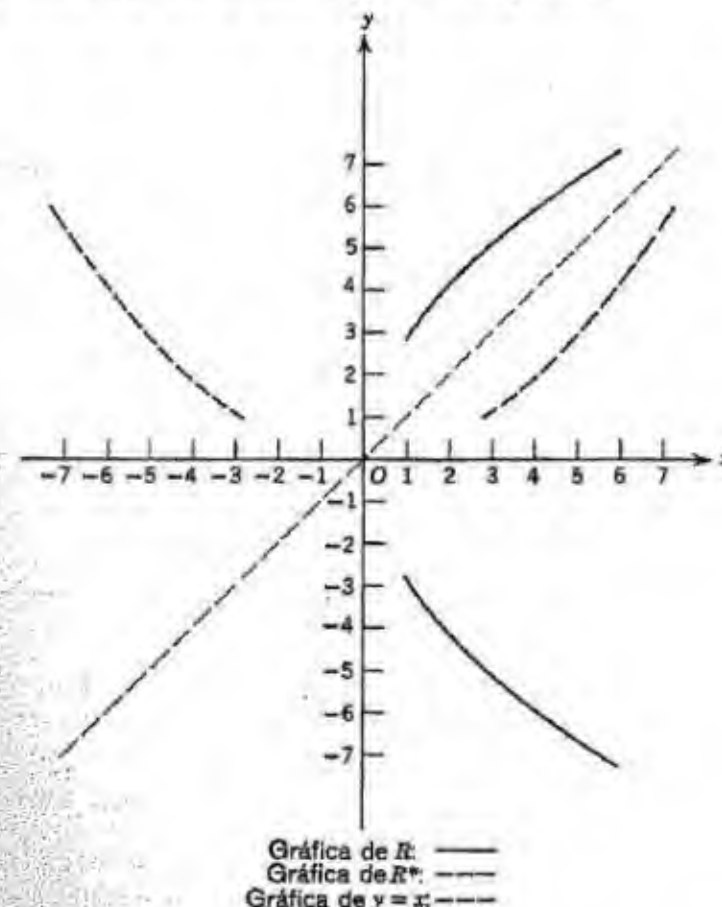


Fig. 1.23

Como la inversa de una función F consiste del conjunto de pares ordenados que se obtienen al intercambiar las componentes de cada par ordenado de F , resulta evidente que la inversa de F será también función (esto es que no contendrá dos pares ordenados con la misma primera componente), si y sólo si no existen pares ordenados de F que tengan la misma segunda componente. Una función F , que posee esta propiedad, se dice que es biunívoca o uno a uno. Una función F es biunívoca o uno a uno si

$$[(a, b) \in F \text{ y } (c, b) \in F] \rightarrow a = c. \quad (8)$$

En otras palabras, la expresión (8) nos dice que con cada elemento b del rango de F está asociado un solo elemento a del dominio de F . Como ejemplo: la función

F_1 expresada por $F_1(x) = 3x + 2$ es biunívoca, puesto que $F_1(a) = F_1(c)$, implica que $3a + 2 = 3c + 2$ y que $a = c$. La función $F_2 = \{(x, y) \mid y = x^2\}$, para la cual $F_2(x) = x^2$, no es biunívoca, puesto que los dos pares ordenados $(2, 4)$ y $(-2, 4)$, pertenecen a F_2 .

Si la función F es biunívoca, entonces la inversa de F es también función y se expresa por F° . Si F es biunívoca y si $F = \{(x, y) \mid y = F(x)\}$, usando (7), hallamos que $F^\circ = \{(x, y) \mid x = F(y)\}$; esto es:

$$F = \{(x, y) \mid y = F(x)\} \iff F^\circ = \{(x, y) \mid x = F(y)\}. \quad (9)$$

Notemos que usamos el símbolo F° para la inversa de una función F , sólo en el caso de que dicha inversa sea también función, esto es, sólo si F es biunívoca.

Recordemos que la gráfica de una función F tiene la propiedad de que toda línea perpendicular al eje sobre el cual está graficado el dominio, intersectará a la gráfica cuando más en un punto. Ahora bien, si la función F es biunívoca, la gráfica de F , tendrá también la propiedad de que toda recta perpendicular al

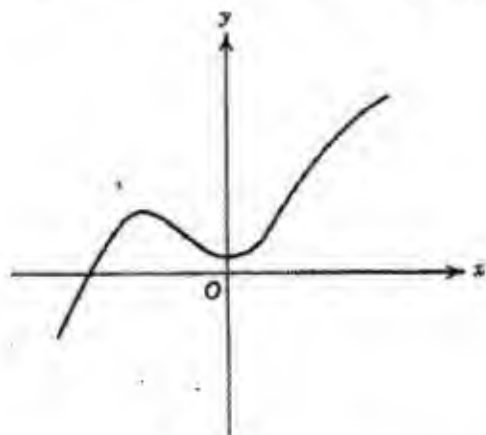


Fig. 1.24

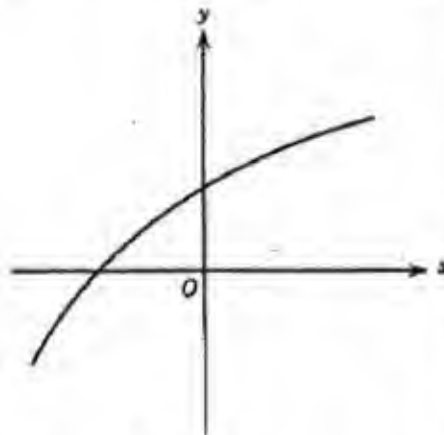


Fig. 1.25

eje sobre el cual está graficado el rango, intersectará a la gráfica cuando más en un punto. Por ejemplo, la función cuya gráfica se muestra en la figura 1.24 no es biunívoca, mientras que la que se muestra en la figura 1.25, sí lo es.

La expresión (9) nos dice que si F es biunívoca y que si tenemos una fórmula para $F(x)$ y el dominio de x está dado o implicado, podemos expresar una especificación para F° en la forma $F^\circ = \{(x, y) \mid x = F(y); x \in D_{F^\circ}\}$. En ciertos casos esto nos permite hallar una fórmula para $F^\circ(x)$, como se ilustra en los ejemplos 3 y 4.

Ejemplo 3. Considere la función

$$F = \{(x, y) \mid y = 2x + 2, x \in [-1; 2]\}.$$

Demuestre que F es biunívoca y por tanto, que la inversa de F es una función F° . Dé F° en la forma

$$F^\circ = \{(x, y) \mid y = F^\circ(x), x \in D_{F^\circ}\}.$$

Halle cuatro pares ordenados que sean elementos de F , intercambie la primera y segunda componentes en estos pares ordenados y verifique el que los pares ordenados así formados son elementos de F° . Verifique que

$$F^\circ[F] = I \quad y \quad x \in D_F,$$

$$F[F^\circ] = I \quad y \quad x \in R_F.$$

Solución. Claramente, la función F es biunívoca, ya que la gráfica de F es el segmento de recta de trazo grueso en la Fig. 1.26 y cualquier recta perpendicular al eje Y , corta a este segmento cuando más en un punto. De (9) tenemos:

$$F^\circ = \{(x, y) \mid x = 2y + 2, y \in [-1; 2]\}. \quad (10)$$

De la especificación (y gráfica) de F vemos que:

$$D_F = [-1; 2] \quad y \quad R_F = [0; 6], \quad (11)$$

de modo que

$$D_{F^\circ} = [0; 6] \quad y \quad R_{F^\circ} = [-1; 2].$$

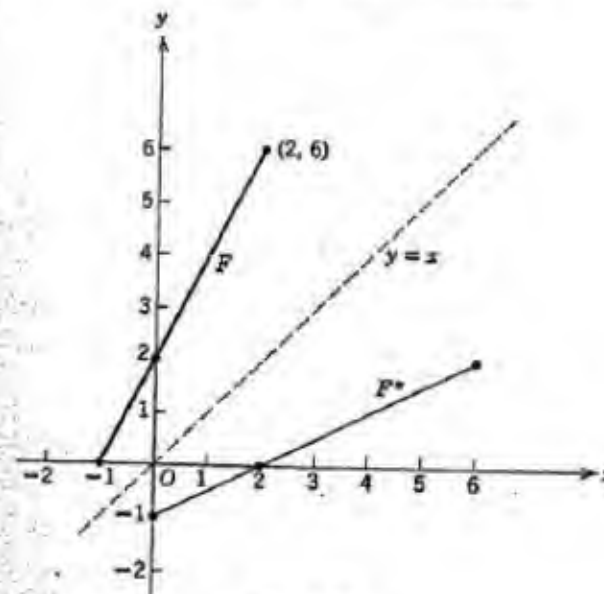


Fig. 1.26

De (10) y (11) podemos escribir

$$F^\circ = \{(x, y) \mid y = \frac{x}{2} - 1, x \in [0; 6]\},$$

para la cual $F^\circ(x) = (x/2) - 1$. En la Fig. 1.26 la gráfica de F° es el segmento de recta de trazo ligero.

Cuatro elementos de F son $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 4)$ y $(2, 6)$; se puede verificar rápidamente que $(0, -1)$, $(2, 0)$, $(4, 1)$ y $(6, 2)$ están en F° .

De las igualdades

$$F(x) = 2x + 2 \quad y \quad F^\circ(x) = \frac{x}{2} - 1$$

tenemos

$$F^*[F(x)] = \frac{1}{2}(2x+2) - 1 = x \quad \text{para } x \in [-1; 2],$$

y

$$F[F^*(x)] = 2\left(\frac{x}{2} - 1\right) + 2 = x \quad \text{para } x \in [0; 6].$$

Observe que la función

$$F = \{(x, y) \mid y = x^2 - 1, x \in \mathbb{R}\}$$

no es biunívoca. (Su gráfica es la parábola con vértice en $(0, 1)$, cuyo eje está sobre el eje Y y que se abre hacia arriba). Sin embargo, al definir una función dada por la misma ecuación que F , pero cuyo dominio es un subconjunto apropiadamente seleccionado de D_F , podemos obtener una función que sea biunívoca. Esto se aplica en el ejemplo 4.

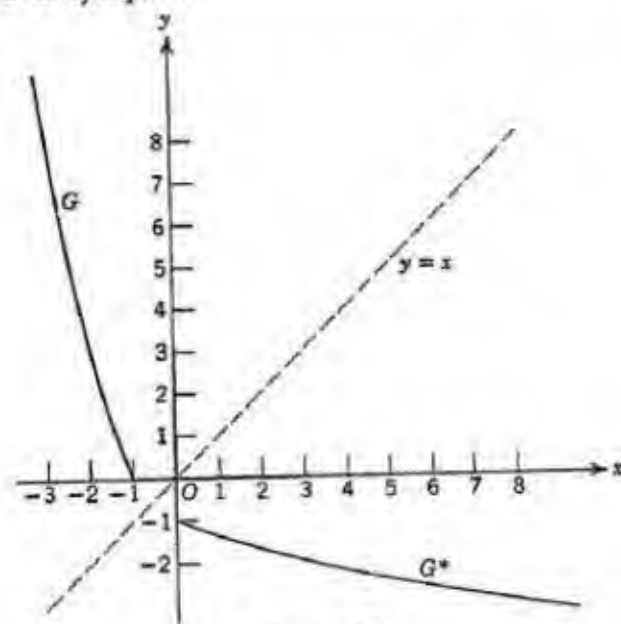


Fig. 1.27

Ejemplo 4. Considere la función

$$G = \{(x, y) \mid y = x^2 - 1, x \in (-\infty; -1]\}.$$

Demuestre que G es biunívoca. Sea G^* la inversa de G ; especifique G^* en la forma

$$G^* = \{(x, y) \mid y = G^*(x), x \in D_{G^*}\}.$$

Encuentre cuatro pares ordenados que pertenezcan a G ; intercambie las componentes primera y segunda en dichos pares ordenados y verifique que los pares así formados están en G^* . Verifique también que

$$G^*[G] = I \quad \text{para } x \in D_G, \quad \text{y} \quad G[G^*] = I \quad \text{para } x \in R_G.$$

Solución. La gráfica de G es el arco de trazo grueso en la Fig. 1.27; dicha gráfica es la porción de la parábola cuya ecuación es $y = x^2 - 1$, que queda en el segundo cuadrante. Es claro que G es biunívoca. Puesto que

$$G = \{(x, y) \mid y = x^2 - 1, x \in (-\infty; -1]\},$$

se sigue que

$$G^* = \{(x, y) \mid x = y^2 - 1, y \in (-\infty; -1]\}. \quad (12)$$

Observemos que

$$D_G = (-\infty; -1], \quad R_G = [0; +\infty),$$

de modo que

$$D_{G^*} = [0; +\infty), \quad R_{G^*} = (-\infty; -1]. \quad (13)$$

De (12) notamos que si $(x, y) \in G^*$, entonces $x = y^2 - 1$, o sea que $y = \pm\sqrt{x+1}$. También de (12) vemos que $y \in (-\infty; -1]$, y por tanto debemos poner $y = -\sqrt{x+1}$. Así pues, de (12) y (13) tenemos:

$$G^* = \{(x, y) \mid y = -\sqrt{x+1}, x \in [0; +\infty)\},$$

para la cual $G^*(x) = -\sqrt{x+1}$.

La gráfica de G^* es el arco de trazo ligero de la Fig. 1.27. Cuatro elementos de G son $(-3, 8)$, $(-\frac{5}{2}, \frac{21}{4})$, $(-2, 3)$ y $(-1, 0)$; es fácil verificar que $(8, -3)$, $(\frac{21}{4}, -\frac{5}{2})$, $(3, -2)$ y $(0, -1)$ son elementos de G^* .

De las igualdades

$$G(x) = x^2 - 1 \quad \text{y} \quad G^*(x) = -\sqrt{x+1}$$

tenemos

$$G^*[G(x)] = -\sqrt{(x^2 - 1) + 1} = -\sqrt{x^2} = x \quad \text{para } x \in (-\infty; -1]$$

$$G[G^*(x)] = (-\sqrt{x+1})^2 - 1 = x \quad \text{para } x \in [0; +\infty).$$

Note que las Figs. 1.26 y 1.27 nos proporcionan, además, ejemplos de que las gráficas de R y R^* son reflejo una de la otra, sobre la línea dada por $y = x$.

En los ejemplos 3 y 4 hemos presentado ilustraciones del Teorema 1.

Teorema 1. Si la función F es biunívoca y si F^* es la inversa de F , entonces

$$(i) \quad F[F^*] = I \quad \text{siendo el dominio de } I = R_F.$$

$$(ii) \quad F^*[F] = I \quad \text{siendo el dominio de } I = D_F.$$

Demostración. (i): Sea $a \in R_F$, esto es, sea $a \in D_{F^*}$. Entonces $F^*(a) = b$, donde $(a, b) \in F^*$, y esto implica que $(b, a) \in F$ ó sea que $F(b) = a$. Por tanto, si $a \in R_F$,

$$F[F^*(a)] = F(b) = a,$$

y si $x \in R_F$, entonces

$$F[F^*(x)] = x.$$

(ii): Sea $a \in D_F$. Entonces $F(a) = b$ donde $(a, b) \in F$, y de ahí que $(b, a) \in F^*$, o sea que $F^*(b) = a$. Por tanto para $a \in D_F$,

$$F^*[F(a)] = F^*(b) = a,$$

y si $x \in D_F$, entonces

$$F^*[F(x)] = x. \quad \blacksquare$$

* El símbolo \blacksquare se usará para indicar el fin de una demostración.

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 8, dé el dominio y el rango de F y de F^* . Expresé F^* en la forma $F^* = \{(x, y) \mid y = F^*(x), x \in D_{F^*}\}$. Grafique F y F^* sobre el mismo sistema coordenado. Halle cuatro pares ordenados que sean elementos de F ; intercambie la primera y segunda componentes en dichos pares ordenados y verifique que los nuevos pares ordenados así formados son elementos de F . Verifique que

$$F^*[F] = I \text{ con dominio de } I = D_F, \\ F[F^*] = I \text{ con dominio de } I = R_F.$$

1. $F = \{(x, y) \mid y = x + 1, x \in [-1; 3]\}$.
2. $F = \{(x, y) \mid y = -x\}$.
3. $F = \{(x, y) \mid y = 4/x\}$.
4. $F = \{(x, y) \mid y = 3x - 4, x \in [0; 5]\}$.
5. $F = \{(x, y) \mid y = x^2 - 4, x \in (-\infty; -2]\}$.
6. $F = \{(x, y) \mid y = x^2 - 4, x \in [2; +\infty)\}$.
7. $F = \{(x, y) \mid y = x^2\}$.
8. $F = \{(x, y) \mid y = x^4, x \in [0; +\infty)\}$.

¿Cuál de las funciones dadas en los ejercicios del 9 al 12 tiene una inversa que sea función? Dé una razón para dicha respuesta. Si la inversa de una función G es una función G^* , dé el dominio y el rango de G y de G^* , exprese G^* en la forma $G^* = \{(x, y) \mid y = G^*(x), x \in D_{G^*}\}$ y grafique G y G^* sobre un mismo sistema coordenado.

9. $G = \{(x, y) \mid y = x^2, x \in (-\infty; +\infty)\}$.
10. $G = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x}, x \in (0; +\infty)\}$.
11. $G = \{(x, y) \mid y = x^2 - 4x, x \in [-1; 5]\}$.
12. $G = \{(x, y) \mid y = x^2 - 4x, x \in [2; 5]\}$.

En cada uno de los ejercicios del 13 al 16 demuestre que la función dada es su propia inversa

13. $F = \{(x, y) \mid y = x\}$.
14. $F = \{(x, y) \mid y = 6/x\}$.
15. $G = \{(1, 4), (4, 1), (6, 3), (3, 6), (0, 0)\}$.
16. $U = \{(x, y) \mid y = -x - 2\}$.

17. ¿Es función la inversa de la función constante $F = \{(x, y) \mid y = 4\}$? Dé una razón que justifique su respuesta.

18. (a) ¿Es función la inversa de la función $F = \{(x, y) \mid y = \sin x, -\infty < x < +\infty\}$? Dé una razón para dicha respuesta.

(b) ¿Es función la inversa de la función $F = \{(x, y) \mid y = \sin x, -\pi/2 \leq x \leq \pi/2\}$? Si así es ¿cuál es el nombre dado generalmente a esta inversa?

1.8 Desigualdades y valores absolutos. Por sus estudios previos de matemáticas, el estudiante está familiarizado con las desigualdades y con expresiones como $2 < x < 4$. Puesto que nos referiremos frecuentemente a las desigualdades, repasemos brevemente, de un modo formal, las nociones y propiedades básicas de las desigualdades.

Si a es un número real positivo, decimos que a es mayor que cero y escribimos $a > 0$. Si a es un número real negativo, decimos que a es menor que cero y escribimos $a < 0$. De ese modo $4 > 0, -3 < 0$.

Si a y b son números reales, y si existe un número real positivo p , tal que $a - b = p$, decimos que a es mayor que b y escribimos $a > b$. Esto equivale a decir que b es menor que a , lo que escribimos $b < a$. Por ejemplo: $1.8 > \sqrt{2}$ y $-2 < -\sqrt{3}$. Los símbolos $a \leq b$ se usan para indicar que $a = b$ o que $a < b$; los símbolos $a \geq b$ se usan para indicar que $a = b$ o bien $a > b$. Una proposición de la forma $a < b, a > b, a \leq b, a \geq b$ es una **desigualdad**.

Resolver una desigualdad con una variable, significa encontrar los números (del universo de la variable) para los cuales la desigualdad resulta una proposición verdadera. El conjunto de números del universo para los que es verdadera la desigualdad, constituye la **solución** de la desigualdad. Por ejemplo: la solución de la desigualdad $3x > 9$, en el universo de números reales, es la totalidad de números reales mayores que 3; en la notación usual para intervalos la solución es $(3; +\infty)$.

Las propiedades de las desigualdades, más usuales, se expresan en el siguiente teorema.

Teorema 2. Para cualesquier números reales a, b y c :

- (i) $a > b$ y $b > c \Rightarrow a > c$,
- (ii) $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$,
- (iii) Si c es positivo $a > b \Leftrightarrow ac > bc$,
- (iv) Si c es negativo $a > b \Leftrightarrow ac < bc$.

Demostración. Las demostraciones de estas afirmaciones se siguen de las propiedades conocidas de los números reales.

(i). Puesto que $a > b, a - b = p$, siendo p un número positivo. En forma semejante, dado que $b > c, b - c = q$, siendo q positivo. De la igualdad

$$a - c = (a - b) + (b - c)$$

vemos que $a - c = p + q$. Puesto que la suma de dos positivos es positiva, se sigue que $a - c$ es positiva, luego $a > c$. De este modo queda demostrada (i); se piden al estudiante demostraciones para (ii), (iii) y (iv) en los ejercicios 30, 31 y 32 de esta sección. ■

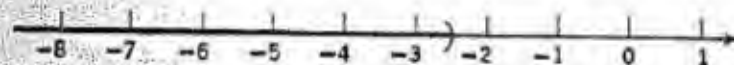


Fig. 1.28

Se puede demostrar que el Teorema 2 es válido si se intercambian los símbolos $>$ y $<$, y también si los símbolos $>$ y $<$ se sustituyen por \geq y \leq , respectivamente.

Escribimos

$$a < b < c \quad (14)$$

para indicar que $a < b$ y que $b < c$ (y consecuentemente según el Teorema 2(i), que $a < c$). Si se cumple (14) para los números a, b , y c , decimos que b está entre a y c . Por ejemplo: $\sqrt{2}$ está entre 1 y 2, ya que $1 < \sqrt{2} < 2$.

De forma semejante, escribimos

$$a \leq b \leq c$$

para indicar que $a \leq b$ y que $b \leq c$.

Se puede demostrar que para números reales tales que $p < r$,

$$p < \frac{1}{2}(p+r) < r.$$

Esto es, que entre dos números reales hay otro número real, y consecuentemente, entre dos números reales hay un número infinito de números reales. Por esta razón se dice que el sistema de los números reales, \mathbb{R} , es denso.

Las partes (ii), (iii) y (iv) del Teorema 2, constituyen una base para resolver cualquier desigualdad de 1er. grado con una variable. Tal solución se obtiene de modo muy semejante al seguido para la solución de una ecuación de 1er. grado. Observemos que, de acuerdo con el teorema 2(iv), si se multiplican los 2 miembros de una desigualdad por un número negativo, se invierte el sentido de la desigualdad; esto es, se intercambian los símbolos $<$ y $>$.

Ejemplo 1. Resuelva la desigualdad $-3x + 7 > -x + 12$.

Solución. Si se suma $x - 7$ a cada miembro de la desigualdad dada, se obtiene según el teorema 2(ii), $-2x > 5$. Si multiplicamos ambos miembros por $-\frac{1}{2}$ e invertimos el sentido de la desigualdad (puesto que $-\frac{1}{2} < 0$, usamos el teorema 2(iv)), obteniéndose $x < -\frac{5}{2}$. La solución de la desigualdad dada es $(-\infty; -\frac{5}{2})$. Esta solución está representada en la Fig. 1.28. Como una comprobación parcial de nuestro resultado seleccionemos un elemento de la solución, digamos el -3 , y probemos si satisface la desigualdad dada. Se ve que $-3(-3) + 7 > -(-3) + 12$, o sea $16 > 15$ es cierto. De este modo podemos comprobar un error en el sentido de la desigualdad.

Recuérdese que el *valor absoluto*, valor numérico o módulo de cualquier número real a , se denota por $|a|$ y se define como sigue:

$$|a| = a \text{ si } a \geq 0; \quad |a| = -a \text{ si } a < 0.$$

Por ejemplo: $|5| = 5$; $|0| = 0$; $|-5| = 5$.

Las principales propiedades del valor absoluto que nos interesan, están dadas en los Teoremas 3, 4, 5 y 6.

Teorema 3. Para todo número real a :

- (i) $|a| \geq 0$ (el valor absoluto de a nunca es negativo);
- (ii) $|a| = 0 \iff a = 0$;
- (iii) $|a|^2 = a^2$;
- (iv) $\sqrt{a^2} = |a|$;
- (v) $-|a| \leq a \leq |a|$.

Demostración. Demostraremos (i) y (ii) simultáneamente, si notamos que:

$$a < 0, \quad a = 0, \quad \text{ó} \quad a > 0.$$

Consecuentemente

- si $a < 0$, entonces $|a| = -a > 0$;
- si $a = 0$, entonces $|a| = a = 0$;
- si $a > 0$, entonces $|a| = a > 0$.

La recíproca de cada una de estas proposiciones también es válida. Así pues, quedan demostrados (i) y (ii).

(iii). Nótese que $|a|^2 = |a| \cdot |a|$. De donde, si $a \geq 0$ entonces $|a|^2 = a \cdot a = a^2$; y además si $a < 0$, entonces $|a|^2 = (-a) \cdot (-a) = a^2$. Por tanto queda demostrada (iii).

(iv). Recuérdese que desde el Álgebra, a la raíz cuadrada positiva de un número positivo n , se le llama raíz cuadrada principal de n y se expresa por \sqrt{n} . Luego $\sqrt{a^2} = a$ si $a \geq 0$, pero $\sqrt{a^2} = -a$ si $a < 0$. Estas son precisamente las propiedades de $|a|$, por tanto $\sqrt{a^2} = |a|$.

(v). Primero demostraremos que $a \leq |a|$. Si $a \geq 0$; entonces, de la definición del valor absoluto $a = |a|$; por otra parte, $a < 0$ implica que $|a| = -a > 0$, de donde $a < 0 < |a|$. Por tanto $a \leq |a|$ para todo real a .

En seguida probaremos que $-|a| \leq a$. Si $a \geq 0$, entonces $-|a| \leq 0 \leq a$; de igual modo, si $a < 0$, entonces $|a| = -a$ y $-|a| = a$. Por tanto, $-|a| \leq a$.

Ambos resultados se pueden combinar, quedando

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

para todo número a , y así queda demostrada (v). ■

Teorema 4. Para cualesquiera números reales a , x y b , siendo $b \geq 0$:

- (i) $|x| \leq b \iff -b \leq x \leq b$;
- (ii) $|x-a| \leq b \iff -b \leq x-a \leq b$;
- (iii) $|x-a| \leq b \iff a-b \leq x \leq a+b$;
- (iv) $|x| \geq b \iff x \leq -b \text{ ó } x \geq b$.

Demostración (i). Primero demostraremos que si $b \geq 0$ y $|x| \leq b$, entonces $-b \leq x \leq b$. Puesto que $x \leq |x|$ y $|x| \leq b$, entonces $x \leq b$. Además $-b \leq -|x|$ y $-|x| \leq x$, de modo que $-b \leq x$. Por tanto $|x| \leq b$ implica que $-b \leq x \leq b$.

En segundo lugar demostraremos que si $b \geq 0$ y $-b \leq x \leq b$, entonces $|x| \leq b$. Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x$; esto, junto con la hipótesis de que $x \leq b$, demuestra que $|x| \leq b$. Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$, y puesto que $-b \leq x$ tenemos que $-x \leq b$; por tanto $|x| \leq b$.

(ii). Si ponemos $x-a$ en lugar de x en $|x| \leq b$, el Teorema 4(i) se transforma en el Teorema 4(ii).

(iii). Si $-b \leq x-a$ entonces $a-b \leq x$ y si $x-a \leq b$ entonces $x \leq a+b$, por el Teorema 2(ii). Así pues, el Teorema 4(iii) se sigue del Teorema 4(ii).

(iv). Recuérdese que $|x| = x$ ó bien que $|x| = -x$, de modo que

$$|x| \geq b \iff -x \geq b \text{ ó } x \geq b;$$

De donde

$$|x| \geq b \iff x \leq -b \text{ ó } x \geq b,$$

y así queda demostrado el Teorema 4(iv). ■

Nótese que el Teorema 4(i) establece que $|x| < b$ si y sólo si x es mayor que $-b$ y menor que b ; mientras que el Teorema 4(iv) establece que $|x| > b$ si y sólo si x es menor que $-b$, ó x es mayor que b .

Teorema 5. El valor absoluto de la suma de 2 números reales, a y b , es menor o igual que la suma de sus valores absolutos:

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Demostración. Del Teorema 3(v) tenemos que

$$-|a| \leq a \leq |a| \quad \text{y} \quad -|b| \leq b \leq |b|.$$

De estas desigualdades se sigue que

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq (|a| + |b|),$$

que por el Teorema 4(i) es equivalente a $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Debe notarse que el Teorema 5 incluye dos casos:

(i) Si los dos números reales, a y b , tienen igual signo, entonces $|a + b| = |a| + |b|$. Por ejemplo: $|3 + 5| = 8 = |3| + |5|$; $|-3 + (-5)| = 8 = |-3| + |-5|$.

(ii) Si los dos números reales son de signos opuestos, entonces $|a + b| < |a| + |b|$. Por ejemplo: $|3 + (-5)| = 2$, mientras que $|3| + |-5| = 3 + 5 = 8$; así, $|3 + (-5)| < |3| + |-5|$.

Teorema 6. El valor absoluto del producto de dos números reales a y b es igual al producto de sus valores absolutos:

$$|ab| = |a| \cdot |b|$$

Demostración. En el Teorema 3(iv) demostramos que $\sqrt{a^2} = |a|$. Por lo que

$$|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} = |a| \cdot |b|.$$

Ejemplo 2. Resuelva la ecuación $|x - 5| = 4$.

Solución. De la definición de valor absoluto

$$|a| = b, (b \geq 0) \iff a = -b \text{ ó } a = b.$$

Por lo que

$$\begin{aligned} |x - 5| = 4 &\iff x - 5 = 4 \text{ ó } x - 5 = -4 \\ &\iff x = 9 \text{ ó } x = 1. \end{aligned}$$

Concluimos entonces que 9 y 1 son soluciones de la ecuación dada, dejamos comprobación para el estudiante.

Ejemplo 3. Resuelva la desigualdad $|x - 4| \leq 3$ y exprese la solución como un intervalo.

Solución. Según el Teorema 4(ii) la desigualdad propuesta es equivalente

$$-3 \leq x - 4 \leq 3, \text{ ó } 1 \leq x \leq 7.$$

Por tanto $[1; 7] = \{x | 1 \leq x \leq 7\}$ es la solución y está indicada en la Fig. 1.29

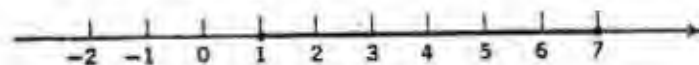


Fig. 1.29

Ejemplo 4. Resuelva la desigualdad $|x - 3| > 6$, y exprese la solución como la unión de dos intervalos.

Solución. Según el Teorema 4(iv)

$$|x - 3| > 6 \iff x - 3 < -6 \text{ ó } x - 3 > 6.$$

La proposición " $x - 3 < -6$ ó $x - 3 > 6$ " es equivalente a

$$x < -3 \text{ ó } x > 9.$$

La solución de $x < -3$ es $(-\infty; -3)$ y la solución de $x > 9$ es $(9; +\infty)$. Por tanto, la solución de la desigualdad dada es

$$(-\infty; -3) \cup (9; +\infty).$$

Nótese que $|a|$ debe interpretarse como la distancia entre el origen y el punto $P(a)$ sobre la recta coordenada, y que $|x - a|$ es la distancia entre los puntos $P(x)$ y $P(a)$. Por esto, la solución de $|x - 4| \leq 3$ (véase ejemplo 3) puede interpretarse gráficamente como el conjunto de puntos cuyas distancias hasta el punto $P(4)$ sean menores o iguales a 3. Por razones semejantes, la solución de $|x - 3| > 6$ (véase ejemplo 4) puede interpretarse como el conjunto de puntos cuyas distancias al punto $P(3)$ es mayor que 6.

Ejemplo 5. Para $F(x) = 3x$, demuestre que:

- (a) Si $|x - 1| < 0.1$, implica que $|F(x) - 3| < 0.3$;
- (b) Si $|F(x) - 3| < 0.3$, implica que $|x - 1| < 0.1$;
- (c) $|F(x) - 3| < 0.3 \iff |x - 1| < 0.1$;
- (d) Si $|x - 1| < 0.1$, implica que $|F(x) - 3| < 0.6$.
- (e) ¿Es cierto que si $|F(x) - 3| < 0.6$ entonces $|x - 1| < 0.1$?
- (f) ¿Es cierto que $|F(x) - 3| < 0.6 \iff |x - 1| < 0.1$?

Solución. (a). Puesto que $F(x) = 3x$, tenemos:

$$|F(x) - 3| = |3x - 3| = 3|x - 1|. \quad (15)$$

De esta desigualdad resulta obvio que si $|x - 1| < 0.1$, entonces

$$|F(x) - 3| < 3(0.1), \text{ ó } |F(x) - 3| < 0.3$$

(b) De la igualdad (15) y de la hipótesis de que $|F(x) - 3| < 0.3$, tenemos

$$3|x - 1| < 0.3; \text{ ó } |x - 1| < 0.1.$$

(c) La demostración de (c) se sigue de las demostraciones de (a) y (b).

(d) Como se nota en la demostración de (a), $|x - 1| < 0.1$, implica que $|F(x) - 3| < 0.3$. Claramente $0.3 < 0.6$. Entonces, del Teorema 2(i) se sigue que, ante las condiciones dadas $|F(x) - 3| < 0.6$.

(e) No es cierto que:

$$[|F(x) - 3| < 0.6] \rightarrow [|x - 1| < 0.1],$$

puesto que de la igualdad (15) se deduce que:

$$[|F(x) - 3| < 0.6] \rightarrow [3|x - 1| < 0.6] \rightarrow [|x - 1| < 0.2].$$

Las desigualdades $|x-1| < 0.2$ y $|x-1| < 0.1$ no son equivalentes, ya que hay valores de x que satisfaciendo a la primera desigualdad, no satisfacen a la segunda.

(f) Puesto que la respuesta a (e) es negativa, la de (f) será negativa también.

EJERCICIOS

1. Escriba una desigualdad de la forma $a < b$ para cada uno de los siguientes problemas, usando los números dados.

(a) 3, 8; (b) -2, 4; (c) -4, -8; (d) $\sqrt{5}$, 3.

2. En cada uno de los siguientes problemas considere que x está graficada sobre la escala numérica convencional dirigida hacia la derecha y mediante una desigualdad apropiada de la forma $x > a$ ó $x < b$, exprese la proposición dada.

- (a) x está a la derecha de 5;
 (b) x está a la derecha de -4;
 (c) x está a la izquierda de 5;
 (d) x está a la izquierda de -3.

Halle la solución de la desigualdad dada en cada uno de los ejercicios del 3 al 10 y exprese la solución como un intervalo. Indique dicha solución sobre una escala numérica. Compruebe el resultado seleccionando un elemento de la solución y demostrando que realmente satisface la desigualdad propuesta.

3. $2x - 2 > \frac{3}{2}x - 6$. 4. $5x - 5 > -9 + 3x$.
 5. $\frac{1}{2}(x + 10) > \frac{3}{2}x + 5$. 6. $\frac{1}{2}(3x + 7) < \frac{1}{3}x - 4$.
 7. $|x| \leq 4$. 8. $|x - 6| < 4$.
 9. $|2x - 3| < 5$. 10. $|3x| < 2$.

En cada uno de los ejercicios del 11 al 14 encuentre la solución de la desigualdad dada y exprese la solución como la unión de dos intervalos. Indique dicha solución sobre una escala numérica.

11. $|2x| > 8$. 12. $|3x - 5| > 4$.
 13. $|x - 1| > 5$. 14. $|x - \frac{1}{2}| \geq \frac{3}{4}$.

15. Si el universo es el conjunto de los enteros positivos, tabule los siguientes conjuntos.

- (a) $\{x | x < 8\}$; (b) $\{x | 2x < 21\}$;
 (c) $\{x | x < 11\}$; (d) $\{x | 3x < 43\}$.

16. Si el universo es el conjunto de los enteros, tabule los siguientes conjuntos:

- (a) $\{x | x^2 < 9\}$; (b) $\{x | 4x^2 < 25\}$.

17. Dé desigualdades de la forma $|x - a| < b$ que sean equivalentes a las desigualdades siguientes:

- (a) $2 < x < 4$; (b) $-1 < x < 5$;
 (c) $-2 < x < 8$; (d) $-5 < x < 1$.

Resuelva las ecuaciones propuestas en los ejercicios 18-23.

18. $|x - 4| = 3$. 19. $|3x + 2| = 5 - x$.
 20. $|x + 4| = |x + 2|$. 21. $|3 - x| = |1 + x|$.
 22. $|x - 4| = |x - 2|$. 23. $|x - 5| = 7$.

24. Escriba desigualdades de la forma $a < x < b$ equivalentes a las desigualdades propuestas.

- (a) $|5x| < 2$; (b) $|x/3| < 2$;
 (c) $|x - 2| < 3$; (d) $|x - \frac{3}{2}| < \frac{1}{2}$.

25. Dé una desigualdad de la forma " $x < a$ ó $x > b$ ", para cada una de las desigualdades dadas.

- (a) $|5x| > 3$; (b) $|x/2| > 3$;
 (c) $|x - \frac{1}{2}| > \frac{3}{2}$; (d) $|2x - 3| > 4$.

26. Demuestre que si p y r son números reales y si $p < r$, entonces $p < \frac{1}{2}(p + r) < r$.

27. Use el resultado del ejercicio 26 para calcular un número real entre cada par de números dados.

- (a) $\frac{13}{45}, \frac{1}{2}$; (b) $\sqrt{2}, \sqrt{3}$;
 (c) $\frac{1}{18}, \frac{1}{17}$; (d) $-\sqrt{3}, -\sqrt{2}$.

28. Determine los números para los cuales las raíces dadas son reales.

- (a) $\sqrt{3 - 5x}$ (b) $\sqrt{3x - 9}$
 (c) $\sqrt{5x + 7}$ (d) $\sqrt{-4x - 5}$.

Sugerión: En cada caso las x se han de limitar a valores que mantengan no negativo al subradical.

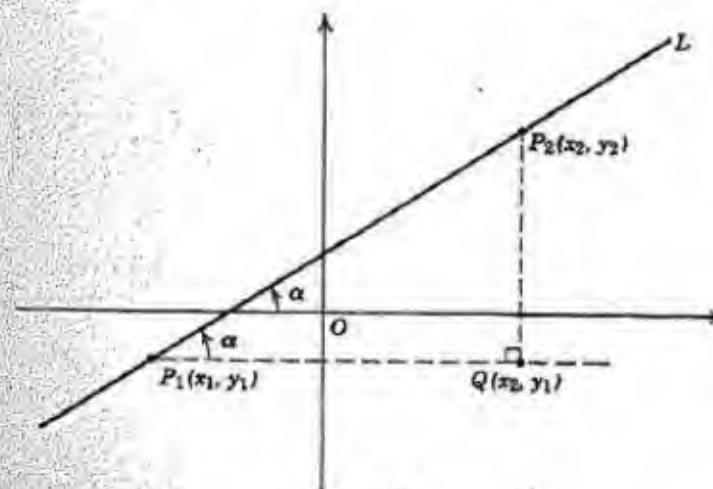


Fig. 1.30

29. Si $F(x) \doteq 2x - 1$. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

- (a) Si $|x - 3| < 0.1$, entonces $|F(x) - 5| < 0.2$;
 (b) Si $|F(x) - 5| < 0.2$, entonces $|x - 3| < 0.1$;
 (c) Si $|x - 3| < 0.1$, entonces $|F(x) - 5| < 0.4$;
 (d) Si $|F(x) - 5| < 0.4$, entonces $|x - 3| < 0.1$;
 (e) $|F(x) - 5| < 0.2$ si y sólo si $|x - 3| < 0.1$;
 (f) $|F(x) - 5| < 0.4$ si y sólo si $|x - 3| < 0.1$.

30. Demuestre el Teorema 2(ii).

31. Demuestre el Teorema 2(iii).

32. Demuestre el Teorema 2(iv).

1.9 Pendiente y función pendiente. Recuérdese que la pendiente m (la tangente de la inclinación α) de la línea L (Fig. 1.30), a través de los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (16)$$

Uno de los principales problemas que condujeron al desarrollo del cálculo, fue el de encontrar la pendiente de la línea tangente a una curva C en cualquier punto de C . Pasemos ahora a considerar este problema. Supóngase que C es la gráfica de una función F como se muestra en la Fig. 1.31. A una recta determinada por dos puntos sobre una curva, se le llama **línea secante**, o simplemente **secante** de dicha curva. Sea $x \in D_F$ y sea $h \neq 0$ un número tal que $(x+h) \in D_F$; entonces los puntos

$$P(x, F(x)) \text{ y } Q(x+h, F(x+h))$$

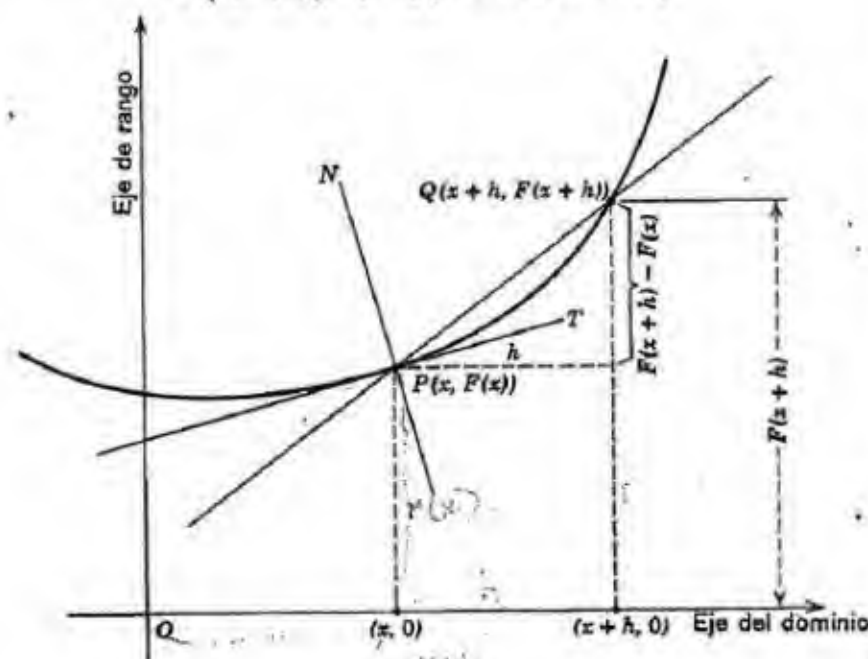


Fig. 1.31

son dos puntos sobre C , con la propiedad de que la secante PQ de C , que pasa por P y Q , no es perpendicular al eje sobre el cual está graficado el dominio. Usando la fórmula (16) tenemos

$$\text{pendiente de la secante } PQ = \frac{F(x+h) - F(x)}{(x+h) - x} = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Si dada $x \in D_F$, podemos hacer que el valor de $\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$, se acerque a un número $M(x)$ tanto como deseemos, con sólo hacer h suficientemente pequeña, llamaremos a

$$M = \{(x, y) \mid y = M(x)\}$$

la **función pendiente** de la gráfica de F .

Definimos la (línea) **tangente** a la gráfica de F en el punto $P(x, F(x))$ como la línea PT (Fig. 1.31) que pasa por P y tiene pendiente igual a $M(x)$.

Recuérdese que una línea que pasa por el punto (a, b) con pendiente m , es la gráfica de la relación.

$$R = \{(x, y) \mid y - b = m(x - a)\}.$$

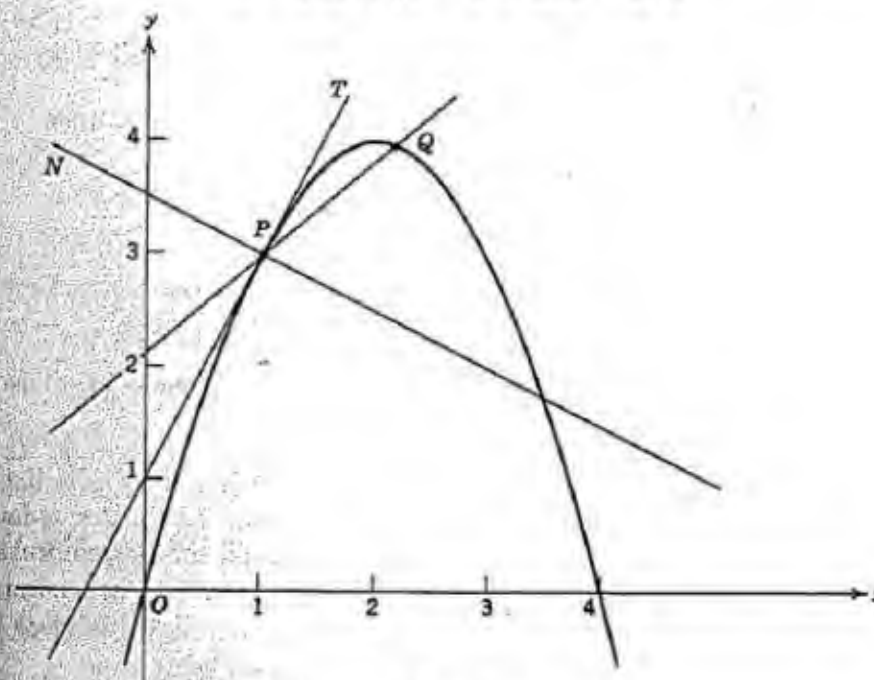


Fig. 1.32

Por tanto, si M es la función pendiente de la gráfica de F , y si $(a, F(a))$ es un punto sobre la gráfica de F para el cual existe $M(a)$, entonces la tangente a la gráfica de F en $(a, F(a))$ es la gráfica de

$$R = \{(x, y) \mid y - F(a) = M(a) \cdot (x - a)\}.$$

En otras palabras

$$y - F(a) = M(a) \cdot (x - a) \quad (17)$$

es una ecuación de la tangente a la gráfica de F en el punto $(a, F(a))$.

Precaución. Nótese que en la ecuación (17) usamos $M(a)$ y no $M(x)$ para la pendiente de la línea tangente a la gráfica de F en el punto cuya abscisa es a .

Para ilustrar estos conceptos, considérese la gráfica de la función

$$F = \{(x, y) \mid y = 4x - x^2\},$$

dada en la Fig. 1.32. En este caso

$$F(x) = 4x - x^2,$$

$$F(x+h) = 4(x+h) - (x+h)^2 = 4x + 4h - x^2 - 2xh - h^2,$$

$$y \quad F(x+h) - F(x) = 4h - 2xh - h^2.$$

Por tanto

$$\text{la pendiente de la secante } PQ = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = (4 - 2x - h) \frac{h}{h}.$$

si $h \neq 0$; entonces $\frac{h}{h} = 1$ y tendremos que

$$\text{la pendiente de la secante } PQ = 4 - 2x - h$$

Escogiendo h suficientemente pequeña podemos hacer que $4 - 2x - h$ esté tan cerca de $4 - 2x$ como queramos. Luego

$$M(x) = 4 - 2x,$$

y la función pendiente para la gráfica de F es

$$M = \{(x, y) \mid y = 4 - 2x\}.$$

Si consideramos el punto sobre la gráfica de F cuya abscisa es 1, encontramos:

$$F(1) = 4(1) - (1)^2 = 3 \text{ y } M(1) = 4 - 2(1) = 2.$$

De esto resulta que una ecuación de la línea tangente en el punto $(1, 3)$ es

$$y - 3 = 2(x - 1) \quad \text{ó} \quad 2x - y + 1 = 0.$$

La (línea) normal PN a la gráfica de F en el punto $P(x, F(x))$ es la línea que pasa por P y que es perpendicular a la tangente PT (Fig. 1.31). Recuérdese que dos líneas que tienen pendientes m_1 y m_2 respectivamente, son perpendiculares si y sólo si $m_1 \cdot m_2 = -1$. Por tanto, podemos escribir una ecuación de la normal a la parábola de la Fig. 1.32 en el punto $(1, 3)$ en la forma:

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 1) \quad \text{ó} \quad x + 2y - 7 = 0.$$

Ejemplo 1. Para la curva cuya ecuación es:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 3$$

halle

(a) La más simple expresión para la pendiente de la secante PQ , donde P tiene abscisa x y Q tiene abscisa $x+h$ y $h \neq 0$.

(b) La pendiente de la secante PQ para $x = 1$ y

$$h = \frac{1}{10}; h = \frac{1}{100}; h = \frac{1}{1000}; h = \frac{1}{1,000,000}.$$

(c) La función pendiente para la gráfica de la ecuación dada.

(d) La pendiente de la tangente a la gráfica de F en el punto en que $x =$

(e) Una ecuación para la tangente y una para la normal a la curva en el punto cuya abscisa es 1.

Solución. (a) Aquí $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$;

$$F(x+h) = \frac{1}{2}(x+h)^2 - 3 = \frac{x^2}{2} + xh + \frac{h^2}{2} - 3,$$

$$y \quad F(x+h) - F(x) = xh + \frac{h^2}{2};$$

Por tanto,

$$\text{la pendiente de la secante } PQ = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{2xh + h^2}{2h} = x + \frac{h}{2};$$

(b) Para $x = 1$ y $h = \frac{1}{10}$, la pendiente de la secante $PQ = 1.05$;

para $x = 1$ y $h = \frac{1}{100}$, la pendiente de la secante $PQ = 1.005$;

para $x = 1$ y $h = \frac{1}{1000}$, la pendiente de la secante $PQ = 1.0005$;

para $x = 1$ y $h = \frac{1}{1,000,000}$, la pendiente de la secante

$PQ = 1.0000005$.

(c) Seleccionando h suficientemente pequeña, podemos hacer el valor de $x + (h/2)$ tan cercano del de x como deseemos. Luego

$$M(x) = x, \quad y \quad M = \{(x, y) \mid y = x\}.$$

(d) Aquí $M(1) = 1$, $F(1) = -\frac{5}{2}$ y la pendiente de la tangente a la curva en el punto $(1, -\frac{5}{2})$ es 1.

(e) Una ecuación de la tangente en $(1, -\frac{5}{2})$ es:

$$y + \frac{5}{2} = 1(x - 1) \quad \text{ó} \quad 2x - 2y - 7 = 0,$$

y una ecuación de la normal en $(1, -\frac{5}{2})$ es:

$$y + \frac{5}{2} = -(x - 1) \quad \text{ó} \quad 2x + 2y + 3 = 0.$$

Hemos establecido ya que $\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$ puede "aproximarse a" $M(x)$

tanto como deseemos, haciendo h "suficientemente pequeña". Las expresiones "aproximarse a" y "suficientemente pequeña" carecen de un significado preciso. Posteriormente, en la Sec. 2.1, afinaremos sus significados. Usando la notación y los conceptos que introduciremos allí, escribimos:

$$M(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Para expresar el resultado obtenido anteriormente en las ilustraciones de la página 76, escribimos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (4 - 2x - h) = 4 - 2x.$$

EJERCICIOS

Cada uno de los ejercicios del 1 al 4 tratan sobre la gráfica de la respectiva ecuación dada y la secante PQ de esta gráfica. Para cada uno de ellos:

(a) Dé una expresión, de la forma más simple, para la pendiente de PQ donde P tiene abscisa x y Q tiene abscisa $x+h$, siendo $h \neq 0$.

(b) Dé el valor de la pendiente de la secante PQ para los valores dados de x y de h .

(c) Dé la función pendiente para la gráfica de la ecuación dada.

(d) Dé la pendiente de la tangente a esta gráfica en el punto P_1 , cuya abscisa es el valor dado de x .

(e) Dé una ecuación de la tangente y una ecuación de la normal a la gráfica en P_1 .

(f) Grafique la curva, la tangente y la normal cuya ecuación se encontró anteriormente (todo sobre el mismo sistema coordenado).

$$1. y = 5x - x^2; x = 1; h = \frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \frac{1}{10^4}.$$

$$2. y = \frac{1}{3}x^3, x = 2, h = \frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}.$$

$$3. y = \frac{2}{x}, x = -\frac{1}{2}, h = \frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}.$$

$$4. y = 3x^2 - x^3, x = 2, h = \frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}.$$

En los ejercicios del 5 al 8, halle la función pendiente para la gráfica de la función F especificada.

$$5. F(x) = 4 - x^2.$$

$$6. F(x) = 2/x^2.$$

$$7. F(x) = 2x + (3/x).$$

$$8. F(x) = \sqrt{x}.$$

Sugestión para el ejercicio 8: Demuestre que la pendiente de la secante

$$PQ = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}; \text{ Racionalice el numerador y simplifique.}$$

EJERCICIOS ADICIONALES AL CAPITULO 1

Tabule el conjunto descrito en cada uno de los ejercicios del 1 al 4.

1. El conjunto de todos los enteros positivos mayores que 2 y menores que 13.

2. La totalidad de enteros primos entre 10 y 20.

3. La totalidad de enteros positivos con la propiedad de que sus cuadrados sean menores que 50.

4. El conjunto de los coeficientes de la expresión $5x^4 + 3x^3 - 4x^2 + x$. Si el universo es el conjunto de los reales, tabule el conjunto correspondiente a cada ejercicio del 5 al 8.

$$5. \{x \mid x^2 = 81\}.$$

$$6. \{x \mid x^3 = 64x\}.$$

$$7. \{x \mid x \text{ impar, positivo y menor que } 10\}.$$

$$8. \{x \mid (4/x) = x\}.$$

Dado que el universo es el conjunto de números reales, grafique las relaciones dadas en cada uno de los ejercicios del 9 al 12, y dé su dominio y su rango.

$$9. R = \{(x, y) \mid x \geq 2\}.$$

$$10. R = \{(x, y) \mid y < 4 \text{ y } x > 0\}.$$

$$11. R = \{(x, y) \mid |x| \leq 2\}.$$

$$12. R = \{(x, y) \mid |x| \leq 2 \text{ y } -1 \leq y \leq 4\}.$$

En cada ejercicio del 13 al 16 compruebe si la relación dada es función o no y dé una razón para la respuesta. Así mismo grafique las relaciones y dé su dominio y su rango.

$$13. \{(x, y) \mid 9x^2 = 16y^2\}.$$

$$14. \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25, -4 \leq x \leq 3, y > 0\}.$$

$$15. \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25, -4 \leq y \leq 3, x > 0\}.$$

$$16. \{(x, y) \mid x^2 + xy - y = 0\}.$$

En los ejercicios del 17 al 18 se especifican dos funciones: U y V . Dé especificaciones, así como el dominio, para cada una de las funciones $U+V$, $U-V$, $U \cdot V$, y U/V .

$$17. U(x) = \sqrt{25-x^2}; V(x) = \sqrt{x^2-4}.$$

$$18. U(x) = \sqrt{x^2-9}; V(x) = \tan x, -(\pi/2) < x < \pi/2.$$

19. Si $U = \{(x, y) \mid y = x^4\}$, y $V = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x}\}$, encuentre una especificación para las funciones compuestas $U[V]$ y $V[U]$. Dé los dominios de cada una de las funciones U , V , $U[V]$ y $V[U]$.

20. ¿Tiene inversa la función $F = \{(x, y) \mid y = x^2\}$, tal que también sea función? Explíquese el porqué de la respuesta.

Límites

y continuidad

2.1 Límites. En la Sec. 1.9 comentamos que al escoger h suficientemente pequeña podemos hacer que $4 - 2x - h$, donde $h \neq 0$, se aproxime a $4 - 2x$ tanto como deseemos, y que para indicar esto escribimos

$$\lim_{h \rightarrow 0} (4 - 2x - h) = 4 - 2x.$$

Con el uso de las desigualdades y de los valores absolutos estamos en posibilidad de precisar el significado de la proposición precedente.

Representemos mediante la letra griega ε , la medida de qué tan cerca de $4 - 2x$ deseamos el valor de $4 - 2x - h$; esto es, supóngase que deseamos que el valor absoluto de la diferencia entre $4 - 2x - h$ y $4 - 2x$ sea menor que ε . En otras palabras, deseamos que

$$|(4 - 2x - h) - (4 - 2x)| < \varepsilon \quad (1)$$

o lo que es equivalente, que

$$-\varepsilon < (4 - 2x - h) - (4 - 2x) < \varepsilon$$

donde ε es cualquier número real positivo. Ahora bien, h es pequeña si su valor es cercano a cero. Supóngase que la letra griega δ , representa la medida de qué tan próxima de cero se debe tomar h para que se satisfaga (1); o sea, supóngase que la condición (1) se satisface para todos los valores de h , $h \neq 0$, y tales que

$$0 < |h - 0| < \delta \quad (2)$$

que equivale a

$$-\delta < h - 0 < \delta, \quad h \neq 0,$$

donde δ es un número real positivo. Generalmente, el valor seleccionado para δ dependerá del valor asignado a ε .

Efectuando simplificaciones obvias en (1) y (2) vemos que dada cualquier $\varepsilon > 0$, deseamos seleccionar un número $\delta > 0$, tal que

$$|h| < \varepsilon \quad \text{para todos los valores de } h \text{ para los cuales } 0 < |h| < \delta \quad (3)$$

Es evidente que basta seleccionar cualquier $\delta \leq \varepsilon$ para que (3) sea verdadera.

Como otra ilustración sea,

$$F(x) = 5x - 4.$$

Parece razonable decir que podemos aproximar $F(x)$ hacia 11 tanto como queramos con sólo escoger x suficientemente próxima a 3, sin necesidad de que sea igual a 3. Hagamos más precisa ésta exposición. Obsérvese que

$$|F(x) - 11| = |5x - 4 - 11| = |5x - 15| = 5|x - 3|.$$

Supóngase que deseamos que $F(x)$ difiera de 11 en menos de 0.05;

$$|F(x) - 11| < 0.05 \quad \text{ó} \quad -0.05 < 5(x - 3) < 0.05.$$

Para que se satisfaga esta condición basta escoger un valor de x tal que

$$-0.01 < x - 3 < 0.01, \quad x \neq 3$$

$$\text{ó} \quad 0 < |x - 3| < 0.01$$

De modo semejante, no importa que tan pequeña sea una ϵ dada, podemos hacer

$$|F(x) - 11| < \epsilon \quad (4)$$

tomando

$$0 < |x - 3| < \epsilon/5. \quad (5)$$

Por supuesto si la condición (4) se satisface cuando $0 < |x - 3| < \delta$, donde $\delta = \epsilon/5$, también se satisfará cuando $0 < |x - 3| < \delta$ para $\delta \leq \epsilon/5$. Escribimos

$$\lim_{x \rightarrow 3} F(x) = 11 \quad (6)$$

y con esto indicamos que, "dada cualquier $\epsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ (en este caso $\delta \leq \epsilon/5$), tal que $|F(x) - 11| < \epsilon$ para todos los valores de x que satisfacen la expresión $0 < |x - 3| < \delta$ ".

En forma más general, denótese por $F(x)$ la correspondiente de x ante la función F :

$$F = \{(x, y) \mid y = F(x), x \in X\}.$$

Supóngase que a es cualquier número real, no necesariamente elemento del dominio X de F , que tiene la propiedad de que todo intervalo abierto que contenga a contiene también elementos de X , distintos de a .

El límite de $F(x)$ cuando x tiende a a es b , lo cual escribimos:

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = b, \quad (7)$$

si dada cualquier $\epsilon > 0$, existe una $\delta > 0$, tal que

$$|F(x) - b| < \epsilon$$

para todos los valores de $x \in X$, que satisfagan

$$0 < |x - a| < \delta.$$

Si existe un número b para el cual (7) es verdadera, decimos que existe $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$; si, por otra parte, no hay tal número b , decimos que el $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ no existe. Si existe $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$, puede demostrarse que es único.

La existencia del límite de $F(x)$ cuando x tiende a a no depende de $F(a)$; en realidad $F(a)$ puede estar definida o no, puesto que a no está necesariamente en el dominio de F . Si existen $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ y $F(a)$, éstos pueden ser iguales o no.

Aunque la definición de límite establece que para que b sea el límite de $F(x)$ cuando x tiende a a , debe existir una δ para cada ϵ , debe observarse que si hemos encontrado una δ correspondiente a una ϵ dada, entonces δ' , tal que $0 < \delta' < \delta$, debe ser igualmente satisfactoria para la ϵ dada.

Frecuentemente se nos presentan funciones F , tales que $F(x)$ está especificada para todo un intervalo, excepto para algún valor de x , digamos a , y deseamos saber si existe $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$. En el ejemplo 1 se ilustra un procedimiento para analizar este tipo de situaciones.

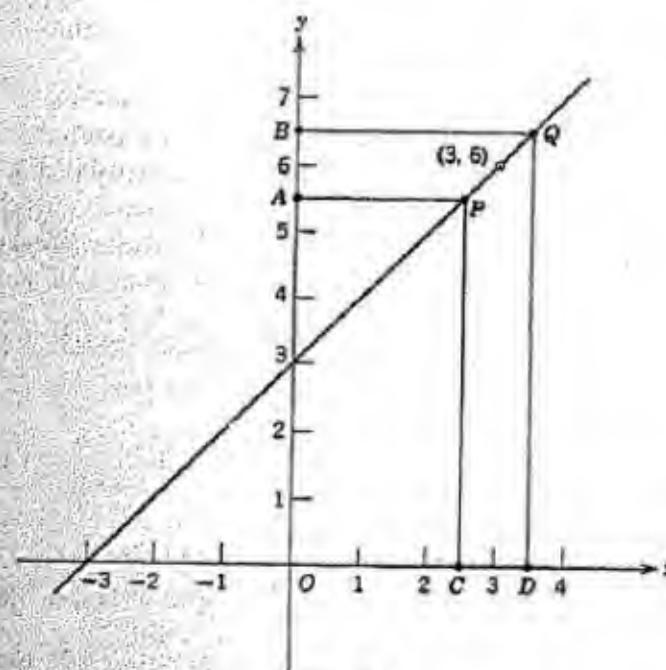


Fig. 2.1

Ejemplo 1. Considérese la función G especificada por

$$G(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$$

¿Existe el $\lim_{x \rightarrow 3} G(x)$? Si es así ¿Cuánto vale?

Solución. $G(3)$ no está definida, puesto que no se permite la división entre cero. Sin embargo obsérvese que

$$G(x) = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3 \quad \text{si } x \neq 3.$$

La gráfica de G es la recta cuya ecuación es $y = x + 3$, excepto que el punto $(3, 6)$ no pertenece a la gráfica; esto sucede porque 3 no está en el dominio de G (Fig. 2.1).

Es evidente que podemos aproximar $G(x)$ a 6 cuanto queramos, con sólo escoger una x suficientemente cerca de 3, esto es,

$$\lim_{x \rightarrow 3} G(x) = 6.$$

Vamos a probar que esto realmente sucede, usando la definición de límite.

Puesto que $G(x) = x + 3$ si $x \neq 3$, entonces para $x \neq 3$

$$|G(x) - 6| = |x + 3 - 6| = |x - 3|.$$

En esta situación, dada una $\varepsilon > 0$, basta escoger $\delta = \varepsilon$. Porque nótese que si $\delta = \varepsilon$,

$$|G(x) - 6| < \varepsilon \text{ cuando } 0 < |x - 3| < \delta.$$

Hemos probado que $\lim_{x \rightarrow 3} G(x) = 6$.

Cualquier valor δ' tal que $0 < \delta' \leq \delta$ habría sido igualmente satisfactorio en este caso.

Indiquemos el significado geométrico del análisis precedente.

Con el punto $(0, 6)$ como punto medio, trácese un intervalo AB , sobre el eje Y , de longitud 2ε . (Fig. 2.1). Dibújense líneas horizontales que pasen por A y por B ; éstas forman una banda de ancho 2ε . En los puntos P y Q , donde estas líneas horizontales intersectan la gráfica de la función dada, trácese líneas verticales, que crucen al eje X en los puntos C y D . La abscisa de cualquier punto entre C y D , excepto el 3, formará un par mediante la función G , con un número que será la ordenada de un punto entre A y B . Por tanto, una selección apropiada para δ será, en este caso, la mitad de la longitud del intervalo CD , con centro en $(3, 0)$.

Puede suceder que para una $F(x)$ y una a dadas, no haya un número b con la propiedad de que

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = b.$$

En este caso, como ya hemos establecido, decimos que no existe $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$. Para ilustrar esto considérese la función G , mayor entero en x , que está especificada por

$$G(x) = [x],$$

y cuya gráfica está dada en la Fig. 1.20. Demostraremos que no existe

$$\lim_{x \rightarrow 2} G(x)$$

Podemos sentirnos inclinados a suponer que dicho límite es 2, puesto que los valores de $G(x) = [x]$ están próximos a 2 cuando x es igual a 2 ó un poco mayor que 2. Pero si x es un poco menor que 2, entonces $[x] = 1$. Esto es para $0 < \delta < 1$,

$$G(x) = 1 \text{ si } 2 - \delta < x < 2,$$

y

$$G(x) = 2 \text{ si } 2 < x < 2 + \delta$$

* "Cuando" está usado aquí, y en expresiones semejantes, con el significado de "para todos los valores de x , que son elementos del dominio de la función, para los cuales".

De aquí que $G(x)$ no se puede aproximar a 2 cuanto deseemos con sólo aproximarse a 2. O sea que dada $\varepsilon > 0$ no existe una $\delta > 0$ tal que:

$$|G(x) - 2| < \varepsilon \text{ para } 0 < |x - 2| < \delta.$$

Realmente, no hay número b tal que $\lim_{x \rightarrow 2} G(x) = b$, porque no importa qué tan pequeña hagamos a δ , siempre existirán números c_1 y c_2 que satisfagan $0 < |x - 2| < \delta$, y para los cuales $G(c_1) = 1$ y $G(c_2) = 2$.

Sin embargo, sí existen números llamados "límite por la derecha" y "límite por la izquierda" de $G(x)$ cuando x tiende a 2.

Si para cualquier $\varepsilon > 0$ dada, existe una $\delta > 0$ tal que

$$|F(x) - b_1| < \varepsilon \text{ cuando } 0 < a - x < \delta,$$

b_1 es el **límite por la izquierda** de $F(x)$ cuando x tiende a a . Para esto escribimos

$$\lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = b_1.$$

La desigualdad $0 < a - x < \delta$ es equivalente a $a - \delta < x < a$, de modo que aquí se restringen las x a valores menores que a ; $F(x)$ puede estar definida para $x > a$ o no.

Si para cualquier $\varepsilon > 0$ dada, existe una $\delta > 0$ tal que

$$|F(x) - b_2| < \varepsilon \text{ cuando } 0 < x - a < \delta,$$

b_2 es el **límite por la derecha** de $F(x)$ cuando x tiende a a . Para esto ponemos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = b_2.$$

La desigualdad $0 < x - a < \delta$ es equivalente a $a < x < a + \delta$, de modo que aquí se restringen las x a valores mayores que a ; $F(x)$ puede estar o no definida para x menores o iguales que a .

Mediante la notación y conceptos para límite por la derecha y por la izquierda y refiriéndonos de nuevo a $G(x) = [x]$, escribimos

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} G(x) = 1 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 2^+} G(x) = 2.$$

Se puede demostrar que para que exista el $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$, es necesario y suficiente que existan $\lim_{x \rightarrow a^-} F(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$ y que sean iguales.

Al usar la definición de límite para demostrar que $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = b$, necesitamos hacer ver que dada cualquier $\varepsilon > 0$, podemos hallar una $\delta > 0$ tal que

$$|F(x) - b| < \varepsilon \text{ cuando } 0 < |x - a| < \delta.$$

Como primer paso, factorizamos $|x - a|$ de $|F(x) - b|$; esto es, expresamos $|F(x) - b|$ en la forma

$$|F(x) - b| = |x - a| \cdot |G(x)|.$$

Si es posible encontrar dos números positivos, r y s , que tengan la propiedad de que $0 < |x - a| < r$ implique que $|G(x)| \leq s$, entonces

$$|F(x) - b| \leq |x - a| \cdot s \text{ cuando } 0 < |x - a| < r.$$

Ahora bien,

$$|x-a| \cdot s < \varepsilon \text{ cuando } |x-a| < \varepsilon/s.$$

Si escogemos a δ como el menor de los números r y ε/s , entonces las dos desigualdades

$$0 < |x-a| < r \text{ y } |x-a| < \varepsilon/s$$

se cumplen, y

$$|F(x) - b| = |x-a| \cdot |G(x)| \leq |x-a| \cdot s < \varepsilon$$

cuando

$$0 < |x-a| < \delta.$$

Ejemplo 2. Pruebe que $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x) = 3$, encontrando δ en términos de una $\varepsilon > 0$ dada, de modo que

$$|x^2 + 2x - 3| < \varepsilon \text{ cuando } 0 < |x-1| < \delta.$$

Solución. Sea $F(x) = x^2 + 2x$. Entonces

$$|F(x) - 3| = |x^2 + 2x - 3| = |x-1| \cdot |x+3|.$$

Como a nosotros nos interesa el límite $F(x)$ cuando x tiende a 1, restringiremos nuestras consideraciones a valores de x cercanos a 1 pero distintos de 1. Así pues, hacemos

$$|x-1| < 1, \text{ ó } -1 < x-1 \text{ ó } 0 < x < 2.$$

Deseamos hallar un número s para el cual $|x+3| < s$ cuando $|x-1| < 1$. De la desigualdad $0 < x < 2$ vemos que $3 < x+3 < 5$, de modo que $|x+3| < 5$ luego 5 es un valor apropiado para s . En consecuencia:

$$|x-1| \cdot |x+3| < 5|x-1| \text{ cuando } |x-1| < 1.$$

Ahora bien, $5 < |x-1| < \varepsilon$ cuando $|x-1| < \varepsilon/5$. Por tanto si δ se toma como el menor de los números 1 y $\varepsilon/5$,

$$|F(x) - 3| < \varepsilon \text{ cuando } 0 < |x-1| < \delta.$$

Por ejemplo, si se nos da $\varepsilon = 10$, haremos $\delta = 1$. Entonces

$$|F(x) - 3| < 5|x-1| < 5 \text{ cuando } 0 < |x-1| < 1.$$

Si se nos da $\varepsilon = 2$, haremos $\delta = \frac{2}{5}$. Entonces

$$|F(x) - 3| < 5|x-1| < 2 \text{ cuando } 0 < |x-1| < \frac{2}{5}.$$

La determinación del $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ mediante el uso directo de la definición es en general, difícil. El límite se determinará usualmente con la ayuda de ciertos teoremas que en seguida consideraremos.

Teorema 1. Dados los números reales m y b

$$\lim_{x \rightarrow a} (mx + b) = ma + b.$$

Demostración. Sea $F(x) = mx + b$. Entonces

$$|F(x) - ma - b| = |mx + b - ma - b| = |m(x-a)| = |m| \cdot |x-a|.$$

Caso 1, $m \neq 0$. Dada cualquier $\varepsilon > 0$, $|m| \cdot |x-a| < \varepsilon$, siempre que $|x-a| < \varepsilon/|m|$. Por tanto si $\delta = \varepsilon/|m|$,

$$|F(x) - ma - b| < \varepsilon \text{ cuando } 0 < |x-a| < \delta.$$

Caso 2, $m = 0$. Para $m = 0$, $|mx + b - ma - b| = 0$. Entonces, dada cualquier $\varepsilon > 0$, $|F(x) - ma - b| < \varepsilon$ para todos los valores de x y consecuentemente

$$|F(x) - ma - b| < \varepsilon \text{ cuando } 0 < |x-a| < \delta,$$

para cualquier $\delta > 0$.

Como casos especiales del Teorema 1 tenemos los siguientes:

Teorema 2. $\lim_{x \rightarrow a} b = b$.

Teorema 3. $\lim_{x \rightarrow a} x = a$.

El Teorema 2 se sigue del Teorema 1, haciendo $m = 0$ en éste último; el Teorema 3 se sigue del 1 haciendo $m = 1$ y $b = 0$ en el Teorema 1.

Teorema 4. Si existe el $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ y k es un número real, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} k \cdot F(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} F(x) \quad (8)$$

Demostración. Sea $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = b$.

Debemos probar que

$$\lim_{x \rightarrow a} k \cdot F(x) = k \cdot b,$$

o sea demostrar que dada cualquier $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$, tal que

$$|k \cdot F(x) - k \cdot b| < \varepsilon \text{ cuando } 0 < |x-a| < \delta.$$

Es obvio que, en el caso trivial en que $k = 0$, se cumple la igualdad (8), de modo que consideremos que $k \neq 0$. Nótese que

$$|k \cdot F(x) - k \cdot b| = |k| \cdot |F(x) - b|.$$

En consecuencia

$$|k \cdot F(x) - k \cdot b| < \varepsilon \text{ cuando } |F(x) - b| < \varepsilon' \quad (9)$$

donde $\varepsilon' = \varepsilon/|k|$. Puesto que $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = b$, dada una $\varepsilon' > 0$, existe una $\delta > 0$ para la cual

$$|F(x) - b| < \varepsilon' \text{ cuando } 0 < |x-a| < \delta.$$

Para esta misma δ se sigue, de la (9), que $|k \cdot F(x) - k \cdot b| < \varepsilon$, y así queda demostrado el Teorema.

Teorema 5. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, $a \geq 0$.

Demostración. *Caso 1: $a = 0$.* Tendremos que probar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0, \quad (10)$$

o sea, deberemos de hacer ver que dada cualquier $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que

$|\sqrt{x}-0| = \sqrt{x} < \varepsilon$ cuando $0 < |x-0| = |x| < \delta$ y $x \in [0; +\infty)$, o sea cuando $0 < x < \delta$. Obsérvese que $\sqrt{x} < \varepsilon$ si $x < \varepsilon^2$. De donde, si $\delta = \varepsilon^2$, entonces

$$\sqrt{x} < \varepsilon \text{ cuando } 0 < |x-0| < \delta.$$

Por tanto queda demostrada (10).

Caso 2: $a > 0$. Deseamos probar que

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a} \quad (11)$$

es decir, demostraremos que para toda $\varepsilon > 0$ dada, existe una $\delta > 0$ tal que

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon \text{ cuando } 0 < |x-a| < \delta \text{ y } x \in [0; +\infty).$$

Obsérvese que para $x \geq 0$

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} (\sqrt{x} - \sqrt{a}) = \frac{x-a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{1}{\sqrt{a}} |x-a|.$$

Entonces $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$ siempre que

$$(1/\sqrt{a}) |x-a| < \varepsilon \text{ ó } |x-a| < \sqrt{a} \varepsilon.$$

O sea que si $\delta = \sqrt{a} \varepsilon$, entonces

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon \text{ cuando } 0 < |x-a| < \delta.$$

Por tanto queda demostrada (11).

Teorema 6. Si U y V son funciones para las cuales existen

$$\lim_{x \rightarrow a} U(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} V(x)$$

entonces

$$(i) \lim_{x \rightarrow a} [U(x) + V(x)] = \lim_{x \rightarrow a} U(x) + \lim_{x \rightarrow a} V(x)$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow a} [U(x) - V(x)] = \lim_{x \rightarrow a} U(x) - \lim_{x \rightarrow a} V(x)$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow a} [U(x) \cdot V(x)] = \left[\lim_{x \rightarrow a} U(x) \right] \cdot \left[\lim_{x \rightarrow a} V(x) \right]$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow a} \frac{U(x)}{V(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} U(x)}{\lim_{x \rightarrow a} V(x)}; \text{ si } \lim_{x \rightarrow a} V(x) \neq 0$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{U(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} U(x)}; \text{ si } n \text{ es un entero positivo}$$

Nótese que cuando en (v) n es entero par, el universo de la variable queda restringido a valores para los que $U(x) \geq 0$. Nótese, asimismo, que en los Teoremas 1, 2, 3, 4, 5 y 6 “=” significa “existe y es igual”. Por ejemplo, el Teorema 6(i) puede leerse como sigue:

Si U y V son funciones para las cuales existen $\lim_{x \rightarrow a} U(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} V(x)$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} [U(x) + V(x)]$ existe y es igual a $[\lim_{x \rightarrow a} U(x) + \lim_{x \rightarrow a} V(x)]$.

El Teorema 4 es un caso especial del Teorema 6(iii) cuando $U(x) = k$.

El Teorema 5 es un caso especial del Teorema 6(v) con $n = 2$ y $U(x) = x$.

El Teorema 6(i) se puede extender a la suma de n términos, $F_1(x) + \dots + F_n(x)$, y el Teorema 6(iii) puede ser extendido al producto de n términos, $F_1(x) \cdots F_n(x)$. En particular, el límite de la enésima potencia de $F(x)$ es la enésima potencia del límite de $F(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow a} [F(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} F(x) \right]^n. \quad (12)$$

Demostraremos ahora el Teorema 6(i); las demás partes del Teorema 6 se pueden demostrar por un procedimiento semejante.

Demostración del Teorema 6(i). Sea

$$\lim_{x \rightarrow a} U(x) = b \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} V(x) = c.$$

Deseamos probar que

$$\lim_{x \rightarrow a} [U(x) + V(x)] = \lim_{x \rightarrow a} U(x) + \lim_{x \rightarrow a} V(x) = b + c.$$

Para esto necesitamos demostrar que para toda $\varepsilon > 0$ dada, existe una $\delta > 0$ tal que

$$|[U(x) + V(x)] - (b + c)| < \varepsilon$$

para todos los valores de x en el dominio de $U + V$, que satisfagan la desigualdad $0 < |x-a| < \delta$. Por hipótesis, para cualquier $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ dada, existen números positivos δ_1 y δ_2 tales que

$$|U(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ cuando } 0 < |x-a| < \delta_1,$$

$$\text{y } |V(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ cuando } 0 < |x-a| < \delta_2.$$

Sea δ el menor de δ_1 y δ_2 . Entonces se satisfacen las desigualdades

$$|U(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } |V(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2}$$

cundo $0 < |x-a| < \delta$. Por tanto:

$$\begin{aligned} |[U(x) + V(x)] - (b + c)| &= |[U(x) - b] + [V(x) - c]| \\ &\leq |U(x) - b| + |V(x) - c| \quad (\text{Por el Teorema 5 de la Sección 1.8}) \end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

cundo $0 < |x-a| < \delta$. Así queda demostrado el teorema. ■

Los Teoremas 1, 2, 3, 4, 5 y 6 nos permiten determinar los límites de combinaciones algebraicas como lo ilustraremos en los ejemplos 3, 4, 5 y 6.

Ejemplo 3. Evalúe $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 4)$.

Solución. Tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 4) = \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2) + \lim_{x \rightarrow 2} 4,$$

según el Teorema 6(i), siempre que existan los límites del segundo miembro de esta ecuación. Notamos que

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2) = 3 \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right) \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right) = 3(2)(2) = 12,$$

por los Teoremas 4 y 6(iii), y que $\lim_{x \rightarrow 2} 4 = 4$, por el Teorema 2. De aquí que los límites en cuestión existen y en consecuencia tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 4) = 12 + 4 = 16.$$

Ejemplo 4. Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-5}{2x+7}$.

Solución. Tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-5}{2x+7} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (3x-5)}{\lim_{x \rightarrow 2} (2x+7)}$$

según el Teorema 6(iv), si los límites del lado derecho existen y si el límite del denominador no es cero. Luego, procediendo como en el ejemplo 3, hallamos que

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x-5) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 2} (2x+7) = 11.$$

De donde

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-5}{2x+7} = \frac{1}{11}.$$

Al tratar de evaluar $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ para una función F , dada y tal que $F(x) = \frac{U(x)}{V(x)}$; frecuentemente encontraremos situaciones en que $\lim_{x \rightarrow a} V(x) = 0$. En tal caso es claro que el Teorema 6(iv) no se puede aplicar; sin embargo, menudo podemos usar el siguiente teorema.

Teorema 7. Si F y G son dos funciones y $F = G$, excepto para un par ordenado cuya primera componente es a , y si existe $\lim_{x \rightarrow a} G(x)$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} G(x).$$

Demostración. Por hipótesis existe $\lim_{x \rightarrow a} G(x)$; llamémosle b . De aquí que para cualquier $\epsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que

$$|G(x) - b| < \epsilon \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \delta, \quad (13)$$

entendiéndose que $x \in \text{dominio de } G$.

También por hipótesis sabemos que

$\{x \mid x \in \text{dominio de } F \text{ y } x \neq a\} = \{x \mid x \in \text{dominio de } G \text{ y } x \neq a\}$, y expresando este conjunto por X

$$F(x) = G(x) \quad \text{para toda } x \in X.$$

Luego

$$F(x) - b = G(x) - b \quad \text{para toda } x \in X.$$

El conjunto $\{x \mid 0 < |x - a| < \delta, x \in \text{dominio de } G\}$, mencionado en (13), es subconjunto de X . Por tanto, usando (13) podemos afirmar que, dada cualquier $\epsilon > 0$, para toda x en el dominio de F para la cual $0 < |x - a| < \delta$, tenemos

$$|F(x) - b| = |G(x) - b| < \epsilon.$$

O sea que $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = b$, y así el teorema queda demostrado. ■

Este teorema se aplica en los ejemplos 5 y 6.

Ejemplo 5. En el ejemplo 1 demostramos, por el uso directo de la definición de límite, que

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6.$$

Establezca este mismo resultado usando los teoremas apropiados.

Solución. El Teorema 6(iv) nos dice que si $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9)$ y $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3)$ existen, y que si $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3)}.$$

Procediendo como en el ejemplo 4, hallamos que $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 0$; entonces el Teorema 6(iv) no es aplicable.

Sin embargo observe que si F y G son dos funciones dadas por

$$F(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} \quad \text{y} \quad G(x) = x + 3,$$

entonces

$$F(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} = x + 3 = G(x), \quad \text{para toda } x \neq 3.$$

Esto es, $F = G$ excepto para un par ordenado cuya primera componente es 3. Además $\lim_{x \rightarrow 3} G(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6$ y así, por el Teorema 7, tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 3} F(x) = \lim_{x \rightarrow 3} G(x) = 6.$$

Ejemplo 6. Calcule $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 8}{h}$.

Solución. Ya que $\lim_{h \rightarrow 0} h = 0$, no resulta aplicable el Teorema 6(iv). Notamos, sin embargo, después de simplificar el numerador, que h es factor de él. Por tanto podemos escribir

$$\frac{(2+h)^3 - 8}{h} = \frac{3h + 3h^2 + h^3}{h} = 3 + 3h + h^2$$

para toda $h \neq 0$. Como por aplicación de los Teoremas 6(i) y 6(iii) vemos que $\lim_{h \rightarrow 0} (3 + 3h + h^2) = 3$, podemos usar el Teorema 7 para escribir

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3 + 3h + h^2) = 3.$$

EJERCICIOS

1. Usando la definición de límite, demuestre que si $F(x) = 2x + 3$, entonces $\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = 5$, encontrando δ en términos de un número $\epsilon > 0$ dado, tal que

$$|F(x) - 5| < \epsilon \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - 1| < \delta.$$

2. Demuestre que si $F(x) = \frac{1}{2}x + 6$, entonces $\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \frac{13}{2}$, encontrando δ en términos de un número $\epsilon > 0$ dado, tal que

$$|F(x) - \frac{13}{2}| < \epsilon \text{ cuando } 0 < |x - 1| < \delta.$$

3. Procediendo como en el ejemplo 1 de esta sección demuestre que si $F(x) = (2x^2 - 3x - 2)/(x - 2)$, entonces $\lim_{x \rightarrow 2} F(x) = 5$, encontrando δ en términos de un número $\epsilon > 0$ dado, tal que

$$|F(x) - 5| < \epsilon \text{ cuando } 0 < |x - 2| < \delta.$$

4. Demuestre que $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 2x - 1) = 15$, encontrando una δ en términos de una $\epsilon > 0$ dada, tal que

$$|(3x^2 + 2x - 1) - 15| < \epsilon \text{ cuando } 0 < |x - 2| < \delta.$$

5. Demuestre que si $F(x) = \frac{|x|}{x}$, existen los límites por la derecha y por la izquierda, expresados por

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x), \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$$

respectivamente. Calcúlelos. ¿Son iguales los dos límites? ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 0} F(x)$? Explique su respuesta.

En los ejercicios 6-13 use uno o más de los Teoremas 1-7 para calcular el límite indicado.

- | | |
|--|---|
| 6. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x + 3)$. | 7. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x^2 + 4}$. |
| 8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 + 2x - 3}$. | 9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$. |
| 10. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x + 3}$. | 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 7x}{x}$. |
| 12. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$. | 13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2 + x} - \frac{1}{2} \right)$. |

14. Demuestre que $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$.

15. Demuestre que $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$, siendo n un entero positivo.

16. Demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow 0} (c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_{n-1} x + c_n) = c_0 a^n + c_1 a^{n-1} + \dots + c_{n-1} a + c_n$$

donde las c son números reales y n es un entero positivo.

17. Dada $F(x) = x^2 + (\sqrt{x^2}/x)$, calcule lo siguiente:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x); \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x).$$

En cada uno de los ejercicios 18-24 calcule $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$ para

$F(x)$ propuesta.

- | | |
|-------------------------|-------------------------------|
| 18. $F(x) = 2x^2$. | 19. $F(x) = \frac{1}{4}x^3$. |
| 20. $F(x) = 1/x$. | 21. $F(x) = x^a$. |
| 22. $F(x) = \sqrt{x}$. | |

Sugestión: Después de hallar que $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$, racionalice el numerador de la fracción del lado derecho, multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$. Tras la aplicación a este resultado, de los teoremas apropiados sobre límites, será necesario calcular $\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{x+h}$; este límite se encuentra usando el teorema 6(v), y así $\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{x+h} = \sqrt{\lim_{h \rightarrow 0} (x+h)} = \sqrt{x}$.

$$23. F(x) = \sqrt[3]{x}.$$

$$24. F(x) = 1/\sqrt{x}.$$

En los ejercicios 25-28 calcule el límite de $G(h)$ cuando $h \rightarrow 0$.

$$25. G(h) = \frac{\sqrt{3+h} - \sqrt{3}}{h}.$$

$$26. G(h) = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h}.$$

$$27. G(h) = \frac{\sqrt[3]{2+h} - \sqrt[3]{2}}{h}.$$

$$28. G(h) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+h}}{h}.$$

29. Demuestre que si

$$G(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para } x > 0 \\ x & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

entonces existen los límites por la izquierda y por la derecha, $\lim_{x \rightarrow 0^-} G(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x)$ respectivamente, y encuéntrelos. ¿Son iguales dichos límites? ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 0} G(x)$? Si así es, ¿cuánto vale?

30. Demuestre que si $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = b$ y si $b > 0$, entonces existe un número $\rho > 0$, tal que

$$F(x) > 0 \text{ cuando } x \in (a - \rho; a) \cup (a; a + \rho).$$

Sugestión: Aplique la definición a $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = b$ y seleccione $\epsilon = |b/2|$.

31. Demuestre que si $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = b$ y si $b < 0$, entonces existe un número $\rho > 0$, tal que

$$F(x) < 0 \text{ cuando } x \in (a - \rho; a) \cup (a; a + \rho).$$

2.2 Algunos límites trigonométricos. En el capítulo 1 usamos la función seno Sen, y la función coseno Cos, e indicamos que el dominio de cada una de ellas es el conjunto de los números reales. Por ejemplo, hemos definido la función Sen como

$$\text{Sen} = \{(x, y) \mid y = \sin x, x \in \mathbb{R}\}.$$

Esta definición depende del significado de $\sin x$, siendo x un número real. Recordemos las definiciones de $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\csc x$, $\sec x$ y $\cot x$, donde x es un número real.

Construyamos un círculo con centro en el origen de un sistema coordenado rectangular y con radio unitario (Fig. 2.2). Dado un número real x , partimos del punto $(1, 0)$ y avanzamos una distancia $|x|$ sobre la circunferencia, moviéndonos en sentido contrario a las manecillas del reloj si x es positiva y en el mismo sentido

si x es negativa. Designemos por P , al punto donde nos detenemos. Este punto tendrá coordenadas (a, b) , y definimos:

$$\operatorname{sen} x = b \quad \operatorname{csc} x = \frac{1}{b} \text{ si } b \neq 0$$

$$\cos x = a \quad \sec x = \frac{1}{a} \text{ si } a \neq 0$$

$$\tan x = \frac{b}{a} \text{ si } a \neq 0 \quad \cot x = \frac{a}{b} \text{ si } b \neq 0.$$

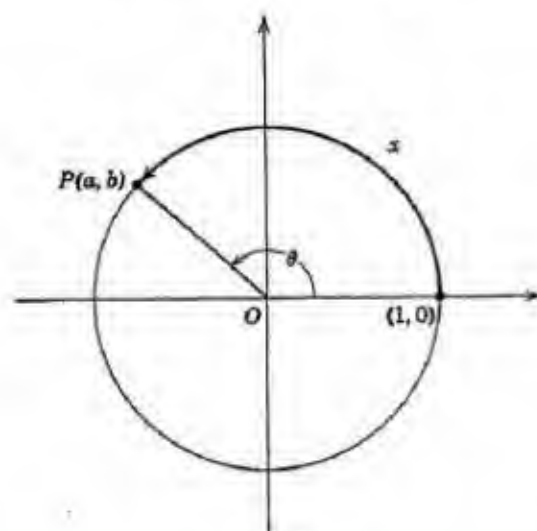


Fig. 2.2

Estas definiciones se relacionan con la trigonometría de los ángulos como sigue: si x es un número real y si θ es un ángulo cuya medida en radianes es x , entonces

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \theta, \quad \cos x = \cos \theta, \quad \text{etc.}$$

Ahora podemos definir las seis funciones trigonométricas:

$$\operatorname{Sen} = \{(x, y) \mid y = \operatorname{sen} x, x \in \mathbb{R}\}$$

$$\operatorname{Cos} = \{(x, y) \mid y = \cos x, x \in \mathbb{R}\}$$

$$\operatorname{Tan} = \{(x, y) \mid y = \tan x, x \in \mathbb{R}, x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}\}$$

$$\operatorname{Ccs} = \{(x, y) \mid y = \operatorname{csc} x, x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi\}$$

$$\operatorname{Sec} = \{(x, y) \mid y = \sec x, x \in \mathbb{R}, x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}\}$$

$$\operatorname{Cot} = \{(x, y) \mid y = \cot x, x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi\}$$

siendo n cualquier entero.

Recordando la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$, se ve natural aseverar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x = 0:$$

Para demostrar (14), primero demostraremos que si $|x| < \pi/2$, entonces $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$. Para probar esto consideramos dos casos: (i) $0 < x < \pi/2$ y (ii) $-\pi/2 < x < 0$, representados en la Fig. 2.3. En esta figura, los círculos tienen radios unitarios y los ángulos están medidos en radianes. Notamos que la longitud del segmento MP es $|\operatorname{sen} x|$ y que la longitud del arco RP es $|x|$. Además vemos que

la longitud de la cuerda $PQ < \text{la longitud del arco } PQ$.

Por tanto $2|\operatorname{sen} x| < 2|x|$, ó $|\operatorname{sen} x| < |x|$ para $-\pi/2 < x < \pi/2$ y $x \neq 0$.

Obviamente, $|\operatorname{sen} x| = |x|$ cuando $x = 0$, y así hemos probado que

$$|\operatorname{sen} x| \leq |x| \text{ cuando } |x| < \pi/2. \quad (15)$$

Ahora bien, (14) se sigue inmediatamente de (15); dada una $\varepsilon > 0$; si escogemos a δ como el menor de los números ε y $\pi/2$, tendremos, según (15)

$$|\operatorname{sen} x - 0| < |x| < \varepsilon \text{ cuando } 0 < |x - 0| < \delta,$$

esto es, $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x = 0$.

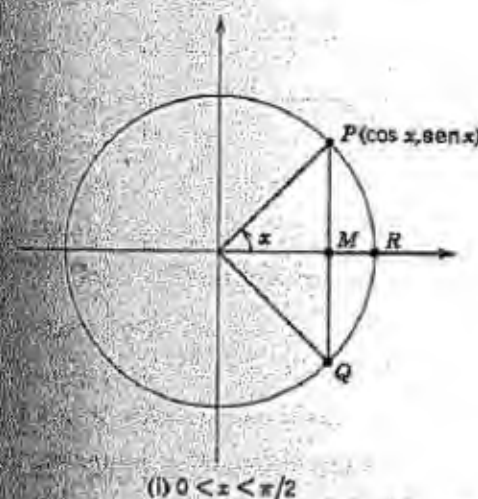
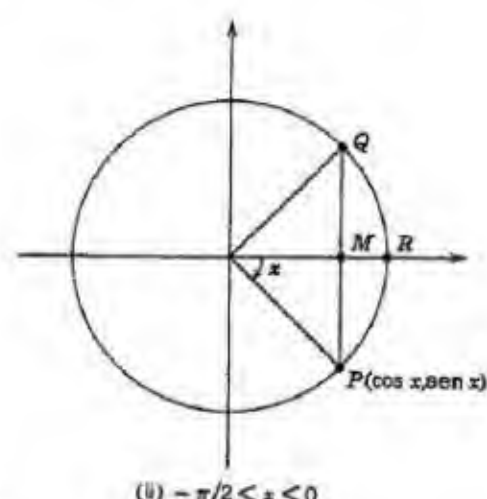
(i) $0 < x < \pi/2$ (ii) $-\pi/2 < x < 0$

Fig. 2.3

En forma semejante, recordando la gráfica de $y = \cos x$, es natural aseverar que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1: \quad (16)$$

Esto se sigue inmediatamente de que

$$|1 - \cos x| \leq |x| \text{ cuando } |x| < \pi/2, \quad (17)$$

que ahora probaremos. Puesto que $\cos(-x) = \cos x$, basta probar (17) para el caso en que $0 \leq x < \pi/2$ y para ello usaremos la Fig. 2.4, en la que el círculo es de radio unitario y el ángulo está medido en radianes. En esta figura nota-

mos que la longitud de OM es $\cos x$, la de MR es $|1 - \cos x|$ y la del arco RP es $|x|$. Además notamos que

la longitud de $MR <$ la longitud de la cuerda $RP <$ la longitud del arco RP .

Por tanto

$$|1 - \cos x| < |x| \text{ cuando } 0 < x < \pi/2.$$

Es obvio que $|1 - \cos x| = |x|$ cuando $x = 0$, y así hemos demostrado (17). Nótese que (16) se sigue de (17) en la misma forma en que (14) se sigue de (15). Dejamos al estudiante completar los detalles de la demostración.

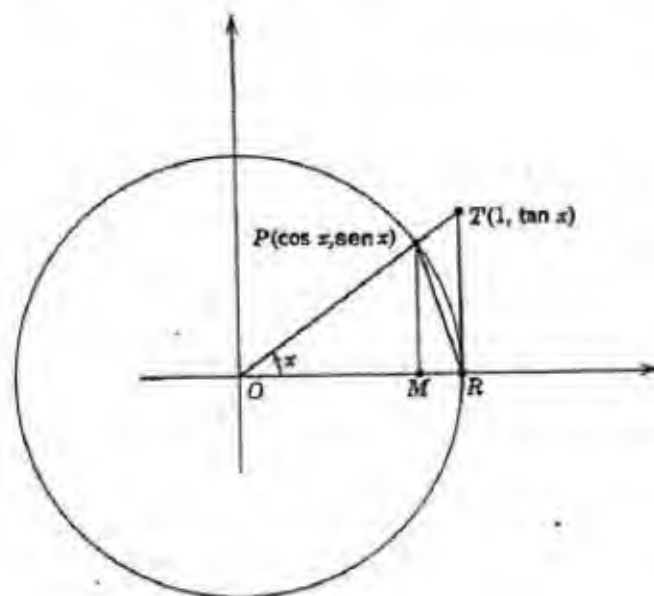


Fig. 2.4

Aunque los límites (14) y (16) pueden ser sugeridos por la intuición, fácilmente podríamos afirmar lo mismo con respecto a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen x}{x} = 1;$$

Sin embargo, (18) es verdadera siempre que el universo sea el conjunto de números reales como demostraremos en seguida. Considérese la Fig. 2.4, en la cual notamos que si $0 < \theta < \pi/2$, entonces

$$0 < (\text{área del } \triangle ORP) < (\text{área del sector } ORP) < (\text{área del } \triangle ORT)$$

Ahora bien

$$\text{área del } \triangle ORP = \frac{1}{2}(OR)(MP) = \frac{1}{2}(1)(\sen x) = \frac{1}{2} \sen x,$$

y

$$\text{área del } \triangle ORT = \frac{1}{2}(OR)(RT) = \frac{1}{2}(1)(\tan x) = \frac{1}{2} \tan x.$$

Como la fórmula para el área de un sector circular puede no ser familiar, procederemos a obtenerla. Sea A_s el área de un sector de un círculo de radio r , arco s y ángulo del sector x , siendo x la medida del ángulo en radianes (Fig. 2.5). Si $A_c = \pi r^2$ es el área del círculo, tenemos (para $0 < |x| < 2\pi$)

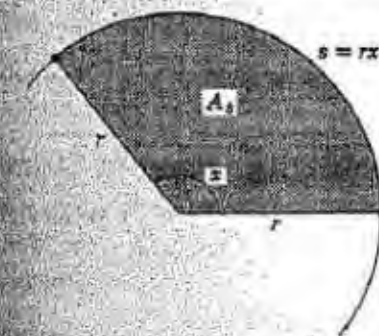


Fig. 2.5

$$\frac{\text{área del sector}}{\text{área del círculo}} = \frac{\text{arco del sector}}{\text{arco del círculo}} \quad \text{o} \quad \frac{A_s}{A_c} = \frac{s}{2\pi r}$$

de donde

$$A_s = \frac{1}{2} r^2 |x|.$$

Por tanto, refiriéndonos a la Fig. 2.4,

$$\text{área del sector } ORP = \frac{1}{2} (1) (x) = \frac{x}{2}.$$

Por otra parte, sustituyendo en (19) hallamos que

$$0 < \sen x < x < \tan x,$$

para $0 < x < \pi/2$. Si multiplicamos ambos lados de la desigualdad $\sen x < x$,

por $1/x$, tenemos $\frac{\sen x}{x} < 1$ y multiplicando ambos lados de la desigualdad

$x < \tan x$; por $\frac{\cos x}{x}$; tenemos $\cos x < \frac{\sen x}{x}$. Por tanto

$$\cos x < \frac{\sen x}{x} < 1 \quad (20)$$

para $0 < x < \pi/2$.

Hasta ahora hemos supuesto que $0 < x < \pi/2$. Sin embargo $\cos(-x) = \cos x$ y $\frac{\sen(-x)}{-x} = \frac{-\sen x}{-x} = \frac{\sen x}{x}$. Por lo que la desigualdad (20) se cumple para $-\pi/2 < x < 0$. Esto es, (20) es válida para $-\pi/2 < x < 0$ ó para $0 < x < \pi/2$. Ahora bien, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ y $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$, y puesto que según (20)

$\frac{\sen x}{x}$ está entre $\cos x$ y 1 para valores de x cercanos a cero, deducimos que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen x}{x} = 1$. Esta deducción la apoyaremos en (20) y en el teorema 8 que enun-

ciaremos sin demostración.

Teorema 8. Si U y V son dos funciones tales que

$$\lim_{x \rightarrow a} U(x) = \lim_{x \rightarrow a} V(x) = b;$$

y F es una función para la cual existe un intervalo abierto $(c; d)$ que tiene la propiedad de que $a \in (c; d)$ y

$$U(x) \leq F(x) \leq V(x) \text{ cuando } x \in (c; d), \quad x \neq a,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = b.$$

Hemos enunciado y demostrado que (18) es válida cuando el universo es el conjunto de los números reales. Entonces, si deseamos considerar a x como la medida de un ángulo, esta medida debe de estar expresada en radianes. Por ejemplo, si β es la medida en grados de un ángulo, no es cierto que $\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\sin \beta}{\beta} = 1$.

Debemos obtener $\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\sin \beta}{\beta}$, de (18) teniendo presente que $\frac{\sin \beta}{\beta} = \frac{\sin x}{(180x/\pi)} = \frac{\pi \sin x}{180x}$, donde x es la medida en radianes, del ángulo cuya medida es β en grados. Por tanto

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\sin \beta}{\beta} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{180} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{\pi}{180}.$$

Muchos resultados del cálculo los desarrollaremos basados en el límite (18). De lo que hasta ahora se ha dicho acerca de este límite, debe resultar claro que cuando se use (18), el universo de la variable ha de ser un conjunto de números reales.

Relacionado con el resultado (18), existe el hecho de que si θ es un ángulo pequeño y si x es la medida en radianes, de θ , entonces $\sin \theta$ y x tienen aproximadamente igual valor. De hecho, si la medida de θ en grados, es 5° ó menos, $\sin \theta$ y x son iguales hasta 3 cifras decimales.

Debe advertirse que mientras el universo sea el conjunto de los números reales, el símbolo usado como variable en

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

no tiene importancia; es igualmente cierto que

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Sin embargo, si k es un número real distinto de 1,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} \neq 1.$$

Pero observamos que $\frac{\sin kx}{x} = k \frac{\sin kx}{kx}$, y consecuentemente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k \cdot \lim_{kx \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} = k \cdot 1 = k.$$

Para llegar a este resultado hemos usado el hecho de que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} = \lim_{kx \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx}$$

Este es un caso especial del Teorema 9.

Teorema 9. Si k es un número real distinto de cero, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = b \iff \lim_{kx \rightarrow ka} F(x) = b.$$

Demostración. Este teorema proviene directamente de la identidad

$$|kx - ka| = |k| \cdot |x - a|.$$

Demostraremos que $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = b$ implica que $\lim_{kx \rightarrow ka} F(x) = b$. El estudiante debe desarrollar una demostración para la recíproca de esta proposición.

Si $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = b$, entonces dada una $\epsilon > 0$, existe una $\delta > 0$, tal que

$$|F(x) - b| < \epsilon \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \delta_1.$$

Si escogemos $0 < |kx - ka| < |k| \delta_1$, tendremos $0 < |k| |x - a| < |k| \delta_1$ o sea $0 < |x - a| < \delta_1$. Luego, dada $\epsilon > 0$, existe una $\delta > 0$, específicamente $\delta = |k| \delta_1$, tal que

$$|F(x) - b| < \epsilon \quad \text{cuando} \quad 0 < |kx - ka| < \delta,$$

es decir, que $\lim_{kx \rightarrow ka} F(x) = b$. ■

EJERCICIOS

Calcule el límite para cada uno de los ejercicios del 1 al 12.

1. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 4h}{h}$

2. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 \sin 5h}{3h}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x \csc x}$

Sugestión: Usar $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$; *Sugestión:* Escriba $\frac{1}{\csc x} = \sin x$.

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x - 6x^3}{x^2}$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/2)}{x}$

9. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h}$

Sugestión: Usar $1 - \cos h = 2 \sin^2(h/2)$.

10. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h^2}$

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 3x}$

12. $\lim_{h \rightarrow 0} h \cos h$

13. Construya tablas de valores para $\sin x$, $\cos x$, y $\tan x$, para los siguientes valores de x (si una de estas tres relaciones trigonométricas no esté definida para un valor dado de x , escriba "no definida", en la tabla):

$$-\pi, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, 2\pi,$$

14. Grafique cada una de las siguientes funciones:

(a) $\{(x, y) \mid y = \sin x, -2\pi \leq x \leq 2\pi\}$.

(b) $\{(x, y) \mid y = \cos x, -2\pi \leq x \leq 2\pi\}$.

(c) $\{(x, y) \mid y = \tan x, -2\pi \leq x \leq 2\pi\}$.

En cada uno de los ejercicios del 15 al 18, resuelva la ecuación dada si el universo es el intervalo $[0; 2\pi)$.

15. $\sin \theta = 0$

16. $\cos \theta = 0$

17. $\sin 2\theta = 2 \sin \theta$

18. $\cos^2 \theta - \sin \theta - \frac{1}{2} = 0$

En cada uno de los ejercicios del 19 al 22, grafique la ecuación dada para el intervalo $[-2\pi; 2\pi]$.

19. $y = x + \sin x$

Sugestión: Use el método llamado de "suma de ordenadas", que está basado en el hecho de que si $F(x) = U(x) + V(x)$, entonces para cualquier $x_1 \in D_F$, $F(x_1) = U(x_1) + V(x_1)$. Es decir, grafique $y = x$ y $y = \sin x$ sobre el mismo sistema coordenado. Luego para cada valor dado x_1 , de x , la ordenada de la gráfica $y = x + \sin x$ será la suma de las ordenadas de las gráficas de $y = x$ y $y = \sin x$.

20. $y = (x/2) + \sin x$

21. $y = \sin x + \cos x$

22. $y = \sin x - \cos x$

23. Grafique la función $F = \{(x, y) \mid y = \sin^2 x, x \in [-\pi; \pi]\}$.

24. Grafique la función G dada por

$$G(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \in [-3\pi; 0) \cup (0; 3\pi] \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

25. Demuestre el teorema 8.

2.3 Continuidad. Hemos visto que para una función $F = \{(x, y) \mid y = F(x)\}$; $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ no depende del valor de $F(a)$, y que dicho límite puede existir aunque $F(a)$ no exista.

La función F es **continua en a** si

- (i) a está en el dominio de F ; esto es, si $F(a)$ está definida;
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$, existe;
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a)$.

Si una función es continua en cada punto de un intervalo dado, es **continua sobre el intervalo**. Si una función no es continua en a , se dice que es **discontinua** o que **tiene una discontinuidad en a** .

Las condiciones (i), (ii) y (iii) de la definición de continuidad en a , a veces se combinan en un solo enunciado:

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a) \quad (21)$$

o lo que es equivalente,

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(a + h) = F(a). \quad (22)$$

En otras palabras, las proposiciones (21) y (22), cuando se interpretan como equivalentes a las condiciones (i), (ii) y (iii), pueden tomarse como definiciones de " F es continua en a ". Hemos supuesto que (21) y (22) son equivalentes, se le pide al lector que lo demuestre, en el ejercicio 23, al final de esta sección.

Debe tenerse cuidado al interpretar los enunciados (21) y (22). Una función puede dejar de ser continua en a , si $F(a)$ no existe, si no existe $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ o si $F(a)$ y $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ no son iguales. Considérense los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. Considérese la función F , dada por

$$F(x) = \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3}, \quad x \neq 3.$$

Note que

$$F(x) = \frac{(2x + 1)(x - 3)}{x - 3} = 2x + 1, \quad x \neq 3.$$

La gráfica de F es la recta cuya ecuación es $y = 2x + 1$, excepto porque le falta el punto $(3, 7)$, como se indica en la Fig. 2.6. Por el teorema 7,

$$\lim_{x \rightarrow 3} F(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (2x + 1) = 7.$$

Para la función F , existe $\lim_{x \rightarrow 3} F(x)$ y es igual a 7. Sin embargo, $F(3)$ no está definida y así pues, F es discontinua en 3.

Ejemplo 2. Considere la función G , dada por

$$G(x) = \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3}, \quad x \neq 3$$

$$G(3) = 4.$$

Como en el ejemplo 1, $G(x) = 2x + 1$ para $x \neq 3$. La gráfica de G es la misma gráfica de F añadiéndole el punto $(3, 4)$, como se indica en la Fig. 2.7. Igual que en el ejemplo 1

$$\lim_{x \rightarrow 3} G(x) = 7.$$

Para la función G , existe $\lim_{x \rightarrow 3} G(x)$ y es igual a 7. Aunque $G(3)$ está definida; el valor de $G(3) = 4$ es diferente del $\lim_{x \rightarrow 3} G(x)$ y por tanto; G es discontinua en 3.

Ejemplo 3. Considere la función H , dada por

$$H(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x - 3}, \quad x \neq 3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{o simplemente, } H(x) = 2x + 1. \\ H(3) = 7. \end{array} \right.$$

Aquí $\lim_{x \rightarrow 3} H(x) = 7$ y $H(3) = 7$, de modo que $\lim_{x \rightarrow 3} H(x) = H(3)$, luego H es continua en 3. La gráfica de H es la recta mostrada en la Fig. 2.8

A veces deseamos expresar la definición de continuidad de una función en a , en términos de desigualdades. Nótese que la proposición (21) significa que dada una $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que

$$|F(x) - F(a)| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

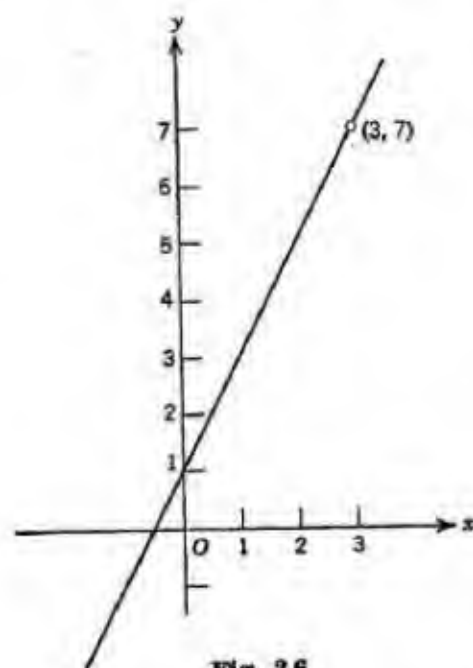


Fig. 2.6

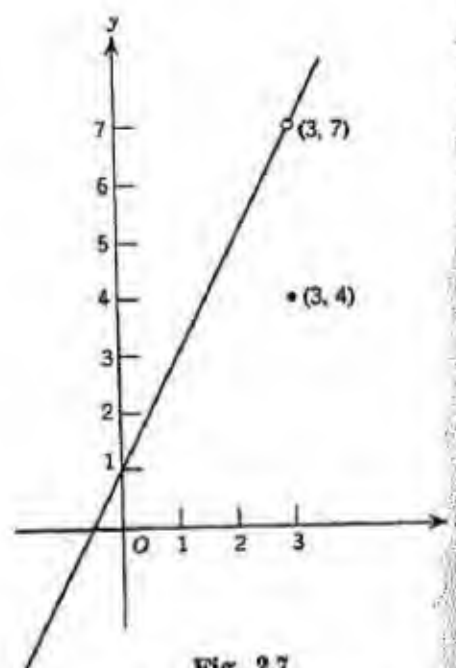


Fig. 2.7

Ya que $F(a) - F(a) = 0$, y $0 < \varepsilon$, escribimos esto simplemente como $|F(x) - F(a)| < \varepsilon$ cuando $|x - a| < \delta$.

Recíprocamente, si a es cualquier número real con la propiedad de que cualquier intervalo abierto que contenga a a , contiene también números distintos de a , de dominio de F , entonces la proposición de que "dada $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que $|F(x) - F(a)| < \varepsilon$ cuando $|x - a| < \delta$ " indica que

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a):$$

Luego la proposición (21) es equivalente a la proposición "dada cualquier $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$, tal que

$$|F(x) - F(a)| < \varepsilon \text{ cuando } |x - a| < \delta,$$

o sea:

$$F(a) - \varepsilon < F(x) < F(a) + \varepsilon$$

$$\text{cuando } a - \delta < x < a + \delta." \quad (2)$$

Si F es continua en a y si $F(a) \neq 0$, entonces se sigue de (23) que existe un número $\delta > 0$ tal que

$$F(x) \neq 0 \text{ cuando } x \in [a - \delta; a + \delta]$$

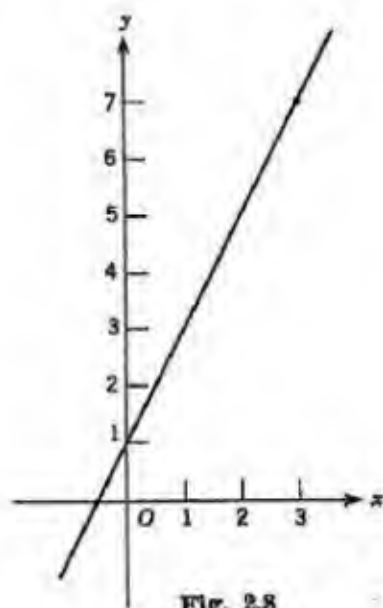


Fig. 2.8

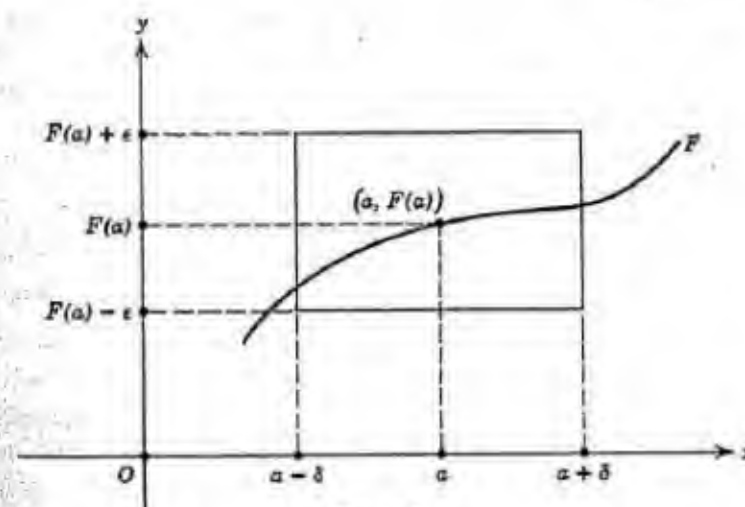


Fig. 2.9

Si la función F es continua en a , entonces el punto $(a, F(a))$ está en la gráfica de F y hay puntos de la gráfica de F tan cercanos como queramos al punto $(a, F(a))$. A veces se dice que si F es continua, podremos hacer la diferencia entre las ordenadas de dos puntos de la gráfica de F tan pequeña como queramos, con sólo hacer la diferencia entre las abscisas de estos dos puntos, suficientemente pequeña. Dicho con más precisión: dada cualquier $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que se satisface (23); esto es, $F(x)$ está en el intervalo $(F(a) - \varepsilon; F(a) + \varepsilon)$ para toda x en el intervalo $(a - \delta; a + \delta)$. Esto significa que dada una ε y para cualquier selección de las líneas cuyas ecuaciones son

$$y = F(a) - \varepsilon \text{ y } y = F(a) + \varepsilon,$$

existen líneas con ecuaciones

$$x = a - \delta \text{ y } x = a + \delta$$

con la propiedad de que la porción de la gráfica F que está entre las dos últimas líneas, queda completamente contenida en el rectángulo determinado por las cua-

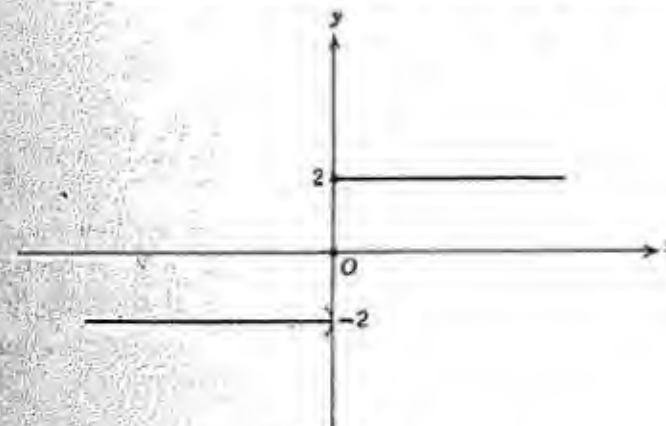


Fig. 2.10

tro líneas antes citadas (véase la Fig. 2.9). Si F es continua sobre un intervalo, la gráfica de F sobre ese intervalo será una curva que no se interrumpe.

Ejemplo 4. ¿Es continua en 0 la función F dada por

$$F(x) = -2 \text{ para } x < 0$$

$$F(x) = 2 \text{ para } x \geq 0?$$

La gráfica de F está dada en la Fig. 2.10.

Solución. Claramente la gráfica de F está rota en $x=0$; es evidente que F es discontinua en 0. La condición (i) de continuidad se satisface, puesto que $F(0) = 2$. Sin embargo

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = -2 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 2.$$

Como el límite por la izquierda no es igual al límite por la derecha, no existe $\lim_{x \rightarrow 0} F(x)$. Por tanto, la condición (ii) de continuidad no se satisface.

Frecuentemente deseamos saber si una función es continua o no en todos los puntos de su dominio, y de no serlo, en cuales es discontinua. El teorema siguiente ayudará en estos casos.

Teorema 10. Si las funciones F y G son continuas sobre los intervalos S_1 y S_2 respectivamente, y si $S = S_1 \cap S_2$, entonces:

- (i) $F + G$ es continua sobre el intervalo S ;
- (ii) $F - G$ es continua sobre S ;
- (iii) $F \cdot G$ es continua sobre S ;
- (iv) F/G es continua sobre S , excepto para aquellos números $a \in S$ tales que $G(a) = 0$.

Demostración de (i). Sea a cualquier número en S . Por hipótesis

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a) \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} G(x) = G(a).$$

Por el Teorema 6(i), existe $\lim_{x \rightarrow a} [F(x) + G(x)]$ y es igual a

$$[\lim_{x \rightarrow a} F(x) + \lim_{x \rightarrow a} G(x)]. \text{ De donde}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [F(x) + G(x)] = F(a) + G(a),$$

y por tanto $F + G$ es continua en a .

Las partes (ii), (iii) y (iv) se demuestran por un procedimiento similar.

Recuérdese que en la sección 2.1 establecimos los límites

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} x = a.$$

De ahí que la función constante $C = \{(x, c)\}$ y la función identidad $\{(x, x)\}$ son funciones continuas, puesto que cada una es continua para todo número de su dominio. En cada caso el dominio es el conjunto Re , de todos los números reales.

En el ejercicio 16 de la sección 2.1 demostramos que

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a),$$

donde $P(x)$ es un polinomio de grado n . En consecuencia, una función polinomial P , de grado n , es continua sobre su dominio Re .

Recuérdese que una función racional es el cociente U/V , de dos funciones polinomiales U y V , y que su dominio es la intersección de los dominios de U y de V , excepto para aquellos valores que hacen $V(x) = 0$. Del Teorema 10(iv) se sigue que una función racional es continua sobre su dominio. Por ejemplo, las funciones F y G , dadas por

$$F(x) = \frac{5x^2 + 1}{x - 2} \text{ y } G(x) = \frac{2x^2 + x - 5}{x^2 - 9}$$

son continuas sobre sus respectivos dominios; es decir que F es continua para todo número real excepto 2, y que G es continua para todo número real excepto 3 y -3.

El teorema 5 demuestra que la función raíz cuadrada simple es continua sobre su dominio $[0; +\infty)$. Puesto que por el teorema 6(v)

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a},$$

se sigue que cada una de las funciones

$$\{(x, y) \mid y = \sqrt[n]{x}, x \in [0; +\infty), \text{ siendo } n \text{ un entero par positivo}\},$$

$$\{(x, y) \mid y = \sqrt[n]{x}, x \in (-\infty; +\infty), \text{ siendo } n \text{ un entero impar positivo}\},$$

es continua para todos los valores de su dominio.

Es igualmente cierto que cada una de las funciones trigonométricas es continua sobre su dominio. Esta afirmación está basada en los teoremas 11 y 12.

Teorema 11. La función Sen, $\text{Sen} = \{(x, y) \mid y = \sin x\}$, es continua sobre su dominio, Re .

Demostración. De acuerdo con la proposición (22), necesitamos probar que para cualquier $a \in Re$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sin(a + h) = \sin a.$$

Ahora bien, $\sin(a + h) = \sin a \cos h + \cos a \sin h$, así

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \sin(a + h) &= \lim_{h \rightarrow 0} (\sin a \cos h + \cos a \sin h) \\ &= \sin a \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos h + \cos a \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \sin h \\ &= \sin a \cdot (1) + \cos a \cdot (0) = \sin a. \end{aligned}$$

El teorema 12 se puede demostrar en forma semejante, y en el ejercicio 20 al final de esta sección, se le pide al estudiante que lo haga.

Teorema 12. La función Cos, $\text{Cos} = \{(x, y) \mid y = \cos x\}$, es continua sobre su dominio, Re .

De los teoremas 10, 11 y 12 se concluye que cada una de las otras cuatro funciones trigonométricas es continua sobre su dominio. Por ejemplo: puesto que $\tan x$ es igual a cero para $x = n\pi + (\pi/2)$, siendo n un entero, ni $\tan x$ ni $\sec x$ están definidas para estos valores; en consecuencia las funciones

$$\text{Tan} = \{(x, y) \mid y = \tan x\} \text{ y } \text{Sec} = \{(x, y) \mid y = \sec x\}$$

son continuas en $n\pi + (\pi/2)$, pero cada una es continua sobre su dominio.

Haremos uso del siguiente teorema y de sus corolarios.

Teorema 13. Si

$$V = \{(x, u) \mid u = V(x)\} \quad \text{y} \quad U = \{(u, y) \mid y = U(u)\}$$

son dos funciones con las propiedades siguientes

(i) $\lim_{x \rightarrow a} V(x) = b,$

(ii) existe un número $\rho > 0$, tal que

$$V(x) \neq b \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \rho,$$

(iii) $\lim_{u \rightarrow b} U(u)$, existe,

entonces la función compuesta $F = U[V]$, dada por $F = \{(x, y) \mid y = U[V(x)]\}$, tiene la propiedad de que

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} U[V(x)] = \lim_{u \rightarrow b} U(u).$$

Demostración. Expresemos el $\lim_{u \rightarrow b} U(u)$ mediante c . Demos una $\varepsilon > 0$. Sabemos, de (iii), que existe una $\delta_1 > 0$ tal que

$$|U(u) - c| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad 0 < |u - b| < \delta_1.$$

De (i) sabemos que dada dicha $\delta_1 > 0$, existe una $\delta_2 > 0$, tal que

$$|V(x) - b| < \delta_1 \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \delta_2.$$

Hagamos ahora a δ igual a la más pequeña de δ_2 y ρ . Entonces, siempre que $0 < |x - a| < \delta$, tendremos $0 < |V(x) - b| < \delta_1$, y de ahí que

$$|U[V(x)] - c| < \varepsilon;$$

esto es,

$$\lim_{x \rightarrow a} U[V(x)] = c = \lim_{u \rightarrow b} U(u).$$

La necesidad de una hipótesis además de (i) y (iii), se pasa a menudo por alto. Para demostrar que las hipótesis (i) y (iii) no bastan para asegurar la conclusión del teorema 13, considérense las funciones V y U dadas por

$$V(x) = 2; \quad U(u) = \begin{cases} 3u & \text{para } u \neq 2 \\ 7 & \text{para } u = 2. \end{cases}$$

Sea $a = 1$. Entonces $b = \lim_{x \rightarrow 1} V(x) = 2$, y $\lim_{u \rightarrow 2} U(u) = 6$. Sin embargo,

$$\lim_{x \rightarrow 1} U[V(x)] = 7 \neq \lim_{u \rightarrow 2} U(u).$$

Si en lugar de la hipótesis (ii) del teorema 13, usamos la hipótesis de que U es continua en b , obtenemos el utilísimo teorema 14.

Teorema 14. Si

$$V = \{(x, u) \mid u = V(x)\} \quad \text{y} \quad U = \{(u, y) \mid y = U(u)\}$$

son dos funciones tales que

(i) $\lim_{x \rightarrow a} V(x) = b,$

(ii) U es continua en b ,

entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} U[V(x)] = U[\lim_{x \rightarrow a} V(x)] = U(b).$$

Demostración. Demos una $\varepsilon > 0$. De (ii) sabemos que existe una $\delta_1 > 0$ tal que

$$|U(u) - U(b)| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad |u - b| < \delta_1.$$

De (i) sabemos que dada dicha δ_1 , existe una $\delta > 0$, tal que

$$|V(x) - b| < \delta_1 \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

Por lo cual, para esta δ ,

$$|U[V(x)] - U(b)| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \delta;$$

esto es, $\lim_{x \rightarrow a} U[V(x)] = U(b) = U[\lim_{x \rightarrow a} V(x)]$. ■

Teorema 15. Si además de las hipótesis (i) y (ii) del teorema 14, tenemos que (iii) V es continua en a ,

entonces $U[V]$ es continua en a ; es decir que

$$\lim_{x \rightarrow a} U[V(x)] = U[V(a)].$$

Demostración. El teorema resulta una consecuencia inmediata del teorema 14, si notamos que según la hipótesis (iii), $\lim_{x \rightarrow a} V(x) = V(a)$. ■

Del teorema 15 se deduce que si U y V son continuas sobre sus dominios, entonces la función compuesta $U[V]$ es continua sobre su dominio. Como ejemplo: puesto que una función polinomial

$$P = \{(x, y) \mid y = P(x)\}$$

es continua sobre su dominio Re , y puesto que la función Sen

$$Sen = \{(x, y) \mid y = \text{sen } x\}$$

es continua sobre su dominio Re , sabemos que la compuesta de Sen con P ,

$$Sen[P] = \{(x, y) \mid y = \text{sen } P(x)\},$$

será continua sobre su dominio Re .

Igualmente, ya que

$$Cos = \{(x, y) \mid y = \cos x\}$$

es continua sobre su dominio Re , se sigue que

$$Sen[Cos] = \{(x, y) \mid y = \text{sen}(\cos x)\}$$

es continua sobre su dominio Re .

Ejemplo 5. Si

$$U = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x+8}\} \quad \text{y} \quad V = \left\{(x, y) \mid y = \frac{\text{sen } x}{x}\right\},$$

encuentre

$$\lim_{x \rightarrow 0} U[V(x)] \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} V[U(x)].$$

Solución. Para las U y V dadas, tenemos

$$U[V(x)] = \sqrt{\frac{\sin x}{x} + 8} \quad \text{y} \quad V[U(x)] = \frac{\sin \sqrt{x+8}}{\sqrt{x+8}}.$$

Para calcular $\lim_{x \rightarrow 0} U[V(x)]$, notamos que $\lim_{x \rightarrow 0} V(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, y que U es continua en 1; por tanto, se aplica el teorema 14 y nos queda

$$\lim_{x \rightarrow 0} U[V(x)] = U[\lim_{x \rightarrow 0} V(x)] = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + 8} = \sqrt{9} = 3.$$

Al considerar $\lim_{x \rightarrow 0} V[U(x)]$, notamos que V no es continua en 0, por lo tanto no debe aplicar el teorema 14. Sin embargo

$$\lim_{h \rightarrow 0} V(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}$$

existe, e igualmente existe un número $\rho > 0$ tal que $U(x) = \sqrt{x+8} \neq 0$ cuando

$$0 < |x - (-8)| < \rho,$$

de modo que el teorema 13 sí se puede aplicar y tenemos

$$\lim_{x \rightarrow -8} V[U(x)] = \lim_{h \rightarrow 0} V(h).$$

En otras palabras

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sin \sqrt{x+8}}{\sqrt{x+8}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

EJERCICIOS

1. ¿Es la función F dada por

$$F(x) = 2x - 1, \quad x \neq 2, \\ F(2) = 5$$

continua en 2? Explique su respuesta y grafique F .

2. ¿Es la función H dada por

$$H(x) = 2x - 1, \quad x \neq 2, \\ H(2) = 3$$

continua en 2? Explique su respuesta y grafique H .

3. ¿Es la función F dada por

$$F(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}, \quad x \neq 3$$

continua en 3? Grafique F . ¿Puede definirse $F(3)$ de modo que F sea continua en 3? Explique su respuesta.

4. ¿Es la función F dada por

$$F(x) = \frac{1}{x}$$

continua en 0? ¿Por qué? Grafique F . Si F no es continua en 0, ¿puede definirse $F(0)$ de modo que F sea continua en 0? Explique su respuesta.

5. ¿Es la función G dada por

$$G(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1, \\ G(1) = 2$$

continua en 1? Explique su respuesta y grafique G .

6. ¿Es la función H dada por

$$H(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1, \\ H(1) = 3$$

continua en 1? Explique su respuesta y grafique H .

Para cada uno de los ejercicios del 7 al 14, exprese los valores de x para los cuales la función F , especificada por la ecuación dada sea discontinua. Grafique cada F .

7. $F(x) = \cot x.$

8. $F(x) = \sec x.$

9. $F(x) = \frac{4}{x^2}.$

10. $F(x) = \frac{1}{x^3}.$

11. $F(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}.$

12. $F(x) = \frac{3}{x - 1}.$

13. $F(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}.$

14. $F(x) = \frac{1}{x - 1} + \tan x.$

En cada uno de los ejercicios del 15 al 18, calcule $\lim_{x \rightarrow a} U[V(x)]$ para las U , V y a dadas.

15. $U = \{(x, y) \mid y = \cos x\}; \quad V = \{(x, y) \mid y = \frac{\pi - 3x}{4}\}; \quad a = 0.$ Sugere-

mos: Note que V es continua sobre \mathbb{R} y que U es continua sobre \mathbb{R} ; use el Teorema 15.

16. $U = \{(x, y) \mid y = 6x^2 + \frac{3}{x}\}; \quad V = \{(x, y) \mid y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}\}; \quad a = 3.$

Sugerencia: use el teorema 14.

17. $U = \{(x, y) \mid y = \frac{x^2 - 100}{x - 10}\}; \quad V = \{(x, y) \mid y = \frac{4x^2 - 25}{2x - 5}\};$

Sugerencia: use el teorema 13.

18. $U = \{(x, y) \mid y = \frac{\sin(x+4)}{x+4}\}; \quad V = \{(x, y) \mid y = \frac{x^2 - 4}{x+2}\};$

En cada uno de los ejercicios del 19 al 22 use los teoremas 13, 14 y 15 para hallar el límite pedido.

19. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (5 \cos^2 x - 3 \cos x + 2).$

20. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sin(2x - 10)}{x - 5}$

21. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi \sin 2x}{2x}\right)$

22. $\lim_{x \rightarrow 2} \tan\left(\sin \frac{x}{2}\right).$

23. Demuestre que las proposiciones (21) y (22) son equivalentes. Es decir demuestre que

$$\left[\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a) \right] \leftrightarrow \left[\lim_{h \rightarrow 0} F(a+h) = F(a) \right].$$

24. Demuestre el teorema 10(ii).

25. Demuestre el teorema 10(iii).

26. Demuestre el teorema 10(iv).

27. Demuestre el teorema 12.

EJERCICIOS ADICIONALES AL CAPITULO 2

1. Mediante el uso directo de la definición de límite, pruebe que si $F(x) = 3x + 4$, entonces $\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = 7$, encontrando δ en términos de un número $\varepsilon > 0$ tal que

$$|F(x) - 7| < \varepsilon \text{ cuando } 0 < |x - 1| < \delta.$$

2. Mediante el uso directo de la definición de límite, pruebe que si $F(x) = (x/3) + 5$, entonces $\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = 16/3$, encontrando δ en términos de un número $\varepsilon > 0$ tal que

$$|F(x) - 16/3| < \varepsilon \text{ cuando } 0 < |x - 1| < \delta.$$

3. Demuestre que $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x - 6) = -4$, encontrando δ en términos de un número $\varepsilon > 0$ tal que

$$|(x^2 - x - 6) - (-4)| < \varepsilon \text{ cuando } 0 < |x - 2| < \delta.$$

4. Demuestre que $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^3 = 1$, encontrando δ en términos de un número $\varepsilon > 0$ tal que

$$|(1+x)^3 - 1| < \varepsilon \text{ cuando } 0 < |x - 0| < \delta.$$

En cada uno de los ejercicios del 5 al 8 encuentre el límite pedido

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{2-\sqrt{x^2+3}}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{2+\sqrt{x^2+3}}.$$

$$7. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan^2 h}{h \sin h}.$$

$$8. \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sin(t^2-1)}{t^2-1}.$$

9. ¿Es la función G dada por

$$G(x) = \frac{x^3 + 8}{x + 2}; \quad x \neq -2$$

$$G(-2) = 2$$

continua en -2 ? Explique su respuesta y grafique G .

10. ¿Es la función F dada por

$$F(x) = \frac{x^3 + 8}{x + 2}; \quad x \neq -2$$

$$F(-2) = 12$$

continua en -2 ? Explique su respuesta y grafique F .

Derivadas

3.1 Definición de derivada. Consideremos la función

$$F = \{(x, y) \mid y = F(x), x \in X\},$$

y sea h un número distinto de cero, positivo o negativo, que tenga la propiedad de que $(x+h) \in X$. En capítulos anteriores hemos estudiado el cociente

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Si existe una función F' con la propiedad de que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x) \quad (1)$$

para algunos valores de $x \in X$, entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

es la derivada de $F(x)$ con respecto a x .

Por ejemplo, para $F(x) = 2x^2 - 3x$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{2(x+h)^2 - 3(x+h) - 2x^2 + 3x}{h} \\ &= [(4x-3) + 2h] \cdot \frac{h}{h}, \end{aligned}$$

para $h \neq 0$.

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = (4x-3) + 2h.$$

Afirmamos que la derivada de $F(x)$ con respecto a x es $4x-3$, o sea

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = 4x-3,$$

lo que puede verificarse en forma rápida, usando directamente la definición de límite (Sec. 2.1), y la igualdad

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - (4x-3) \right| = 2h, \quad h \neq 0.$$

Sin embargo, en general no estamos interesados en verificar si una $F'(x)$ es particular, satisface (1). Más bien, nuestro interés es determinar $F'(x)$, si existe directamente del primer término de (1), usando los teoremas de límites apropiados.

Es frecuente expresar la derivada de $F(x)$ con respecto a x , por $D_x F(x)$; esto es

$$D_x F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}. \quad (2)$$

Considérese otra vez el ejemplo (2) para el cual $F(x) = 2x^2 - 3x$ y

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = 4x - 3 + 2h,$$

si $h \neq 0$. Usando los teoremas de límites convenientes de la Sec. 2.1. se ve que

$$D_x F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (4x - 3 + 2h) = 4x - 3.$$

Es decir:

$$D_x(2x^2 - 3x) = 4x - 3.$$

Nuestro primer objetivo en este capítulo es aprender a determinar $D_x F(x)$ para una $F(x)$ dada. El proceso de encontrar $D_x F(x)$ para una $F(x)$ dada se llama **derivación**.

La función

$$F' = \{(x, y) \mid y = D_x F(x)\},$$

tal que

$$F'(x) = D_x F(x),$$

se llama **derivada** de F . El dominio de F' consiste de aquellos números del dominio de F para los que exista $D_x F(x)$.

A veces deseamos indicar el valor de $D_x F(x)$ para $x = a$. Esto lo hacemos escribiendo $D_x F(x) \Big|_a$; esto es

$$D_x F(x) \Big|_a = F'(a).$$

Por ejemplo, hallamos que $D_x(2x^2 - 3x) = 4x - 3$. En consecuencia,

$$D_x(2x^2 - 3x) \Big|_2 = 4(2) - 3 = 5.$$

Si existe $F'(a) = D_x F(x) \Big|_a$, se dice que la función F es **derivable** en a .

Si una función F es derivable en todos los números de un intervalo, se dice que F es **derivable sobre el intervalo**.

De acuerdo con (1) tenemos

$$F'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h}$$

para una a que pertenece al dominio de F' . A veces leeremos $F'(a)$ como "la derivada de $F(x)$ en a ".

Cuando hablamos de la derivada de $F(x)$ en c , generalmente pensamos en que c es un punto interior del dominio. Sin embargo, c no es necesariamente un punto interior. Por ejemplo, si $[a; b]$ es el dominio de F , es posible que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(b+h) - F(b)}{h}$$

existan, uno o ambos. Ya que al definir estos límites se requiere que $(a+h) \in X$, es necesario que $h > 0$, en el primero de los límites. De igual modo, como se requiere que $(b+h) \in X$, es necesario que $h < 0$ en el segundo límite.

Ejemplo 1. Si $F(x) = x^3$, halle $D_x F(x)$. Especifique cada una de las funciones F y F' , en la forma (3). Dé los dominios de F y F' .

Solución. Para $F(x) = x^3$ hallamos que

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = (3x^2 + 3xh + h^2) \cdot \frac{h}{h},$$

de donde

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$$

si $h \neq 0$. Subsecuentemente, siempre que simplifiquemos una fracción, dividiendo numerador y denominador entre h , debe entenderse que $h \neq 0$. Aunque

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \neq 3x^2 + 3xh + h^2 \quad \text{para} \quad h = 0,$$

no obstante,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2)$$

según el teorema 7 de la Sec. 2.1. En consecuencia

$$D_x F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

En este ejemplo

$$F = \{(x, y) \mid y = x^3\} \quad \text{y} \quad F' = \{(x, y) \mid y = 3x^2\}.$$

El dominio de F y de F' es $(-\infty; +\infty)$.

Además de las notaciones $D_x F(x)$ y $F'(x)$ para la derivada de $F(x)$ con respecto a x , si $y = F(x)$ expresaremos a veces dicha derivada por $D_x y$. Esto, es si $y = F(x)$, entonces

$$D_x y = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}. \quad (5)$$

Ejemplo 2. Para $y = 5\sqrt{x}$, halle $D_x y$.

Solución. Aquí $y = F(x) = 5\sqrt{x}$, y

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{5\sqrt{x+h} - 5\sqrt{x}}{h} = 5 \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

Multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$, para racionalizar el numerador, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= 5 \left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right) \\ &= 5 \left[\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \right] = 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \cdot \frac{h}{h} \\ &= 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}\end{aligned}$$

Por tanto

$$D_x f = \lim_{h \rightarrow 0} \left(5 \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right) = 5 \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right) = \frac{5}{2\sqrt{x}}.$$

La justificación de la proposición $\lim_{h \rightarrow 0} (\sqrt{x+h} + \sqrt{x}) = 2\sqrt{x}$ es como sigue:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} (\sqrt{x+h} + \sqrt{x}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{x+h} + \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{x}, \text{ por el teorema 6(i) de la Sec. 2.1;} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{x+h} + \sqrt{x}, \text{ por el teorema 2 de la Sec. 2.1;} \\ &= \sqrt{\lim_{h \rightarrow 0} (x+h)} + \sqrt{x}, \text{ por el teorema 6(v) de la Sec. 2.1;} \\ &= \sqrt{x} + \sqrt{x}, \text{ por el teorema 6(i) de la Sec. 2.1;} \\ &= 2\sqrt{x}.\end{aligned}$$

Aquí

$$F = \{(x, y) \mid y = 5\sqrt{x}\} \text{ y } F' = \{(x, y) \mid y = \frac{5}{2\sqrt{x}}\},$$

dominio de $F = [0; +\infty)$ y dominio de $F' = (0; +\infty)$.

Explique por qué $F(0)$ está definida y en cambio $F'(0)$ no lo está.

De la Sec. 1.9 sabemos que la pendiente $S(h)$, de la secante que pasa por los puntos $P(a, F(a))$ y $Q(a+h, F(a+h))$ en la gráfica de F (Véase la Fig. 3.1), está dada por

$$S(h) = \frac{F(a+h) - F(a)}{h},$$

y que la pendiente m_t de la tangente a la gráfica de F en el punto $P(a, F(a))$ está dada por

$$m_t = \lim_{h \rightarrow 0} S(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} = F'(a).$$

Esto es, la pendiente de la tangente a la gráfica de F en el punto $P(a, F(a))$ es $F'(a)$.

Se deduce entonces, que la ecuación de la tangente a la gráfica de F en el punto $P(a, F(a))$ es

$$y - F(a) = F'(a) \cdot (x - a).$$

Ejemplo 3. Encuentre la ecuación de la tangente y de la normal a la gráfica de $y = 4x - x^2$ en el punto $x = 1$.

Solución. Aquí $F(x) = 4x - x^2$ y

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{4(x+h) - (x+h)^2 - 4x + x^2}{h} \\ &= (4 - 2x - h) \cdot \frac{h}{h} = 4 - 2x - h;\end{aligned}$$

Por lo que

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4 - 2x - h) = 4 - 2x.$$

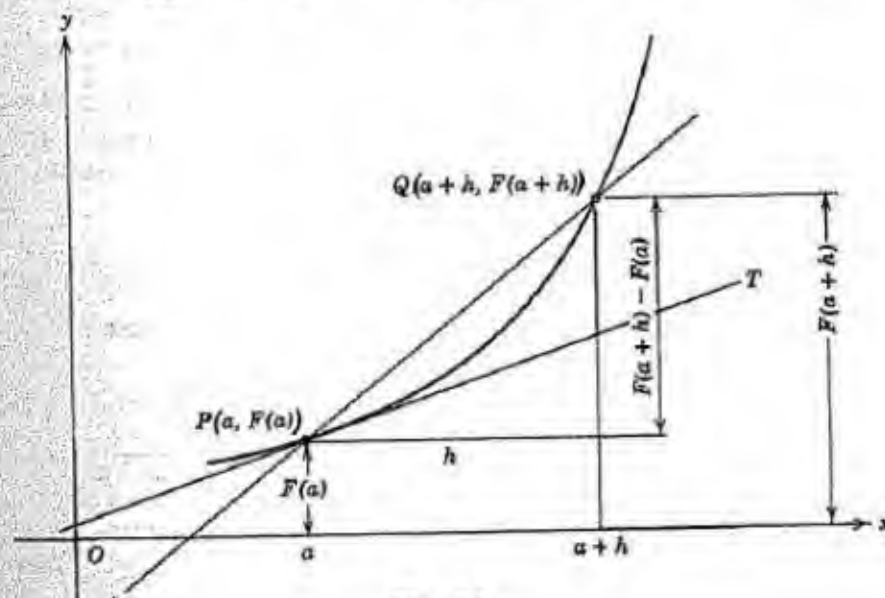


Fig. 3.1

Así pues, $m_t = F'(1) = 4 - 2(1) = 2$. Además $F(1) = 3$. Por tanto, la ecuación de la tangente es

$$y - 3 = 2(x - 1).$$

Recuérdese que la normal a una curva en el punto $P(a, F(a))$ es la línea que pasa por P y es perpendicular a la tangente, y que dos líneas no verticales son perpendiculares si y sólo si sus pendientes tienen valores recíprocos negativos. Es decir que si m_t es la pendiente de la tangente y m_n es la pendiente de la normal, entonces

$$m_n = -\frac{1}{m_t}.$$

En el caso presente

$$m_n = -\frac{1}{2},$$

y la ecuación de la normal es:

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 1).$$

Las gráficas correspondientes están dadas en la Fig. 3.2.

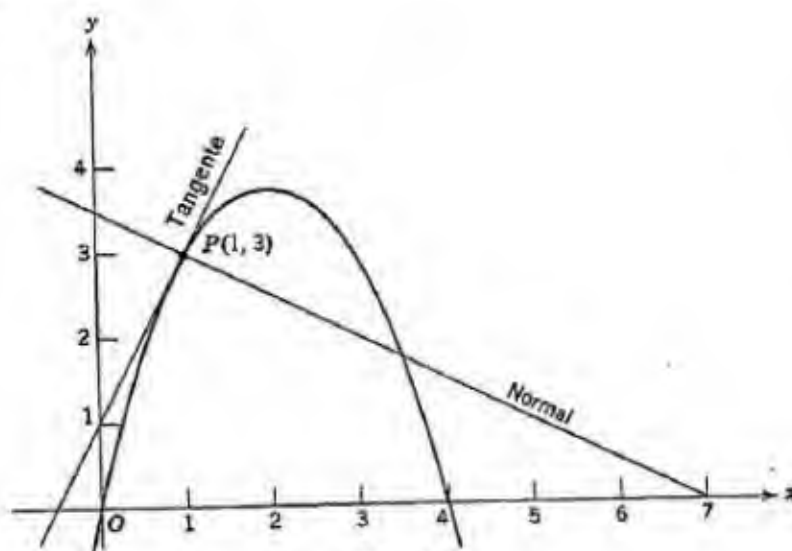


Fig. 3.2

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 10 calcule $D_x F(x)$ usando (2)

1. $F(x) = \frac{2}{x}$.

2. $F(x) = \frac{1}{x^2}$.

3. $F(x) = x^{1/3}$.

4. $F(x) = \frac{x-2}{x}$.

5. $F(x) = 3x - x^2$.

6. $F(x) = \frac{x^3 + 2}{x}$.

7. $F(x) = 3x^2 + 4x^3$.

8. $F(x) = \frac{x}{x-2}$.

9. $F(x) = \frac{3}{x+1}$.

10. $F(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$.

11. ¿Cuál es el dominio de la función F dada en el ejercicio 1? ¿Cuál es F' , que es la derivada de F del ejercicio 1?

12. ¿Cuál es el dominio de la función F dada en el ejercicio 3? ¿Cuál es F' , que es la derivada de F ?

13. Calcule $F'(x)$ para $F(x) = 2x^2 - 3$. Calcule entonces $F'(-1)$, $F'(0)$, $F'(2)$ y $F'(a)$.

14. Halle $H'(x)$, dada $H(x) = (3/x) - x$, si $x \neq 0$. Calcule entonces $H'(-2)$, $H'(-1)$, $H'(2)$ y $H'(a)$.

Para cada uno de los ejercicios del 15 al 22 halle $D_x y$ mediante (5). Use el resultado para encontrar la ecuación de la tangente y la ecuación de la normal a la curva cuya ecuación se da, en el punto indicado. En cada ejercicio grafique la curva, la línea tangente y la línea normal, todo sobre el mismo sistema coordenado.

15. $y = -x^3 + 4x$, (1, 3).

16. $y = x^3 - 3$, (1, 2).

17. $y = 3x^2 - x^3$, (-1, 4).

18. $y = \sqrt{25 - x^2}$, (3, 4).

19. $y = 3x^2 - 4x$, en el punto cuya abscisa es 2.

20. $2y = x^2 - 2x + 4$, en el punto cuya abscisa es 2.

21. $y = x^3 - x$, en el punto cuya abscisa es -1.

22. $y = 2x^2 - 4x + 5$, en el punto cuya abscisa es 3.

23. Halle $D_x y$ para $y = 3x^2 + 5x + 6$. Con ayuda de este resultado, responda a las siguientes preguntas:

(a) ¿En qué punto de la curva C , cuya ecuación es $y = 3x^2 + 5x + 6$, la tangente es paralela al eje X ?

(b) ¿En qué punto de la curva C , la tangente es paralela a la línea cuya ecuación es $y = x$?

24. Las curvas C_1 y C_2 tienen ecuaciones $y = x^2$ y $y = x^3$, respectivamente. Halle las pendientes de C_1 y C_2 en los puntos de intersección.

3.2 Existencia de la derivada y continuidad. Demostraremos ahora el siguiente teorema.

Teorema 1. Si una función $F = \{(x, y) | y = F(x)\}$ es derivable en a , entonces F es continua en a .

Demostración. Deseamos probar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(a+h) = F(a).$$

Notamos que para $h \neq 0$ podemos poner $F(a+h)$ en la forma

$$F(a+h) = \left(\frac{F(a+h) - F(a)}{h} \right) \cdot h + F(a).$$

Usando los teoremas apropiados acerca de límites, listados en la Sec. 2.1, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} F(a+h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h + \lim_{h \rightarrow 0} F(a) \\ &= F'(a) \cdot 0 + F(a), \end{aligned}$$

o sea que

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(a+h) = F(a),$$

y el teorema queda demostrado. ■

El recíproco de este teorema no es necesariamente cierto; o sea que una función F puede ser continua en a y sin embargo no derivable en a .

Para ilustrarlo, la función valor absoluto F , dada por

$$F(x) = |x|$$

es continua en 0 pero $F'(0)$ no existe. La gráfica de F consiste en dos semirrectas con un punto extremo común, una que bisecta al primer cuadrante y la otra al segundo (véase la Fig. 1.3).

Probaremos que F es continua para cualquier número real a . Recuerdese que

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

La función F para la cual $F(x) = \sqrt{x^2}$, es la compuesta de $I^{1/2}$ con I^2 . En virtud del teorema 5 de la Sec. 2.1, $I^{1/2}$ es continua sobre su dominio; como se observó en la Sec. 2.3, cualquier función polinomial es continua sobre su dominio y por tanto I^2 es continua sobre su dominio. Consecuentemente, por el teorema 15 de la Sec. 2.3, F es continua sobre su dominio. En particular, F es continua en 0.

Sin embargo, F no es derivable en 0 como probaremos en seguida. Para lo cual debemos mostrar que

$$F'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(0+h) - F(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$$

no existe. Ahora bien

$$\frac{|h|}{h} = \begin{cases} -1, & \text{para } x < 0 \\ 1, & \text{para } x > 0. \end{cases}$$

No importa qué tan pequeña seleccionemos una $\delta > 0$, siempre habrá valores de h en el conjunto $\{h \mid 0 < |h| < \delta\}$, para los cuales $\frac{|h|}{h} = 1$ y otros valores de h del mismo conjunto, para los cuales $\frac{|h|}{h} = -1$. Por tanto, no existe $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$ y consecuentemente no existe $F'(0)$.

Ejemplo. Demuestre que si $F(x) = \sqrt[3]{x}$, entonces F es continua pero no es derivable en 0.

Solución. Del teorema 6(v) de la Sec. 2.1 resulta que:

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow a} x} = \sqrt[3]{a} = F(a).$$

De donde, F es continua en a y en particular F es continua en 0.

Puesto que $F(x) = \sqrt[3]{x}$, tenemos

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h}$$

y en consecuencia

$$\frac{F(0+h) - F(0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \frac{1}{h^{2/3}}.$$

Como $1/h^{2/3}$ puede hacerse tan grande como se desee escogiendo h suficientemente pequeña, no existe un número b para el cual el valor absoluto de la diferencia entre $1/h^{2/3}$ y b se pueda hacer tan pequeña como se quiera con sólo escoger h suficientemente pequeña. Por tanto no existe.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(0+h) - F(0)}{h}$$

y entonces F no es derivable en 0.

La gráfica de F está dada en la Fig. 3.3. Esta gráfica tiene una tangente vertical en $(0, 0)$. El hecho de que F no sea derivable en 0 está relacionado con el hecho de que una recta vertical no tiene pendiente.

3.3 Algunos teoremas sobre derivadas. Desarrollaremos ciertas fórmulas básicas para derivadas mediante los teoremas sobre límites, ya estudiados en la Sec. 2.1, con objeto de dada una expresión $F(x)$, poder obtener rápidamente una expresión para $D_x F(x)$.

Teorema 2. Si $F(x) = c$, siendo c un número real, entonces F es derivable sobre Re y

$$D_x c = 0. \quad (7)$$

Demostración. Para $F(x) = c$, tenemos $F(x+h) = c$, y

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{c - c}{h} = \frac{0}{h} = 0.$$

De ahí que

$$D_x c = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0,$$

y el teorema queda demostrado. Por tanto, la derivada de cualquier función constante $\{(x, c)\}$ es la función cero $\{(x, 0)\}$. ■

La gráfica de una función constante es una línea horizontal. Esta línea es su propia tangente en cada punto, y esta tangente tiene pendiente cero.

Algunos ejemplos del uso de (7) son: $D_x(19) = 0$; $D_x(-56) = 0$; si $y = 17$, entonces $D_x y = 0$.

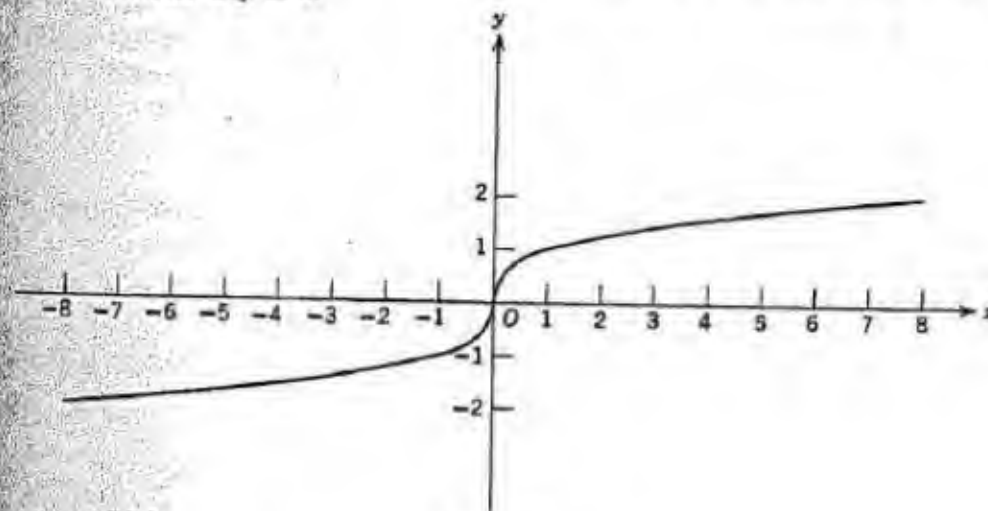


Fig. 3.3

Teorema 3. Si $I(x) = x$, entonces I es derivable sobre Re y

$$D_x x = 1. \quad (8)$$

Demostración. En este caso

$$\frac{I(x+h) - I(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = 1 \left(\frac{h}{h} \right) = 1;$$

por tanto

$$D_x x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(x+h) - I(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1,$$

y el teorema queda demostrado. ■

En otras palabras

$$\text{si } I = \{(x, x)\}, \text{ entonces, } I' = \{(x, 1)\}.$$

El resultado de (8) se podría haber anticipado puesto que la gráfica de $y = x$ es una recta con pendiente 1.

A veces es conveniente expresar la derivada de una función dada F , por DF , o sea que

$$DF = F'.$$

Entiéndase que DF no significa F multiplicada por D , sino una función obtenida por derivación de F . Con esta notación escribimos

$$DI = \bar{1}.$$

Con la misma notación, el análogo del resultado (7) para funciones es

$$D\bar{c} = \bar{0}.$$

En la Sec. 1.5 señalamos que adoptaríamos la convención de usar el símbolo \bar{c} para representar la función constante \bar{c} siempre que la función constante apareciera en una suma, resta, multiplicación o división, en relación con alguna otra función $V \neq \bar{c}$. En forma semejante, hallaremos útil adoptar la convención de uso del símbolo c para representar la función constante \bar{c} , siempre que dicha función aparezca en una fórmula para la derivada de alguna función $V \neq \bar{c}$. De acuerdo con esto escribiremos

$$DI = \bar{1} \text{ en vez de } DI = 1.$$

La convención expresada en el párrafo precedente no da lugar a confusión si recordamos que la derivada de una función es siempre una función (y no un número).

Teorema 4. Si $F(x) = x^n$, siendo n un entero positivo, entonces F es derivable sobre \mathbb{R} , y además

$$D_x(x^n) = nx^{n-1}. \quad (9)$$

Demostración. Para $F(x) = x^n$, $F(x+h) = (x+h)^n$, y

$$F(x+h) - F(x) = (x+h)^n - x^n.$$

Según el teorema del binomio:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n \quad (10)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - x^n \\ &= nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1},$$

$$\begin{aligned} \text{y } D_x(x^n) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1} \right] = nx^{n-1}, \end{aligned}$$

y el teorema queda demostrado.

Obviamente la fórmula $D_x(x) = D_x(x^1) = 1 \cdot x^0 = 1$ es un caso especial de $D_x(x^n) = nx^{n-1}$.

Algunos ejemplos del uso de (9) son los siguientes:

$$D_x(x^4) = 4x^3, \quad D_x(x^{14}) = 14x^{13}, \quad D_x(x^{80}) = 80x^{79}.$$

Sea $I^n(x) = F(x) = x^n$, como hicimos en la Sec. 1.4. Entonces

$$F'(x) = \{(x, y) \mid y = nx^{n-1}\} = \{(x, y) \mid y = nI^{n-1}(x)\};$$

esto es

$$D(I^n) = nI^{n-1}$$

para cualquier n entero positivo. Por ejemplo:

$$D(I^4) = 4I^3.$$

El teorema del binomio (10), es válido sólo cuando n es entero positivo y en consecuencia la demostración que dimos de que $D_x(x^n) = nx^{n-1}$, no vale si n no es entero positivo. Sin embargo, usando otros métodos se puede demostrar que

$$D_x(x^p) = px^{p-1}, \quad (11)$$

o lo que es equivalente, que

$$D(I^p) = pI^{p-1},$$

es válida para cualquier número racional p . Una demostración para este caso está dada en la Sec. 6.6. Sobre la base de esa demostración usaremos (11) para todos los valores racionales de p . Por ejemplo,

$$D_x(x^{-4}) = -4x^{-5}, \quad D_x(x^{3/2}) = \frac{3}{2}x^{1/2}.$$

$$\text{Si } y = \frac{1}{x^{1/2}} = x^{-1/2}; \text{ entonces } D_x y = -\frac{1}{2}x^{-3/2} = -\frac{1}{2x^{3/2}}.$$

Si p es irracional (por ejemplo $\sqrt{2}$), la fórmula (11) aún se cumple, como veremos en la Sec. 6.6. Nosotros nos restringiremos a exponentes racionales hasta llegar a la Sec. 6.6.

Teorema 5. Si la función V es derivable sobre un intervalo S , y c es un número real, entonces la función F para la cual $F(x) = cV(x)$ es derivable sobre S , y además

$$D_x[cV(x)] = cD_x V(x) \quad (12)$$

para $x \in S$.

Demostración. En este caso

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{cV(x+h) - cV(x)}{h} = c \left[\frac{V(x+h) - V(x)}{h} \right].$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} D_x F(x) &= D_x[cV(x)] = \lim_{h \rightarrow 0} c \left[\frac{V(x+h) - V(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} c \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{V(x+h) - V(x)}{h} \right], \end{aligned}$$

si acaso existe el último límite. Ya que por hipótesis V es derivable sobre S , sabemos que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h}$ existe para $x \in S$ y es igual a $D_x V(x)$.

Por tanto

$$D_x[cV(x)] = cD_x V(x) \quad \text{para } x \in S,$$

o lo que es equivalente

$$D(cV) = cDV.$$

Combinando (11) y (12) obtenemos

$$D(cx^p) = cp x^{p-1}, \quad (13)$$

que equivale a

$$D(cl^p) = cpl^{p-1},$$

para cualquier número racional p .

A continuación damos algunas aplicaciones de estas fórmulas para derivadas

$$D_x(7x^6) = 42x^5, \quad D_x(3x^{-4}) = -12x^{-5}, \quad D_x\left(\frac{1}{2}x^{3/4}\right) = \frac{3}{8}x^{-1/4},$$

$$D(7l^6) = 42l^5, \quad D(3l^{-4}) = -12l^{-5}, \quad D\left(\frac{2}{3}l^{3/4}\right) = \frac{1}{2}l^{-1/4}.$$

Teorema 6. Si las funciones U y V son derivables sobre un intervalo S , entonces la función $F = U + V$ es derivable sobre S , y además

$$D_x[U(x) + V(x)] = D_x U(x) + D_x V(x) \quad (14)$$

para $x \in S$.

Demostración. Puesto que $F = U + V$, entonces $F(x) = U(x) + V(x)$,

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{U(x+h) + V(x+h) - U(x) - V(x)}{h} \\ &= \frac{U(x+h) - U(x)}{h} + \frac{V(x+h) - V(x)}{h}, \end{aligned}$$

de donde

$$D_x F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(x+h) - U(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h}$$

si acaso existen los límites indicados. Sabemos que estos límites existen para $x \in S$ y son respectivamente iguales a $D_x U(x)$ y $D_x V(x)$, ya que por hipótesis U y V son derivables sobre S . Luego

$$D_x[U(x) + V(x)] = D_x U(x) + D_x V(x) \quad \text{para } x \in S,$$

o lo que es equivalente

$$D(U + V) = DU + DV. \quad (15)$$

Esto es, la derivada de la suma de funciones derivables es la suma de sus derivadas.

Las siguientes son ejemplos del uso de (14) y (15) respectivamente

$$D_x(3x^4 + 7x^{-5}) = 12x^3 - 35x^{-6},$$

$$D(3l^4 + 7l^{-5}) = 12l^3 - 35l^{-6}.$$

Las derivadas se dan usualmente en términos de correspondientes mejor que de funciones, de modo que comúnmente veremos los resultados de una derivación dados en la forma primera mejor que en la segunda. Nótese que

$$[D_x(3x^4 + 7x^{-5}) = 12x^3 - 35x^{-6}] \iff [D(3l^4 + 7l^{-5}) = 12l^3 - 35l^{-6}].$$

Seguiremos la costumbre de presentar usualmente las fórmulas para derivadas en términos de correspondientes y también en términos de funciones, pero la mayor parte de los ejercicios de derivación los presentaremos en términos de correspondientes, con sólo algunos en términos de funciones.

El teorema 6 se puede extender a la suma de cualquier número finito de funciones, como se indica en el teorema 7.

Teorema 7. Si las n funciones F_1, F_2, \dots, F_n son derivables sobre un intervalo S , entonces su suma es derivable sobre S , y además

$$D_x[F_1(x) + \dots + F_n(x)] = D_x F_1(x) + \dots + D_x F_n(x) \quad (16)$$

para $x \in S$.

Teorema 8. Si las funciones F y G son derivables sobre un intervalo S , entonces la función $F - G$ es derivable sobre S , y además

$$D_x[F(x) - G(x)] = D_x F(x) - D_x G(x) \quad (17)$$

para $x \in S$.

La demostración del teorema 8 es semejante a la del teorema 6, y se le pide al estudiante que la desarrolle en el ejercicio 33 de esta sección.

Los teoremas del 2 al 8 nos indican que una función polinomial es derivable sobre \mathbb{R} y nos proporcionan el medio de hallar la derivada de cualquier polinomio. Como ejemplo:

$$\begin{aligned} D_x(4x^5 + 6x^3 - x + 17) &= D_x(4x^5) + D_x(6x^3) - D_x(x) + D_x(17) \\ &= 20x^4 + 18x^2 - 1. \end{aligned}$$

De manera semejante, para todo entero positivo n y para cualesquiera números reales a_0, a_1, \dots, a_n , tenemos

$$D_x(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1. \quad (18)$$

En forma más general, puesto que la fórmula $D_x(x^p) = p x^{p-1}$ es válida si p es racional y ya que acordamos usar esta fórmula en tales casos, se sigue que para los reales a_1, a_2, \dots, a_n y los racionales p_1, p_2, \dots, p_n , si

$$F(x) = a_1 x^{p_1} + a_2 x^{p_2} + \dots + a_n x^{p_n},$$

entonces

$$D_x F(x) = p_1 a_1 x^{p_1-1} + p_2 a_2 x^{p_2-1} + \dots + p_n a_n x^{p_n-1} \quad (19)$$

para $x \in \text{dominio de } F$.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} D_x\left(x^{-3} + 2\sqrt{x} + \frac{4}{x} + 7\right) &= D_x(x^{-3} + 2x^{1/2} + 4x^{-1} + 7) \\ &= -3x^{-4} + x^{-1/2} - 4x^{-2}, \end{aligned}$$

para $x \in (0; +\infty)$.

si acaso existe el último límite. Ya que por hipótesis V es derivable sobre S , sabemos que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h}$ existe para $x \in S$ y es igual a $D_x V(x)$.

Por tanto

$$D_x[cV(x)] = cD_x V(x) \quad \text{para } x \in S,$$

o lo que es equivalente

$$D(cV) = cDV.$$

Combinando (11) y (12) obtenemos

$$D(cx^p) = cp x^{p-1}, \quad (13)$$

que equivale a

$$D(cI^p) = cpI^{p-1},$$

para cualquier número racional p .

A continuación damos algunas aplicaciones de estas fórmulas para derivadas

$$D_x(7x^5) = 42x^4, \quad D_x(3x^{-4}) = -12x^{-5}, \quad D_x(\frac{2}{3}x^{3/4}) = \frac{1}{2}x^{-1/4},$$

$$D(7I^5) = 42I^4, \quad D(3I^{-4}) = -12I^{-5}, \quad D(\frac{2}{3}I^{3/4}) = \frac{1}{2}I^{-1/4}.$$

Teorema 6. Si las funciones U y V son derivables sobre un intervalo S , entonces la función $F = U + V$ es derivable sobre S , y además

$$D_x[U(x) + V(x)] = D_x U(x) + D_x V(x) \quad (14)$$

para $x \in S$.

Demostración. Puesto que $F = U + V$, entonces $F(x) = U(x) + V(x)$,

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{U(x+h) + V(x+h) - U(x) - V(x)}{h} \\ &= \frac{U(x+h) - U(x)}{h} + \frac{V(x+h) - V(x)}{h}, \end{aligned}$$

de donde

$$D_x F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(x+h) - U(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h}$$

si acaso existen los límites indicados. Sabemos que estos límites existen para $x \in S$ y son respectivamente iguales a $D_x U(x)$ y $D_x V(x)$, ya que por hipótesis U y V son derivables sobre S . Luego

$$D_x[U(x) + V(x)] = D_x U(x) + D_x V(x) \quad \text{para } x \in S,$$

o lo que es equivalente

$$D(U + V) = DU + DV. \quad (15)$$

Esto es, la derivada de la suma de funciones derivables es la suma de sus derivadas.

Las siguientes son ejemplos del uso de (14) y (15) respectivamente

$$D_x(3x^4 + 7x^{-3}) = 12x^3 - 35x^{-4},$$

$$D(3I^4 + 7I^{-3}) = 12I^3 - 35I^{-4}.$$

Las derivadas se dan usualmente en términos de correspondientes mejor que de funciones, de modo que comúnmente veremos los resultados de una derivación dados en la forma primera mejor que en la segunda. Nótese que

$$[D_x(3x^4 + 7x^{-3}) = 12x^3 - 35x^{-4}] \Leftrightarrow [D(3I^4 + 7I^{-3}) = 12I^3 - 35I^{-4}].$$

Seguiremos la costumbre de presentar usualmente las fórmulas para derivadas en términos de correspondientes y también en términos de funciones, pero la mayor parte de los ejercicios de derivación los presentaremos en términos de correspondientes, con sólo algunos en términos de funciones.

El teorema 6 se puede extender a la suma de cualquier número finito de funciones, como se indica en el teorema 7.

Teorema 7. Si las n funciones F_1, F_2, \dots, F_n son derivables sobre un intervalo S , entonces su suma es derivable sobre S , y además

$$D_x[F_1(x) + \dots + F_n(x)] = D_x F_1(x) + \dots + D_x F_n(x) \quad (16)$$

para $x \in S$.

Teorema 8. Si las funciones F y G son derivables sobre un intervalo S , entonces la función $F - G$ es derivable sobre S , y además

$$D_x[F(x) - G(x)] = D_x F(x) - D_x G(x) \quad (17)$$

para $x \in S$.

La demostración del teorema 8 es semejante a la del teorema 6, y se le pide al estudiante que la desarrolle en el ejercicio 33 de esta sección.

Los teoremas del 2 al 8 nos indican que una función polinomial es derivable sobre \mathbb{R} y nos proporcionan el medio de hallar la derivada de cualquier polinomio. Como ejemplo:

$$\begin{aligned} D_x(4x^5 + 6x^2 - x + 17) &= D_x(4x^5) + D_x(6x^2) - D_x(x) + D_x(17) \\ &= 20x^4 + 12x - 1. \end{aligned}$$

De manera semejante, para todo entero positivo n y para cualesquiera números reales a_0, a_1, \dots, a_n , tenemos

$$D_x(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n) = na_0 x^{n-1} + (n-1)a_1 x^{n-2} + \dots + a_{n-1}. \quad (18)$$

En forma más general, puesto que la fórmula $D_x(x^p) = px^{p-1}$ es válida si p es racional y ya que acordamos usar esta fórmula en tales casos, se sigue que para los reales a_1, a_2, \dots, a_n y los racionales p_1, p_2, \dots, p_n , si

$$F(x) = a_1 x^{p_1} + a_2 x^{p_2} + \dots + a_n x^{p_n},$$

entonces

$$D_x F(x) = p_1 a_1 x^{p_1-1} + p_2 a_2 x^{p_2-1} + \dots + p_n a_n x^{p_n-1} \quad (19)$$

para $x \in \text{dominio de } F$.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} D_x \left(x^{-1} + 2\sqrt{x} + \frac{4}{x} + 7 \right) &= D_x(x^{-1} + 2x^{1/2} + 4x^{-1} + 7) \\ &= -x^{-2} + x^{-1/2} - 4x^{-2}, \end{aligned}$$

para $x \in (0; +\infty)$.

Por ejemplo:

$$D_x^2(x^3 - 4x) = D_x[D_x(x^3 - 4x)] = D_x(3x^2 - 4) = 6x.$$

Si $y = F(x)$, expresaremos la segunda derivada de $F(x)$ con respecto a x mediante

$$D_x^2y = D_x(D_xy).$$

Por ejemplo: si $y = x^4 - x^3 + 3x^2 - 6$, entonces

$$D_xy = 4x^3 - 3x^2 + 6x, \quad D_x^2y = 12x^2 - 6x + 6.$$

La función

$$F'' = \{(x, y) \mid y = D_x^2F(x)\}$$

se llama la **segunda derivada de F** . El dominio de F'' consiste en aquellos números del dominio de F' para los cuales existe $D_x^2F(x)$. Por ejemplo, si

$$F = \{(x, y) \mid y = x^3 - 4x\},$$

entonces

$$F' = \{(x, y) \mid y = 3x^2 - 4\}, \quad F'' = \{(x, y) \mid y = 6x\},$$

y Re es el dominio de cada una de las funciones F , F' y F'' .

A veces resulta conveniente expresar la segunda derivada de una función dada F , mediante D^2F , es decir que

$$D^2F = F''.$$

Por ejemplo, si $F = 4I^3 - 5I^2$, entonces

$$DF = 12I^2 - 10I \quad \text{y} \quad D^2F = 24I - 10.$$

La derivada de $D_x^2F(x)$ con respecto a x se llama **tercera derivada de $F(x)$ con respecto a x** y se expresa por $D_x^3F(x)$. La derivada de la tercera derivada es la cuarta derivada $D_x^4F(x)$ y así sucesivamente hasta la n -ésima o enésima derivada $D^nF(x)$.

La derivada de F'' es la **tercera derivada de F** y se denota por F''' o por D^3F . Las derivadas superiores siguen esta pauta.

A veces es conveniente usar la palabra *orden* en relación con las derivadas superiores. Hablaremos de la derivada $D_xF(x)$, definida en la Sec. 3.1, como la derivada de *primer orden*, de la segunda derivada como la derivada de *segundo orden* y de la enésima derivada como la derivada de *orden n* .

Semejante a la notación D_x^2y , introducida para la segunda derivada, es la notación D_x^3y para la tercera derivada, D_x^4y para la cuarta derivada, etc., usando $D_x^n y$ para la n -ésima derivada.

Por ejemplo, si $y = x^4 - x^3 + 3x^2 - 7$, entonces

$$D_xy = 4x^3 - 3x^2 + 6x, \quad D_x^2y = 12x^2 - 6x + 6,$$

$$D_x^3y = 24x - 6, \quad D_x^4y = 24.$$

En este caso la quinta derivada es cero, al igual que cualquier derivada de orden superior a cinco.

EJERCICIOS

Para cada uno de los ejercicios del 1 al 4, halle D_xy , D_x^2y y D_x^3y :

1. $y = x^5 - 3x^3 + x + 4$.

2. $y = \sqrt{x}$.

3. $y = 1/x^2$.

4. $y = (x^2 - 1)/x^2$.

En cada uno de los ejercicios del 5 al 8 grafique la función F . Halle los valores de x tales que $F'(x) = 0$ y los que hacen $F''(x) = 0$.

5. $F(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 10$.

6. $F(x) = x^4 + 2x^3$.

7. $F(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 7$.

8. $F(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 2$.

9. Si $F(x) = x + 3x^2$, calcule $F'(x)$, $F''(x)$ y $F'''(x)$ en $x = 2$.

10. Si $F(x) = 1/x$, calcule $F'(x)$, $F''(x)$, $F'''(x)$, $F'(\frac{1}{2})$, $F''(\frac{1}{2})$ y $F'''(\frac{1}{2})$.

11. Si $G(t) = 2t^{1/2} - 3t^{3/2} + 8$, calcule $G'(t)$ y $G''(t)$.

12. Si $H(s) = (4/s^3) - (3/s^2)$, calcule $H'(s)$ y $H''(s)$.

En cada uno de los ejercicios del 13 al 16 halle DF , D^2F y D^3F .

13. $F = 5I^5 - \frac{4}{3}I^3 + 3I^2 - 4I + 7$.

14. $F = 10I^{3/2} - 5I^{2/5} + 6I^4$.

15. $F = 5I^2 - 7I + 6$.

16. $F = -4I^{-3} + 7I^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}$.

3.5 Derivadas por la derecha y por la izquierda. El estudiante debe repasar las definiciones dadas en la Sec. 2.1, acerca de los límites por la derecha y por la izquierda.

Si para una $F(x)$ dada, existe el límite por la derecha

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h}$$

este límite es la **derivada de $F(x)$ por la derecha** en $x = c$, y se denota por $F'_+(c)$. Esto es,

$$F'_+(c) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h}$$

De modo semejante, si existe el límite por la izquierda

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(c+h) - F(c)}{h}$$

este límite es la **derivada de $F(x)$ por la izquierda** en $x = c$, y se denota por $F'_-(c)$. Esto es,

$$F'_-(c) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(c+h) - F(c)}{h}$$

Recuérdese que en la Sec. 2.1 se afirmaba que uno o ambos límites

$$\lim_{x \rightarrow a^+} G(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} G(x)$$

podían no existir; además de que podían existir ambos aunque con valores distintos. Recuérdese también que para que exista $\lim_{x \rightarrow a} G(x)$, deben existir ambos

límites y ser iguales. Por tanto, como consecuencia de la definición de derivada dada en la Sec. 3.1, la derivada de $F(x)$ en c , expresada por $F'(c)$, existe si y sólo si existen la derivada por la derecha y por la izquierda en c y además son iguales, esto es,

$$F'(c) \text{ existe} \iff F'_+(c) = F'_-(c).$$

A veces nos referiremos a la derivada por la derecha o a la derivada por la izquierda, o en conjunto las nombraremos como **derivadas por un lado o unilaterales**.

Si $F(x)$ está definida sobre un intervalo cerrado $[a; b]$, el cociente

$$\frac{F(a+h) - F(a)}{h}$$

tiene significado sólo para valores positivos de h . Por tanto, si $F(x)$ tiene una derivada en a , ésta será derivada por la derecha. De manera similar, el cociente

$$\frac{F(b+h) - F(b)}{h}$$

tiene significado sólo para valores negativos de h . Por tanto, si $F(x)$ tiene una derivada en b , ésta será una derivada por la izquierda.

Ejemplo. Encuentre $F'_+(1)$ y $F'_-(1)$ para la función definida por

$$F(x) = x \quad \text{para } x \leq 1$$

$$F(x) = 2x - 1 \quad \text{para } x > 1$$

¿Es F derivable en 1? Explique su respuesta. Grafique F .

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned} F'_+(1) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(1+h) - F(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2(1+h) - 1 - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 2 = 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{y} \quad F'_-(1) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(1+h) - F(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1+h-1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} 1 = 1. \end{aligned}$$

Por tanto la $F(x)$ definida arriba tiene derivadas por la derecha y por la izquierda en 1. La derivada $F'(1)$ no existe porque

$$F'_+(1) \neq F'_-(1).$$

La gráfica de F está dada en la Fig. 3.4.

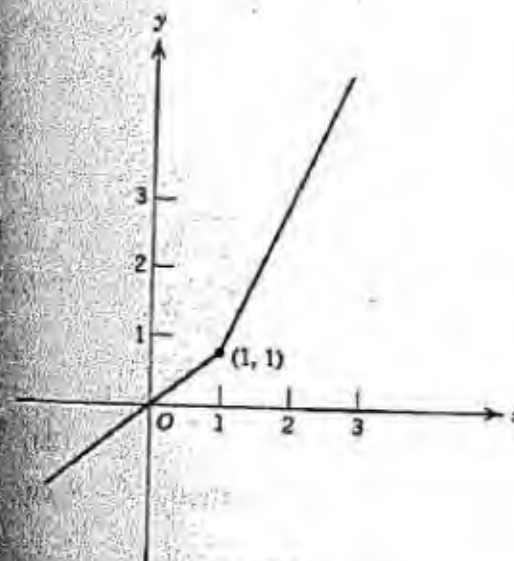


Fig. 3.4

tenemos que (véase Sec. 2.1)

$$\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = 1.$$

Como $F(1) = 1$, se concluye que F es continua en 1. Esto nos brinda un ejemplo de una función que es continua en un punto pero que no es derivable en él.

EJERCICIOS

1. En la Sec. 3.2 observamos que la función

$$F = \{(x, y) \mid y = |x|\}$$

no es derivable en 0. Demuestre que, sin embargo, para $F(x) = |x|$, existen $F'_+(0)$ y $F'_-(0)$ y halle estas derivadas unilaterales.

2. Para la función F dada por

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 & \text{para } 0 \leq x \leq 1, \\ F(x) &= 2x - 2 & \text{para } 1 \leq x \leq 2, \\ F(x) &= -2x + 6 & \text{para } 2 \leq x \leq 3 \end{aligned}$$

encuentre las derivadas unilaterales en 1 y en 2. ¿Es F derivable en 1? ¿Lo es en 2? ¿Es F continua en 1? ¿Lo es en 2? ¿Es F continua sobre su dominio $[0, 3]$?



Fig. 3.5

3.6 Movimiento rectilíneo. Recuerdese que si un punto se mueve sobre una recta una distancia s , en un tiempo t con velocidad uniforme v , entonces

$$s = vt.$$

Si (s_1, t_1) y (s_2, t_2) son dos pares de valores de s y t , tales que

$$s_1 = vt_1 \quad \text{y} \quad s_2 = vt_2,$$

Geométricamente la desigualdad de la derivada por la derecha $F'_+(a)$ y la derivada por la izquierda $F'_-(a)$ significa que la gráfica de F tiene un vértice en $P(a, F(a))$. Por ejemplo examine el punto $(1, 1)$ en la Fig. 3.4.

Nótese que para la función F dada en el ejemplo,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 1) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1.$$

Puesto que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x),$$

entonces

$$s_2 - s_1 = v(t_2 - t_1)$$

y

$$v = \text{velocidad uniforme} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$

La idea de la velocidad media es más general que la de velocidad uniforme. Para cualquier tipo de *movimiento rectilíneo* (es decir, movimiento sobre una recta), como el indicado en la Fig. 3.5, supóngase que la distancia dirigida s , de un punto P , desde un origen O , en un tiempo t está dada por

$$s = S(t).$$

La función

$$S = \{(t, s) \mid s = S(t)\} \quad (20)$$

es llamada **función de posición** del punto P . La **velocidad media** de P durante el lapso $[t_1; t_2]$ se define como

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (21)$$

Por ejemplo, se ha determinado experimentalmente que si un peso cae libremente bajo la influencia de la gravedad, en t segundos caerá $4.9t^2$ m; o sea que si s es la distancia que cae el peso en t segundos,

$$s = 4.9t^2.$$

En este caso $s_1 = 4.9t_1^2$, $s_2 = 4.9t_2^2$ y durante el lapso $[t_1; t_2]$ la velocidad media es

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{4.9t_2^2 - 4.9t_1^2}{t_2 - t_1} = 4.9(t_2 + t_1).$$

En particular, para el intervalo de tiempo $[2; 3]$ la velocidad media es

$$4.9(5) = 24.5 \text{ m/seg.}$$

y para el intervalo de tiempo $[5; 6]$ la velocidad media es

$$4.9(11) = 53.9 \text{ m/seg.}$$

Si en (21) hacemos $t_2 = t_1 + h$, donde $h \neq 0$, entonces $s_2 = S(t_1 + h)$ y la velocidad media de P durante el lapso $[t_1; t_1 + h]$ es

$$\frac{S(t_1 + h) - S(t_1)}{h} \quad (22)$$

Por ejemplo: si $s = S(t) = 4.9t^2$, la velocidad media de P durante el intervalo de tiempo $[t_1; t_1 + h]$ es

$$\frac{S(t_1 + h) - S(t_1)}{h} = \frac{4.9(t_1 + h)^2 - 4.9t_1^2}{h} = 9.8t_1 + 4.9h.$$

Entonces en este caso

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t_1 + h) - S(t_1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (9.8t_1 + 4.9h) = 9.8t_1.$$

Este límite es lo que llamamos la *velocidad instantánea*, o simplemente la *velocidad*, de P en el tiempo t_1 . Puede interpretarse como el valor límite de las velocidades medias, medidas sobre intervalos de tiempo cada vez menores, alrededor de t_1 .

Es evidente que para $S(t) = 4.9t^2$, la velocidad de P en t_1 es

$$S'(t_1) = D_t S(t) \Big|_{t_1}.$$

En términos más generales, si la función de posición de un punto P es

$$S = \{(t, s) \mid s = S(t)\},$$

la **velocidad de P en el tiempo t_1** será $S'(t_1) = D_t S(t) \Big|_{t_1}$, siempre que exista

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t_1 + h) - S(t_1)}{h} = S'(t_1)$$

La función

$$V = \{(t, v) \mid v = D_t S(t)\}, \quad (23)$$

tal que

$$V(t) = D_t S(t), \quad (24)$$

es la llamada **función velocidad** del punto P .

Puesto que $s = S(t)$, $v = V(t)$, y $V(t) = D_t S(t)$, a veces escribimos

$$v = D_t s.$$

Se demostrará posteriormente (Sec. 4.1) que s es creciente sobre un intervalo para el cual $V(t) = D_t S(t)$ sea positiva y que s es decreciente sobre un intervalo para el cual $V(t)$ sea negativa. Con el sistema coordenado dirigido en la forma usual, como se muestra en la Fig. 3.5, decir que s es creciente significa que el punto P se mueve hacia la derecha, y decir que s es decreciente significa que P se mueve hacia la izquierda. Así pues, el signo de la velocidad indica la dirección del movimiento. Cuando $V(t) = 0$, el punto P está en reposo.

La **rapidez de un punto P en el tiempo t_1** es el valor absoluto de su velocidad; o sea que

$$\text{rapidez de } P \text{ en } t_1 = |V(t_1)|.$$

Dado que la rapidez no tiene signo, no indicará dirección en el movimiento. La rapidez es de 25 m/seg si la velocidad es 25 m/seg ó -25 m/seg.

Por ejemplo, considere un punto P cuya función de posición es

$$S = \{(t, s) \mid s = 96t - 16t^2, t \in [0; 6]\}.$$

Entonces

$$v = D_t s = D_t (96t - 16t^2) = 96 - 32t,$$

$$V = \{(t, v) \mid v = 96 - 32t, t \in [0; 6]\}.$$

El dominio de V es $[0; 6]$ puesto que el dominio de S' consiste en los elementos del dominio de S para los cuales exista $S'(t)$.

Si la función velocidad de un punto P es

$$V = \{(t, v) \mid v = V(t)\},$$

la razón

$$\frac{V(t_1 + h) - V(t_1)}{h}$$

se llama **aceleración media** de P durante el lapso $[t_1; t_1 + h]$. Si existe $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(t_1 + h) - V(t_1)}{h}$; este límite es llamado **aceleración de P en el tiempo t_1** , y se denota mediante $A(t_1)$. Esto es,

$$A(t_1) = D_t V(t) \Big|_{t_1} = V'(t_1) = S'(t_1).$$

La función

$$A = \{(t, \alpha) \mid \alpha = A(t)\}, \quad \text{o} \quad A = \{(t, \alpha) \mid \alpha = D_t V(t)\},$$

se llama **función aceleración** del punto P .

Por ejemplo, considere un punto P cuya función de posición es

$$S = \{(t, s) \mid s = t^3 - 6t^2 + 9t + 2, t \in [0; 4]\},$$

y para el cual

$$S(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 2.$$

Entonces $V(t) = D_t S(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3)$,

$$A(t) = D_t V(t) = 6t - 12 = 6(t-2).$$

En este caso la función velocidad es

$$V = \{(t, v) \mid v = 3t^2 - 12t + 9, t \in [0; 4]\}, \quad (25)$$

y la función aceleración es

$$A = \{(t, \alpha) \mid \alpha = 6t - 12, t \in [0; 4]\}. \quad (26)$$

Note que para este ejemplo

$$\{t \mid V(t) = 0\} = \{1, 3\},$$

y note también que

$$\{t \mid V(t) > 0\} = [0; 1) \cup (3; 4],$$

$$\{t \mid V(t) < 0\} = (1; 3).$$

Luego, P se mueve a la derecha cuando $t \in [0; 1)$ y cuando $t \in (3; 4]$; P se mueve hacia la izquierda cuando $t \in (1; 3)$ e invierte su movimiento cuando

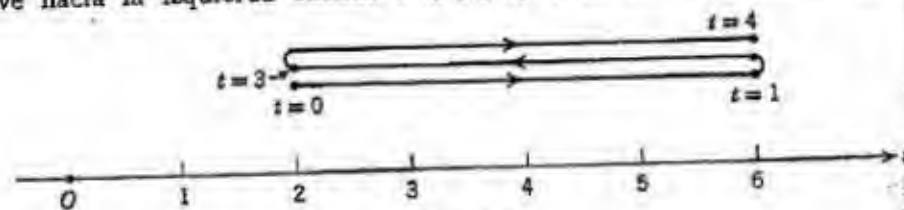


Fig. 3.6

$t = 1$ y $t = 3$. El movimiento del punto está representado en la Fig. 3.6. Si $t = 0$, entonces $s = 2$ y v es positiva. Esto significa que P parte del punto en que $s = 2$ moviéndose hacia la derecha hasta que $t = 1$. Entonces se desplaza hacia la izquierda hasta que $t = 3$ y después hacia la derecha. Obsérvese que $S(1) = 6$, $S(3) = 2$ y $S(4) = 6$.

EJERCICIOS

1. Si se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 128 m seg., su distancia s sobre el punto de partida después de t segundos está dada por $s = 128t - 4.9t^2$. Note que $s = 0$ para $t = 0$ y para $t = 26.2$. Esto significa que la pelota toca el suelo 26.2 segundos después de que fue lanzada. Por tanto la función de posición de la pelota es

$$S = \{(t, s) \mid s = 128t - 4.9t^2, t \in [0; 26.2]\}$$

(a) Encuentre una expresión para la velocidad media en el intervalo de tiempo $[t_1; t_1 + h]$.

(b) Encuentre la velocidad media del intervalo de 2 a 2.1 seg. usando el resultado de (a), del intervalo de 2 a 2.01 seg. y del de 2 a 2.001 seg.

(c) Halle la velocidad en el tiempo t_1 .

(d) Halle la velocidad para $t = 2$, usando el resultado de (c).

(e) Calcule a los cuántos segundos de haber sido lanzada la pelota, lleva una velocidad de 50 m/seg.; de 48 m/seg.

(f) ¿Cuándo su velocidad es cero? ¿A qué altura está en ese instante? ¿Es esa la máxima altura que alcanza la pelota?

(g) Calcule la aceleración en el tiempo t_1 .

(h) Expresé la función velocidad de la pelota en la forma (25) y la función aceleración, en la forma (26).

2. Si la función de posición de un punto es

$$S = \{(t, s) \mid s = 3t^2 - 5t + 6, t \in [-2; 4]\},$$

determine lo siguiente:

(a) La velocidad media en el intervalo $[t_1; t_1 + h]$.

(b) La velocidad media para el intervalo de 3 a 3.01 segundos; id. para el intervalo de 3 a 3.0001 segundos.

(c) La velocidad en el tiempo t_1 .

(d) La velocidad en el tiempo $t = 3$.

(e) La aceleración en el tiempo t_1 .

(f) Expresé en la forma acostumbrada la función velocidad y la función aceleración del punto.

Cada uno de los ejercicios del 3 al 6 se refiere al movimiento rectilíneo y en cada uno de ellos se da la distancia s , de un punto P al origen O , en un tiempo t . En cada caso halle $V(t)$ y $A(t)$. Calcule también los valores de s , v y a para el valor de t dado.

3. $s = 80t - 16t^2$; $t = 4$.

5. $s = t + (2/t^2)$; $t = 2$.

4. $s = t^2 + (1/t) + 3$; $t = \frac{1}{2}$.

6. $s = 3t^2 + (4/\sqrt{t})$; $t = 4$.

7. Un cuerpo compacto, pequeño cae libremente desde un globo en reposo a 1600 m sobre el suelo.

(a) ¿Cuánto tardará el cuerpo en llegar al suelo? *Sugestión:* Escoja como origen el punto del suelo que queda directamente bajo el punto desde donde se

dejó caer el cuerpo y dirija el eje de las distancias hacia arriba. En esa forma $s = 1600 - 4.9t^2$.

(b) Dé la función de posición, la función velocidad y la función aceleración del cuerpo.

(c) Calcule la velocidad y la aceleración 2 segundos después de que el cuerpo inició el movimiento; id. 8 segundos después de iniciar el movimiento.

(d) ¿A qué altura del suelo se hallará el cuerpo 5 segundos después de desprenderse del globo?

(e) ¿Qué velocidad lleva el cuerpo en el momento de tocar el suelo?

8. Desde el mismo globo del ejercicio 7 se arroja verticalmente hacia arriba un cuerpo compacto pequeño, con una velocidad de 30 m/seg. Repita el ejercicio 7 para esta situación. *Sugestión:* Si se usa el mismo sistema coordenado que en el ejercicio 7, tendremos $s = 1600 + 30t - 4.9t^2$.

9. Una pequeña esfera rueda hacia arriba por un plano inclinado, y su función de posición es

$$S = \{(t, s) \mid s = 60t - 5t^2, t \in [0; 12]\},$$

donde s es la distancia en metros desde su punto de partida, t segundos después de partir.

(a) Dé la función velocidad y la función aceleración de la esfera.

(b) Halle la velocidad y la aceleración de la esfera 4 segundos después de partir; id. 8 segundos después de partir.

(c) ¿Para qué valores de t está la esfera a 160 m rampa arriba desde el punto de partida?

(d) ¿Cuándo deja de subir la esfera?

(e) ¿Cuál es el máximo avance de la esfera sobre la rampa?

10. Se deja caer una piedra desde un acantilado de 400 m de altura. ¿Cuál es el tiempo que tarda en llegar al suelo, bajo el acantilado y con qué velocidad toca el suelo? *Sugestión:* Escoja como origen de coordenadas el punto desde el que se dejó caer la piedra y dirija el eje de las distancias hacia abajo. Entonces $s = 4.9t^2$.

11. Se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba de modo que su altura s , dada en metros, t segundos después de disparado está dada por $s = 731t - 4.9t^2$, $0 \leq t \leq 45.7$.

(a) Halle $V(t)$.

(b) ¿Qué tiempo emplea el proyectil en alcanzar su altura máxima?

(c) ¿Cuál es la velocidad del proyectil al salir de la boca de fuego?

(d) ¿Con qué velocidad toca el proyectil el suelo al caer?

(e) Expresé en la forma (20) la función de posición S , la función velocidad V y la función aceleración A del proyectil.

3.7 Derivación de seno y coseno. En la Sec. 2.2 demostramos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \quad (27)$$

para $h \in \mathbb{R}$. En la Sec. 2.3 demostramos igualmente que las funciones

$$\text{Sen} = \{(x, y) \mid y = \sin x, x \in \mathbb{R}\}$$

y

$$\text{Cos} = \{(x, y) \mid y = \cos x, x \in \mathbb{R}\}$$

son continuas sobre \mathbb{R} ; es decir que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sin(x+h) = \sin x \quad (28)$$

y

$$\lim_{h \rightarrow 0} \cos(x+h) = \cos x \quad (29)$$

para $x \in \mathbb{R}$.

Usando estos resultados justificaremos las fórmulas

$$D_x \sin x = \cos x \quad (30)$$

y

$$D_x \cos x = -\sin x \quad (31)$$

para $x \in \mathbb{R}$. En otras palabras, demostraremos que Sen y Cos son derivables sobre \mathbb{R} .

Sea $F(x) = \sin x$. Entonces $F(x+h) = \sin(x+h)$ y

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

Mediante la fórmula

$$\sin u - \sin v = 2 \cos \left(\frac{u+v}{2} \right) \sin \left(\frac{u-v}{2} \right)$$

haciendo $u = x+h$ y $v = x$, obtendremos

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{2 \cos(x + \frac{1}{2}h) \sin \frac{1}{2}h}{h} \\ &= \cos(x + \frac{1}{2}h) \frac{\sin \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$D_x \sin x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x + \frac{1}{2}h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}.$$

La condición de que exista el límite indicado,

Según el teorema 9 de la Sec. 2.2,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \cos(x + \frac{1}{2}h) = \lim_{1/2h \rightarrow 0} \cos(x + \frac{1}{2}h)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} = \lim_{1/2h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}.$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} D_x \sin x &= \lim_{1/2h \rightarrow 0} \cos(x + \frac{1}{2}h) \cdot \lim_{1/2h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} \\ &= (\cos x) \cdot 1, \quad [\text{Según (27) y (29)}] \end{aligned}$$

o sea que

$$D_x \sin x = \cos x.$$

En forma semejante, sea $F(x) = \cos x$. Entonces

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h},$$

y usando la fórmula

$$\cos u - \cos v = -2 \sin\left(\frac{u+v}{2}\right) \sin\left(\frac{u-v}{2}\right),$$

donde $u = x+h$ y $v = x$, obtendremos

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{2 \sin(x + \frac{1}{2}h) \sin \frac{1}{2}h}{h} \\ &= -\sin(x + \frac{1}{2}h) \frac{\sin \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} D_x \cos x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = -\lim_{\frac{1}{2}h \rightarrow 0} \sin(x + \frac{1}{2}h) \cdot \lim_{\frac{1}{2}h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} \\ &= (-\sin x) \cdot 1, \end{aligned}$$

o sea que

$$D_x \cos x = -\sin x.$$

En términos de funciones, (30) y (31) se escribirán como

$$D \text{ Sen} = \text{Cos} \quad (32)$$

y

$$D \text{ Cos} = -\text{Sen}, \quad (33)$$

respectivamente.

Si empleamos las fórmulas (30) y (31) junto con las fórmulas para derivadas establecidas en la Sec. 3.3, podremos hallar las derivadas de una gran variedad de expresiones. Por ejemplo,

$$D_x(3 \sin x) = 3D_x \sin x = 3 \cos x;$$

$$D_x(3x^2 - 4 \cos x) = D_x(3x^2) - D_x(4 \cos x) = 6x + 4 \sin x;$$

$$D_x\left(\frac{4}{x^3} + 7 \cos x\right) = D_x(4x^{-3}) + D_x(7 \cos x) = -12x^{-4} - 7 \sin x;$$

$$D_x(5 \sin x - 7 \cos x) = D_x(5 \sin x) - D_x(7 \cos x) = 5 \cos x + 7 \sin x.$$

Las siguientes son aplicaciones de las fórmulas (32) y (33) junto con las previamente establecidas para las derivadas de funciones.

$$D(\text{Sen} - 3I^4) = D \text{ Sen} - D(3I^4) = \text{Cos} - 12I^3,$$

$$D(\text{Sen} + 2 \text{Cos}) = D \text{ Sen} + D(2 \text{Cos}) = \text{Cos} - 2 \text{Sen}.$$

EJERCICIOS

En los ejercicios del 1 al 4 calcule $D_x F(x)$ usando cualesquiera de las fórmulas para derivadas ya establecidas.

1. $F(x) = 3x^{1/3} + 7 \sin x$

2. $F(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} - 8 \sin x.$

3. $F(x) = 5x^2 + 4x + \frac{7}{x^3} + 8 \cos x.$

4. $F(x) = \frac{3(x-1)(x-2)}{5x^2} + \frac{1}{6} \cos x.$

5. (a) ¿Cuál es la pendiente de la tangente a la curva cuya ecuación es $y = \sin x$, en el punto cuya abscisa es x_1 ? ¿En el punto P_1 , cuya abscisa es $\pi/6$? ¿En el punto P_2 , cuya abscisa es $\pi/4$?

(b) Dé una ecuación de la tangente a la gráfica de $y = \sin x$, en el punto cuya abscisa es $\pi/6$. Id. en el punto cuya abscisa es $\pi/4$.

(c) Trace la gráfica de $y = \sin x$, y sobre el mismo sistema coordenado grafique las tangentes cuyas ecuaciones calculó en (b).

6. Repita el ejercicio 5 con $y = \cos x$ en lugar de $y = \sin x$.

7. (a) Usando el método de suma de ordenadas (vea el ejercicio 19, Sec. 2.2), construya la gráfica de $y = x^2 + \sin x$.

(b) Dé una ecuación de la línea tangente y una ecuación de la línea normal a la gráfica de (a) en el punto cuya abscisa es $\pi/3$. Id. en el punto cuya abscisa es 1.

8. Repita el ejercicio 7 con $y = -2x + \frac{1}{2} \cos x$.

9. (a) Encuentre los puntos de la gráfica de

$$F = \{(x, y) \mid y = \sin x, -2\pi \leq x \leq 2\pi\}$$

en los que la tangente es horizontal.

(b) Id. en los que la tangente es paralela a la gráfica de $y = x$.

(c) Construya la gráfica de F e indique mediante P_1, P_2, P_3 y P_4 los puntos encontrados en (a), y señale con Q_1, Q_2 y Q_3 los puntos hallados en (b).

10. (a) Encuentre los puntos de la gráfica de

$$H = \{(x, y) \mid y = \cos x, -2\pi \leq x \leq 2\pi\}$$

en los que la tangente es horizontal.

(b) En los que la tangente es paralela a la gráfica de $y = x$.

(c) Construya la gráfica de H e indique mediante P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5 los puntos encontrados en (a), y señale con Q_1 y Q_2 los puntos hallados en (b).

11. Encuentre los puntos de la gráfica de la función F del ejercicio 9, en los que $D_x^2 F(x) = 0$. Indique estos puntos en la figura que construyó en el ejercicio 9(c).

12. Encuentre los puntos de la gráfica de la función H del ejercicio 10, en los que $D_x^2 H(x) = 0$. Indique estos puntos en la figura que construyó en el ejercicio 10(c).

13. Compruebe la identidad

$$\begin{aligned} \sin^2(x+h) - \sin^2 x &= [\sin(x+h) + \sin x][\sin(x+h) - \sin x] \\ &= [\sin(x+h) + \sin x][2 \cos(x + \frac{1}{2}h) \sin \frac{1}{2}h], \end{aligned}$$

y úsela para demostrar que

$$D_x \sin^2 x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x+h) - \sin^2 x}{h} = 2 \sin x \cos x:$$

14. Compruebe la identidad

$$\sin 2(x+h) - \sin 2x = 2 \cos(2x+h) \sin h,$$

y úsela para demostrar que

$$D_x \sin 2x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2(x+h) - \sin 2x}{h} = 2 \cos 2x:$$

15. Proceda como en el ejercicio 13 para demostrar que $D_x \cos^2 x = -2 \cos x \sin x$.

16. Proceda como en el ejercicio 14 para demostrar que $D_x \cos 2x = -2 \sin 2x$.

En los ejercicios del 17 al 20 calcule $D_x F(x)$ y $D_x^2 F(x)$.

17. $F(x) = 5x^7 + 4 \sin x - 7 \cos x$.

18. $F(x) = 12x^{3/2} - 5 \sin x + \frac{3}{2} \cos x$.

19. $F(x) = 6x^{7/3} + \frac{3}{8}(\sin x - \cos x)$.

20. $F(x) = 8x^5 + \frac{3}{\sqrt{x}} - 5 \cos x$:

En los ejercicios del 21 al 24 calcule DF y D^2F .

21. $F = 5I + 4 \text{ Sen} - 7 \text{ Cos}$.

22. $F = 12I^{3/2} - 5 \text{ Sen} + \frac{3}{2} \text{ Cos}$.

23. $F = 6I^{7/3} + \frac{3}{8}(\text{Sen} - \text{Cos})$.

24. $F = 8I^5 + 3I^{-1/2} - 5 \text{ Cos}$.

3.8 Fórmulas para productos y cocientes. Demostraremos ahora el siguiente teorema.

Teorema 9. Si las funciones U y V son derivables sobre un intervalo S , la función $F = U \cdot V$ es derivable sobre S y

$$D_x[U(x)V(x)] = U(x) D_x V(x) + V(x) D_x U(x) \quad (34)$$

para $x \in S$.

Demostración. Puesto que $F(x) = U(x)V(x)$, tenemos que

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{U(x+h)V(x+h) - U(x)V(x)}{h}$$

Restando y sumando el término $U(x+h)V(x)$ en el numerador del lado derecho de esta igualdad, obtendremos, después de agrupar términos,

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{U(x+h)V(x+h) - U(x+h)V(x) + U(x+h)V(x) - U(x)V(x)}{h} \\ &= U(x+h) \left[\frac{V(x+h) - V(x)}{h} \right] + V(x) \left[\frac{U(x+h) - U(x)}{h} \right]. \end{aligned}$$

Como U y V son derivables sobre S , sabemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(x+h) - U(x)}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h}$$

existen para $x \in S$ y son respectivamente iguales a $D_x U(x)$ y $D_x V(x)$. Además, ya que $D_x U(x)$ existe para $x \in S$, sabemos que U es continua sobre S , y que $\lim_{h \rightarrow 0} U(x+h) = U(x)$ para $x \in S$. Por tanto, usando los apropiados teoremas sobre límites, tendremos

$$\begin{aligned} D_x F(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} U(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h} \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} V(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(x+h) - U(x)}{h}; \end{aligned}$$

o bien

$$D_x[U(x)V(x)] = U(x) D_x V(x) + V(x) D_x U(x) \quad \text{para } x \in S,$$

o lo que es equivalente

$$D(UV) = U \cdot DV + V \cdot DU. \quad (35)$$

Es decir, que la derivada del producto de dos funciones derivables es igual a la primera función por la derivada de la segunda más la segunda función por la derivada de la primera.

Llamamos a (34) y (35) las fórmulas para la derivada del producto.

Nótese que la fórmula

$$D_x[cV(x)] = c D_x V(x),$$

obtenida en la Sec. 3.3, es un caso especial de la fórmula del producto. Si en (34) hacemos $c = U(x)$, tendremos

$$D_x[cV(x)] = c D_x V(x) + V(x) D_x(c) = c D_x V(x) + V(x) \cdot 0 = c D_x V(x).$$

Ejemplo 1. Si $F(x) = 2x^3 \cos x$, halle $D_x F(x)$.

Solución. Considerando a $2x^3$ como $U(x)$ y al $\cos x$ como $V(x)$ y aplicando la fórmula (34) obtenemos

$$D_x F(x) = 2x^3 D_x \cos x + \cos x D_x(2x^3) = -2x^3 \sin x + 6x^2 \cos x.$$

Ejemplo 2. Si $F = 4I^5 \cdot \text{Sen}$, halle DF .

Solución. Usando (35), obtenemos

$$D(4I^5 \cdot \text{Sen}) = 4I^5 \cdot D \text{ Sen} + \text{Sen} \cdot D(4I^5) = 4I^5 \cdot \text{Cos} + 20I^4 \cdot \text{Sen}.$$

Teorema 10. Si las funciones U y V son derivables y si $V(x) \neq 0$ sobre el intervalo S , entonces $F = U/V$ es derivable sobre S y

$$D_x \left[\frac{U(x)}{V(x)} \right] = \frac{V(x) D_x U(x) - U(x) D_x V(x)}{[V(x)]^2} \quad (36)$$

para $x \in S$.

Demostración. Sea $F(x) = \frac{U(x)}{V(x)}$. Entonces $F(x+h) = \frac{U(x+h)}{V(x+h)}$, y

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \frac{U(x+h)}{V(x+h)} - \frac{U(x)}{V(x)} \\ &= \frac{V(x)U(x+h) - U(x)V(x+h)}{V(x+h)V(x)} \end{aligned}$$

Restando y sumando $U(x)V(x)$ en el numerador, la fracción se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{V(x)U(x+h) - U(x)V(x) + U(x)V(x) - U(x)V(x+h)}{h} \\ &= \frac{V(x)[U(x+h) - U(x)] - U(x)[V(x+h) - V(x)]}{h} \end{aligned}$$

Dividiendo entre h ambos lados de la ecuación obtenemos

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{V(x) \left[\frac{U(x+h) - U(x)}{h} \right] - U(x) \left[\frac{V(x+h) - V(x)}{h} \right]}{1}$$

Puesto que U y V son derivables sobre S , sabemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(x+h) - U(x)}{h} = D_x U(x) \quad \text{y} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h} = D_x V(x)$$

existen para $x \in S$ y son respectivamente iguales a $D_x U(x)$ y $D_x V(x)$. Además, puesto que $D_x V(x)$ existe para $x \in S$, sabemos que V es continua sobre S y que $\lim_{h \rightarrow 0} V(x+h) = V(x)$ para $x \in S$. Por tanto, mediante el uso de los teoremas de límites apropiados, tendremos

$$\begin{aligned} D_x F(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(x) \left[\frac{U(x+h) - U(x)}{h} \right] - U(x) \left[\frac{V(x+h) - V(x)}{h} \right]}{1} \\ &= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} V(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(x+h) - U(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} U(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} V(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} V(x)} \end{aligned}$$

o bien

$$D_x \left[\frac{U(x)}{V(x)} \right] = \frac{V(x) D_x U(x) - U(x) D_x V(x)}{[V(x)]^2} \quad \text{para } x \in S,$$

lo que equivale a

$$D \left(\frac{U}{V} \right) = \frac{V \cdot D U - U \cdot D V}{V^2} \quad (37)$$

Es decir que la derivada del cociente de dos funciones derivables es igual al denominador multiplicado por la derivada del numerador, menos el numerador multiplicado por la derivada del denominador y todo dividido entre el cuadrado del denominador.

Llamamos a (36) y (37), fórmulas para la derivada del cociente.

Ejemplo 3. Si $F(x) = \frac{x^2 + 2}{3x - 1}$; halle $D_x F(x)$

Solución. Considerando a $x^2 + 2$ como $U(x)$ y a $3x - 1$ como $V(x)$ y aplicando la fórmula (36), obtenemos

$$\begin{aligned} D_x F(x) &= \frac{(3x - 1) D_x (x^2 + 2) - (x^2 + 2) D_x (3x - 1)}{(3x - 1)^2} \\ &= \frac{(3x - 1)(2x) - (x^2 + 2)(3)}{(3x - 1)^2} = \frac{3x^2 - 2x - 6}{(3x - 1)^2} \end{aligned}$$

Ejemplo 4. Si $G = \frac{I^2}{\text{Sen}}$; halle DG :

Solución. Usando (37) obtenemos

$$DG = \frac{\text{Sen} \cdot D I^2 - I^2 \cdot D \text{Sen}}{\text{Sen}^2} = \frac{2I \cdot \text{Sen} - I^2 \cdot \text{Cos}}{\text{Sen}^2}$$

Supongamos que el denominador de la fracción $\frac{U(x)}{V(x)}$ es constante, sea $V(x) = k$. Entonces usando (36) obtenemos

$$D_x \left[\frac{U(x)}{k} \right] = \frac{k D_x U(x) - U(x) D_x k}{k^2}$$

Pero según el teorema 2, $D_x k = 0$. Por lo que

$$D_x \left[\frac{U(x)}{k} \right] = \frac{1}{k} D_x U(x). \quad (38)$$

También podemos considerar la fracción $\frac{U(x)}{k}$ como el producto de la constante $1/k$ por $U(x)$ y así usar la fórmula (12) para demostrar (38).

Ejemplo 5. Si $y = \frac{x^2 - 4x + 2 \text{ sen } x}{137}$, halle $D_x y$.

Solución. Usando (38) tenemos

$$\begin{aligned} D_x y &= D_x \left[\frac{1}{137} (x^2 - 4x + 2 \text{ sen } x) \right] = \frac{1}{137} D_x (x^2 - 4x + 2 \text{ sen } x) \\ &= \frac{1}{137} (2x - 4 + 2 \text{ cos } x). \end{aligned}$$

EJERCICIOS

- Si $F(x) = (x^2 - 4)(x^4 + 5)$, halle $D_x F(x)$:
 - desarrollando $(x^2 - 4)(x^4 + 5)$ en su forma polinomial y usando entonces la fórmula (18) de la Sec. 3.3;
 - considerando $F(x)$ como el producto de $x^2 - 4$ y $x^4 + 5$ y usando la fórmula para el producto.
 - ¿Son iguales los resultados de (a) y (b)?
- En cada uno de los ejercicios del 2 al 4 encuentre $D_x F(x)$ de dos modos (primero: desarrollando el producto y en seguida derivando; después por aplicación directa de la fórmula del producto) y pase de un resultado al otro.

$$2. F(x) = (x^3 - x)(x^3 + 4). \quad 3. F(x) = \sqrt{x}(x^3 + 3x^2).$$

$$4. F(x) = (4x^2 - 6x^2)(3 \text{ sen } x - 4 \text{ cos } x).$$

En los ejercicios del 5 al 20 halle $D_x F(x)$.

$$5. F(x) = 5 \text{ sen } x \text{ cos } x.$$

$$6. F(x) = 3x^{2/3} \text{ cos } x.$$

$$7. F(x) = \frac{\text{cos } x}{7}.$$

$$8. F(x) = \frac{x \text{ sen } x}{9}.$$

$$9. F(x) = (x^3 + 1)(2x^4 - x + 5).$$

$$10. F(x) = (x + 1)^2(2x^3 - 4x^2).$$

$$11. F(x) = (3 \text{ cos } x)(x^3 - 4x).$$

$$12. F(x) = (\text{sen } x)(x^{5/3} - 8x).$$

$$13. F(x) = \frac{3x + 4}{5x - 3}.$$

$$14. F(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2 - 4}.$$

$$15. F(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 - x}.$$

$$16. F(x) = \frac{x^2 + 2}{3x - 1}.$$

17. $F(x) = \frac{\sin x}{x}$.

19. $F(x) = \frac{2x^3 - 4x}{3 \sin x}$.

21. Calcule $D_x \tan x$. *Sugerión:* Recuerde que $\tan x = (\sin x)/(\cos x)$ y use la fórmula del cociente. Note que $\{x \mid \cos x = 0\} = \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \text{ es un entero}\right\}$ debe excluirse del dominio de la función $\tan = \{(x, y) \mid y = \tan x\}$.

22. (a) Calcule $D_x \cot x$. (b) ¿Qué números deben excluirse del dominio de $\cot = \{(x, y) \mid y = \cot x\}$?

En cada uno de los ejercicios del 23 al 30 halle la derivada indicada

23. $D(2x^3 - 3 \sin x)$.

25. $D\left(\frac{\sin}{x+4}\right)$.

27. $D\left(\frac{1 + \sin}{1 + \cos}\right)$.

29. $D\left(\frac{\cos}{8}\right)$.

18. $F(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$.

20. $F(x) = \frac{5x^{7/5} + 7x^3}{4 \cos x}$.

24. $D(I^3 \cdot \cos)$.

26. $D\left(\frac{3 \cos}{x^2 - 3}\right)$.

28. $D(I^5 \cdot 4 \sin)$.

30. $D(\sin \cdot \cos)$.

3.9 La derivada de una función compuesta. Recuerdese de la Sec. 1.6, que la compuesta de la función

$$U = \{(u, y) \mid y = U(u)\}$$

con la función

$$V = \{(x, u) \mid u = V(x)\}$$

es la función

$$F = U[V] = \{(x, y) \mid y = U[V(x)]\}$$

para la cual $F(x) = U[V(x)]$.

El propósito de esta sección es desarrollar una fórmula para $D_x U[V(x)]$; esta fórmula es llamada frecuentemente *regla de la cadena*.

Teorema 11. Si la función

$$V = \{(x, u) \mid u = V(x)\}$$

es derivable sobre un intervalo S_1 y si la función

$$U = \{(u, y) \mid y = U(u)\}$$

es derivable sobre el intervalo $S_2 = \{V(x) \mid x \in S_1\}$, entonces la función compuesta

$$U[V] = \{(x, y) \mid y = U[V(x)]\}$$

es derivable sobre S_1 y

$$D_x U[V(x)] = U'[V(x)] \cdot D_x V(x)$$

para $x \in S_1$.

Demostración. Sea F la compuesta de U con V , de modo que $F(x) = U[V(x)]$. Deseamos demostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = U'[V(x)] \cdot D_x V(x)$$

para $x \in S_1$. Usando la notación

$$u = V(x), \quad u+k = V(x+h), \quad k = V(x+h) - V(x),$$

y observando que cuando x y $x+h$ están en S_1 , u y $u+k$ están en S_2 , tenemos que

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{U[V(x+h)] - U[V(x)]}{h} = \frac{U(u+k) - U(u)}{h}$$

para $x \in S_1$. Por tanto, deseamos calcular

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(u+k) - U(u)}{h}$$

Expresemos $U(u+k) - U(u)$ en forma más conveniente.

Notemos que puesto que U es derivable sobre S_2 y ya que u y $u+k$ están en S_2 , tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{U(u+k) - U(u)}{k} = U'(u). \quad (40)$$

Definamos una función G que cumpla con:

$$G(k) = \begin{cases} \frac{U(u+k) - U(u)}{k} - U'(u) & \text{si } k \neq 0 \\ 0 & \text{si } k = 0. \end{cases} \quad (41)$$

De esta especificación y de (40) se sigue que dada cualquier $\epsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que

$$|G(k)| < \epsilon \quad \text{cuando } |k| < \delta;$$

o sea que G es continua en 0. Usando (41) podemos escribir

$$U(u+k) - U(u) = U'(u)k + kG(k)$$

para toda k tal que $(u+k) \in S_2$ y en consecuencia

$$\frac{U(u+k) - U(u)}{h} = U'(u) \frac{k}{h} + \frac{k}{h} G(k).$$

Recuérdese que $k = V(x+h) - V(x)$, de modo que podemos poner

$$\frac{U(u+k) - U(u)}{h} = U'(u) \left[\frac{V(x+h) - V(x)}{h} \right] + \left[\frac{V(x+h) - V(x)}{h} \right] G(k).$$

De donde

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(u+h) - U(u)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} U'(u) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} G(h),$$

siempre que existan los límites indicados. Recuérdese que

$$\lim_{h \rightarrow 0} U'(u) = U'(u) = U'[V(x)],$$

y por hipótesis

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h} = D_x V(x).$$

Puesto que G es continua en 0 y puesto que $\lim_{h \rightarrow 0} h = 0$, podemos usar el teorema 14 de la Sec. 2.3 para calcular $\lim_{h \rightarrow 0} G(h) = G(0) = 0$. Por tanto

$$F'(x) = D_x U[V(x)] = U'[V(x)] \cdot D_x V(x)$$

para $x \in S_1$.

Frecuentemente se escribe la fórmula (39) en la forma

$$D_x U[V(x)] = U'(u) \cdot D_x V(x) \quad (42)$$

entendiéndose que $u = V(x)$.

Ya que en el teorema 11 $y = U(u)$ y $u = V(x)$, de modo tal que $y = F(x) = U[V(x)]$, la fórmula (42) a menudo se escribe en la forma

$$D_x y = D_u y \cdot D_x u \quad (43)$$

sobrentendiéndose que debemos substituir u por $V(x)$ en la expresión para $D_u y$, después de que se ha obtenido la derivada $D_x y$.

Al igual que las fórmulas previas para las derivadas de correspondientes, la fórmula (39) tiene una análoga para funciones, que es

$$D(U[V]) = DU[V] \cdot DV. \quad (44)$$

En (44), $DU[V]$ significa la compuesta de la función DU con la función V .

La fórmula (42), se llama regla de la cadena y es de gran importancia en el cálculo. Considere el problema de hallar $D_x(3x^2 - 5)^8$. Podemos expresar $(3x^2 - 5)^8$ como un polinomio y entonces derivar el resultado como en la Sec. 3.3. Pero esto resultaría tedioso. Mejor que eso, consideremos la función F tal que $F(x) = (3x^2 - 5)^8$ como la compuesta $U[V]$ donde $U(u) = u^8$ y $V(x) = 3x^2 - 5$; o sea,

$$F(x) = u^8 \quad \text{donde} \quad u = 3x^2 - 5.$$

Puesto que U y V son derivables sobre \mathbb{R} , siendo

$$U'(u) = 8u^7 \quad \text{y} \quad D_x V(x) = 6x,$$

podemos aplicar el teorema 11 y escribir

$$D_x(3x^2 - 5)^8 = 8(3x^2 - 5)^7 \cdot D_x(3x^2 - 5) \\ = 8(3x^2 - 5)^7 (6x) = 48x(3x^2 - 5)^7.$$

En la práctica se acostumbra a no introducir de hecho la variable intermedia u , en el citado procedimiento. Pensamos en que $3x^2 - 5$ desempeña el papel de u en u^8 y simplemente escribimos

$$D_x(3x^2 - 5)^8 = 8(3x^2 - 5)^7 \cdot D_x(3x^2 - 5) = 48x(3x^2 - 5)^7.$$

Teorema 12. Si la función $V = \{(x, u) \mid u = V(x)\}$ es derivable sobre un intervalo S_1 y si $[V(x)]^p$ y $[V(x)]^{p-1}$ están definidas para $x \in S_2 \subseteq S_1$ y p es un número racional, entonces la función

$$V^p = \{(x, y) \mid y = [V(x)]^p\}$$

es derivable sobre S_2 y

$$D_x[V(x)]^p = p[V(x)]^{p-1} \cdot D_x V(x) \quad (45)$$

para $x \in S_2$.

Demostración: El teorema 12 se sigue de la aplicación de la regla de la cadena en la forma (43), a

$$y = u^p \quad \text{donde} \quad u = V(x)$$

y donde $D_u y = pu^{p-1}$.

Como ejemplo del uso de (45), encontramos $D_x(2x^3 - 4)^{1/3}$. Pensamos en

$$D_x(2x^3 - 4)^{1/3} \quad \text{como} \quad D_x u^{1/3}$$

donde

$$u = 2x^3 - 4.$$

Usando (45) obtenemos

$$D_x(2x^3 - 4)^{1/3} = \frac{1}{3}(2x^3 - 4)^{-2/3} \cdot D_x(2x^3 - 4) \\ = \frac{1}{3(2x^3 - 4)^{2/3}} \cdot 6x^2 = \frac{2x^2}{(2x^3 - 4)^{2/3}}.$$

Nótese que esta derivada no existe para los valores de x tales que $2x^3 - 4 = 0$.

Consideremos el problema de encontrar $D_x \sin(2x + 5)$. Hemos demostrado que si $F = \{(x, y) \mid y = \sin x\}$, entonces $F' = \{(x, y) \mid y = \cos x\}$; esto es: $D_x \sin x = \cos x$. Pero aquí tenemos la función $G = \{(x, y) \mid y = \sin(2x + 5)\}$, que seguramente no es igual a la función F y por tanto, el resultado $D_x \sin x = \cos x$ no se aplica a $G(x) = \sin(2x + 5)$. No obstante, consideremos la función G para la cual $G(x) = \sin(2x + 5)$, como la compuesta $U[V]$ donde $U(u) = \sin u$ y $V(x) = 2x + 5$; es decir,

$$G(x) = \sin u \quad \text{donde} \quad u = 2x + 5.$$

Puesto que U y V son derivables sobre \mathbb{R} , siendo $U'(u) = \cos u$ y $D_x V(x) = 2$, podemos aplicar el teorema 11 y tener

$$D_x \sin(2x + 5) = [\cos(2x + 5)](2) = 2 \cos(2x + 5).$$

En general, si la función $V = \{(x, u) \mid u = V(x)\}$ es derivable sobre un intervalo S , entonces las funciones

$$\sin[V] \quad \text{y} \quad \cos[V]$$

son derivables sobre S , y además

$$D_x \sin u = \cos u \cdot D_x u, \quad (46)$$

$$D_x \cos u = -\sin u \cdot D_x u, \quad (47)$$

donde $u = V(x)$ y $x \in S$.

Para demostrar (46), hagamos $y = \sin u$ y $u = V(x)$ y apliquemos la regla de la cadena en la forma (43) para obtener

$$D_x \sin u = D_u \sin u \cdot D_x u.$$

Ahora, según (30) $D_u \sin u = \cos u$ y por tanto

$$D_x \sin u = \cos u \cdot D_x u.$$

De modo semejante se puede demostrar (47)

Las siguientes son ejemplos del uso de (46) y (47):

$$D_x \sin(2x^2 - 3) = \cos(2x^2 - 3) \cdot D_x(2x^2 - 3) = 4x \cos(2x^2 - 3);$$

$$D_x \cos(4x^3 + 5) = -\sin(4x^3 + 5) \cdot D_x(4x^3 + 5) = -12x^2 \sin(4x^3 + 5).$$

Observemos que puesto que las funciones Sen y Cos son derivables sobre \mathbb{R} , las fórmulas (46) y (47) son válidas para todos los valores de x para los cuales $u = V(x)$ está definida y existe $D_x u$. Por ejemplo: mediante el uso de (46)

$$\begin{aligned} D_x \sin \sqrt{4-x^2} &= \cos(4-x^2)^{1/2} \cdot D_x(4-x^2)^{1/2} \\ &= \cos(4-x^2)^{1/2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{(4-x^2)^{1/2}} \\ &= -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \cos \sqrt{4-x^2}. \end{aligned}$$

Es claro que este resultado sólo se cumple para $x \in (-2; 2)$.

Ejemplo 1. Halle $D_x \sin^7(3x^2 - 1)$.

Solución. Hallar la derivada pedida se puede interpretar como encontrar $D_x u^7$, donde $u = \sin(3x^2 - 1)$. Usando (45) tenemos

$$D_x \sin^7(3x^2 - 1) = 7 \sin^6(3x^2 - 1) \cdot D_x \sin(3x^2 - 1)$$

y de (46) obtenemos

$$D_x \sin(3x^2 - 1) = \cos(3x^2 - 1) \cdot D_x(3x^2 - 1) = 6x \cos(3x^2 - 1),$$

y en consecuencia

$$D_x \sin^7(3x^2 - 1) = 42x \sin^6(3x^2 - 1) \cos(3x^2 - 1).$$

Es usual combinar todos estos pasos de esta forma:

$$\begin{aligned} D_x \sin^7(3x^2 - 1) &= 7 \sin^6(3x^2 - 1) \cdot D_x \sin(3x^2 - 1) \\ &= 42x \sin^6(3x^2 - 1) \cos(3x^2 - 1). \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Si $y = 3x(x^2 - 3)^{1/2}$, halle $D_x y$.

Solución. Usamos la fórmula para la derivada de un producto y escribimos

$$D_x y = 3x D_x(x^2 - 3)^{1/2} + (x^2 - 3)^{1/2} D_x(3x).$$

Utilizando la regla de la cadena para encontrar $D_x(x^2 - 3)^{1/2}$, obtenemos

$$\begin{aligned} D_x y &= 3x \cdot \frac{1}{2}(x^2 - 3)^{-1/2} \cdot (2x) + (x^2 - 3)^{1/2} \cdot 3 \\ &= \frac{3x^2}{(x^2 - 3)^{1/2}} + 3(x^2 - 3)^{1/2} = \frac{6x^2 - 9}{(x^2 - 3)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Si se nos pidiera derivar una fracción de la forma $k/V(x)$, donde k es una constante, es conveniente presentar la fracción en la forma $k[V(x)]^{-1}$ y usar (12) y (45).

Ejemplo 3. Halle $D_x y$ si $y = 4/(1 - x^2)^3$.

Solución. Escribamos $y = 4(1 - x^2)^{-3}$. Usando (12) obtenemos

$$D_x y = 4D_x(1 - x^2)^{-3},$$

y usando entonces (45), obtenemos

$$D_x y = -12(1 - x^2)^{-4} \cdot D_x(1 - x^2) = \frac{24x}{(1 - x^2)^4}.$$

Ejemplo 4. Dada $F(x) = \frac{x}{2x+1}$; $x \neq -\frac{1}{2}$; halle $D_x F(x)$, $D_x^2 F(x)$, $D_x^3 F(x)$ y $D_x^4 F(x)$.

Solución. Usando la fórmula para la derivación de un cociente tendremos

$$\begin{aligned} D_x F(x) &= \frac{(2x+1) D_x(x) - x D_x(2x+1)}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{(2x+1)(1) - x(2)}{(2x+1)^2} = \frac{1}{(2x+1)^2}, \end{aligned}$$

o lo que es equivalente

$$D_x F(x) = (2x+1)^{-2}.$$

Usando entonces la regla de la cadena obtendremos

$$D_x^2 F(x) = D_x(2x+1)^{-2} = -2(2x+1)^{-3} \cdot D_x(2x+1) = -4(2x+1)^{-3},$$

$$D_x^3 F(x) = D_x[-4(2x+1)^{-3}] = 24(2x+1)^{-4},$$

$$D_x^4 F(x) = D_x[24(2x+1)^{-4}] = -192(2x+1)^{-5}.$$

Ejemplo 5. Halle $D \text{ Sen } [I^2 + 2I + 4]$ y $D((I^2 + 2I + 4)[\text{Sen}])$. Con ayuda de estos resultados dé una expresión para $D_x \text{ sen}(x^2 + 2x + 4)$ otra para $D_x[(\text{sen } x)^2 + 2 \text{ sen } x + 4]$.

Solución. Mediante la regla de la cadena para la derivada de funciones

$$D(U[V]) = DU[V] \cdot DV,$$

tenemos

$$\begin{aligned} D \text{ Sen } [I^2 + 2I + 4] &= D \text{ Sen } [I^2 + 2I + 4] \cdot D(I^2 + 2I + 4) \\ &= (\text{Cos } [I^2 + 2I + 4]) \cdot (2I + 2) \\ &= (2I + 2) \cdot \text{Cos } [I^2 + 2I + 4], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D((I^2 + 2I + 4)[\text{Sen}]) &= D(I^2 + 2I + 4)[\text{Sen}] \cdot D \text{ Sen} \\ &= (2I + 2)[\text{Sen}] \cdot \text{Cos} = (2 \text{ Sen} + 2) \cdot \text{Cos}. \end{aligned}$$

Del primero de estos resultados tenemos

$$D_x \sin(x^2 + 2x + 4) = (2x + 2) \cos(x^2 + 2x + 4),$$

y del segundo de ellos

$$D_x(\sin^2 x + 2 \sin x + 4) = (2 \sin x + 2) \cos x.$$

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 16 encuentre $D_x F(x)$.

1. $F(x) = (x^2 - 5x)^5$.
2. $F(x) = (x^3 - 2x)^{2/3}$.
3. $F(x) = \frac{1}{(x^2 - 2x)^2}$.
4. $F(x) = (x^2 + 10)^5 + \frac{5}{x^2 + 10}$.
5. $F(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.
6. $F(x) = \frac{x}{(x^2 - 1)^{3/2}}$.
7. $F(x) = x\sqrt{5 + x^2}$.
8. $F(x) = x^{2/3}(x^2 - 4)^{1/3}$.
9. $F(x) = \sin 7x$.
10. $F(x) = \cos 6x$.
11. $F(x) = \sin^3 x$.
12. $F(x) = \sin^2(2x - 1)$.
13. $F(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}$.
14. $F(x) = \sin^3 x - \cos^3 x$.
15. $F(x) = \cos^2 x \sqrt{\cos 2x}$.
16. $F(x) = \frac{\sin 2x}{x^3}$.

Encuentre la derivada de cada uno de los ejercicios del 17 al 32.

17. $D_x \left(\frac{2x + 1}{3x - 1} \right)$.
18. $D_t \left(\frac{t^2}{at + b} \right)$.
19. $D_x \left[\frac{2x - 3}{(3x - 1)^2} \right]$.
20. $D_s [2s\sqrt{1 - 4s} + \frac{1}{2}(1 - 4s)^{3/2}]$.
21. $D_\theta \sin^3 \theta$.
22. $D_t 4\sqrt{\sin 2t}$.
23. $D_x \sin(\sin x)$.
24. $D_t \sin(\cos t)$.
25. $D_x \left(\frac{\sin 2x}{\sin x} \right)$.
26. $D_x \left(\frac{\sin^2 x}{\cos x} \right)$.
27. $D_u \left(\frac{\cos^2 2u}{u^3} \right)$.
28. $D_x \left(\frac{1 + \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} \right)$.
29. $D_s \cos^3(2x^3 + 4)$.
30. $D_\theta \sin 3\theta \cos^3 \theta$.
31. $D_t \left(\frac{\cos^3 3t}{\sin 3t} \right)$.
32. $D_r \left(\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2} \right)$.

33. Obtenga la fórmula para $D_x \cos u$ mediante la igualdad $\cos u = (1 - \sin^2 u)^{1/2}$ y la fórmula para $D_x \sin u$.

34. La distancia dirigida s a un punto P desde el origen O en un tiempo t está dada por $s = a \sin bt$, siendo a y b números reales. Encuentre la velocidad y la aceleración a en el tiempo t . Exprese en la forma (20) la función de posición S , la función velocidad V y la función aceleración A de P . Encuentre $S(0)$, $S(\pi/2b)$, $S(\pi/b)$, $S(3\pi/2b)$, $S(2\pi/b)$.

35. La distancia dirigida s a un punto P desde el origen O en un tiempo t está dada por $s = a \sin kt + b \cos kt$ siendo a , b y k números reales. Encuentre la velocidad v y la aceleración a en el tiempo t .

36. Dibuje la gráfica de $y = 2 \sin 2x$ para $x \in [-\pi/2; 2\pi]$. Encuentre una ecuación de la tangente a esta gráfica en el punto cuya abscisa es 0.

37. Dibuje la gráfica de $y = \sin^2 x$ para $x \in [0; \pi]$. Encuentre una ecuación de la tangente a esta curva en el punto cuya abscisa es $\pi/3$.

En los ejercicios del 38 al 41 use (44) para encontrar la derivada de la función dada F , y usando este resultado dé una expresión para $D_x F(x)$.

38. $F = I^2[I^2 + 3]$.
39. $F = I^3[\sin I]$.
40. $F = \sin[I^2 + 4I]$.
41. $F = \cos[3I^2 - 2I]$.

42. Si $F(x) = \sqrt{1 - x}$, halle $D_x^2 F(x)$.

En cada uno de los ejercicios del 43 al 46 encuentre $D_x F(x)$, $D_x^2 F(x)$ y $D_x^3 F(x)$.

43. $F(x) = \frac{1}{1 - x}$.
44. $F(x) = \cos^2 2x$.
45. $F(x) = x \sin x$.
46. $F(x) = x^3 \sin 3x$.

47. Si $y = \sqrt{a^2 + x^2}$; demuestre que $D_x^2 y = \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$.

48. Si $y = \sqrt{a + bx}$, demuestre que $D_x^3 y = \frac{3b^3}{8(a + bx)^{5/2}}$.

49. Si $y = \cos ax$, demuestre que $D_x^4 y = a^4 y$.

50. Si $F(x) = \sqrt{ax} + \frac{a^2}{\sqrt{ax}}$; halle los valores de $F'(a)$ y de $F''(a)$.

51. En el ejercicio 21 de la Sec. 3.8 demostramos que $D_x \tan x = \sec^2 x$. Use este resultado y la regla de la cadena para demostrar que $D_x \tan u = \sec^2 u \cdot D_x u$, cuando $D_x u$ exista.

52. En el ejercicio 22 de la Sec. 3.8 demostramos que $D_x \cot x = -\csc^2 x$. Use este resultado y la regla de la cadena para demostrar que $D_x \cot u = -\csc^2 u \cdot D_x u$ cuando $D_x u$ exista.

53. Derive una fórmula para $D_x \sec u$. Sugerión: Escriba $\sec u = (\cos u)^{-1}$ y use la regla de la cadena.

54. Derive una fórmula para $D_x \csc u$.

3.10. El teorema del valor medio para derivadas. En esta sección daremos algunos teoremas que son de importancia central en el desarrollo y las aplicaciones del cálculo. El primero de estos teoremas proviene directamente de las propiedades básicas del sistema de los números reales y no daremos aquí su demostración.*

Teorema 13. Si F es una función continua sobre un intervalo cerrado $[a; b]$, entonces existen números x_1 y x_2 tales que $x_1 \in [a; b]$, $x_2 \in [a; b]$, y

$$F(x_1) \geq F(x) \text{ cuando } x \in [a; b],$$

$$F(x_2) \leq F(x) \text{ cuando } x \in [a; b].$$

* Puede encontrarse una demostración en el "Cálculo Avanzado" de Watson Fulks, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1961, p. 125.

Este teorema nos dice que si una función F es continua sobre un intervalo cerrado, entonces $F(x)$ alcanza un valor máximo y un valor mínimo en el intervalo. Esta propiedad nos conduce directamente al siguiente teorema.

Teorema 14. Teorema de Rolle. Sea F una función tal que

- (i) F es continua sobre un intervalo cerrado $[a; b]$;
- (ii) F es derivable sobre el intervalo abierto $(a; b)$;
- (iii) $F(a) = F(b) = 0$.

Entonces existe un número c tal que $a < c < b$ y $F'(c) = 0$.

Demostración. Si F es una función constante, es decir si $F(x) = k$ para $x \in [a; b]$, entonces $F'(x) = 0$ para toda $x \in (a; b)$; así pues, c será cualquier número en el intervalo $(a; b)$.

Si F no es una función constante, entonces existe un número $x_0 \in (a; b)$ para el cual $F(x_0) > 0$ ó $F(x_0) < 0$. Supongamos que $F(x_0) > 0$ y sea c un número en $[a; b]$, tal que $F(c) \geq F(x)$ cuando $x \in [a; b]$ (se sabe que dicho número existe, por el teorema 13). Tenemos así que $F(c) > 0$, $F(a) = 0$ y $F(b) = 0$ y de ahí que $a < c < b$. Si se escoge $h \neq 0$ de modo que $(c + h) \in (a; b)$, tendremos

$$F(c + h) - F(c) \leq 0.$$

Entonces
$$\frac{F(c + h) - F(c)}{h} \leq 0 \text{ cuando } h > 0,$$

y
$$\frac{F(c + h) - F(c)}{h} \geq 0 \text{ cuando } h < 0.$$

Por tanto

$$F'_+(c) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(c + h) - F(c)}{h} \leq 0$$

y

$$F'_-(c) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(c + h) - F(c)}{h} \geq 0.$$

Puesto que por hipótesis F es derivable sobre $(a; b)$ entonces existe $F'(c)$. Por tanto

$$F'(c) = F'_+(c) = F'_-(c).$$

Ahora bien

$$0 \leq F'_-(c) = F'(c) = F'_+(c) \leq 0,$$

y la única posibilidad es que $F'(c) = 0$.

Un argumento similar será válido si se considera que $F(x_0) < 0$.

Geométricamente, el Teorema de Rolle tiene una interpretación muy sencilla. Si la gráfica de una función es una curva continua con puntos extremos en el eje x , en $P(a, 0)$ y $Q(b, 0)$, y si la curva tiene una tangente en cada punto excepto en los puntos extremos, entonces debe existir al menos un punto de la curva en el que la tangente sea paralela al eje x . Esta interpretación se ilustra en la

Fig. 3.7. Notamos que si se cumplen las condiciones del Teorema de Rolle, dicho teorema nos garantiza la existencia de al menos un punto de la gráfica, cuya tangente sea paralela al eje x ; puede haber más de uno de tales puntos.

Si se elimina la hipótesis de que $F(a) = F(b)$, la conclusión, por supuesto ya no se cumple, como lo muestra la Fig. 3.8. No existe allí punto de la curva en el que la tangente sea paralela al eje x . Sin embargo, podemos observar que el segmento de línea que pasa por los puntos $M(a, F(a))$ y $N(b, F(b))$ parece desempeñar un papel semejante al de PQ en la Fig. 3.7 y parece que deberá existir al menos un punto en la gráfica de la Fig. 3.8 en el que la tangente sea paralela al segmento MN . En otras palabras, puesto que la pendiente del segmento MN es $\frac{F(b) - F(a)}{b - a}$ parece existir un punto de la gráfica en el cual la pendiente de la tangente sea $\frac{F(b) - F(a)}{b - a}$. Esta conjetura es verdadera y su enunciado formal constituye el Teorema del valor medio para derivadas.

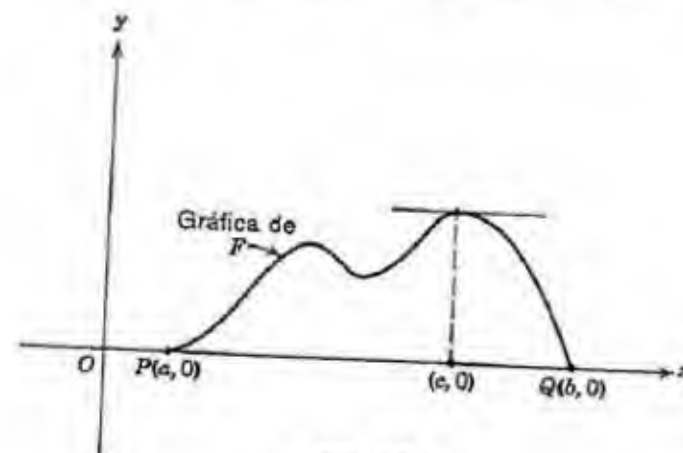


Fig. 3.7

Teorema 15. Teorema del valor medio para derivadas. Sea F una función con las propiedades de que

- (i) F sea continua sobre un intervalo cerrado $[a; b]$,
- (ii) F sea derivada sobre el intervalo abierto $(a; b)$.

Entonces existe un número c tal que

$$a < c < b$$

$$F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}. \quad (48)$$

Demostración. La demostración se logrará mediante la construcción de una función G que satisfaga las condiciones del Teorema de Rolle. Sea G definida por

$$G(x) = F(x) - F(a) - \frac{F(b) - F(a)}{b - a} (x - a), \quad x \in [a; b].$$

$G(x)$ se puede interpretar geoméricamente como sigue: si $x_0 \in [a; b]$, entonces $G(x_0)$ es la longitud del segmento que une al punto $(x_0, F(x_0))$ de la gráfica de F , con el punto (x_0, y_0) del segmento MN . Refiriéndonos a la Fig. 3.8, vemos que $G(x_0)$ es la longitud del segmento ST .

De la definición de G vemos que

(i) G es continua sobre $[a; b]$.

(ii) $G'(x) = F'(x) - \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$, existe sobre $(a; b)$ puesto que $F'(x)$

existe sobre $(a; b)$ y

(iii) $G(b) = 0$; $G(a) = 0$.

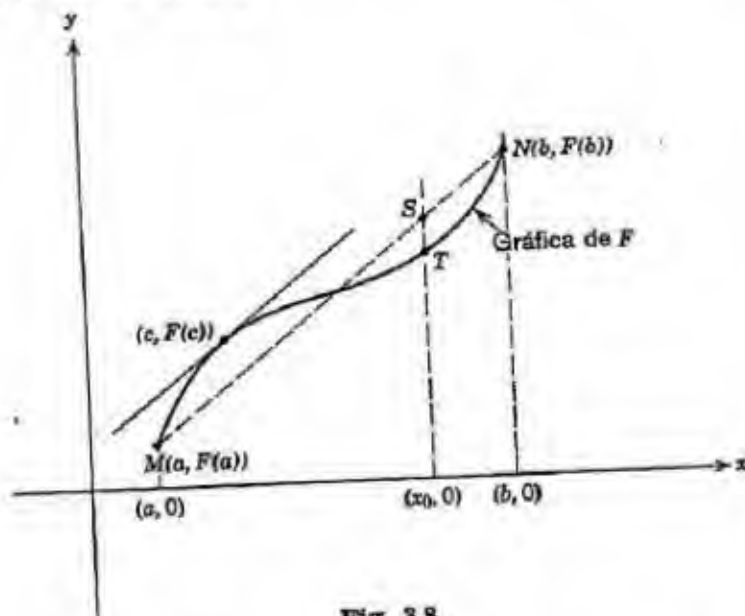


Fig. 3.8

Luego el Teorema de Rolle se aplica a G y existe un número $c \in (a; b)$ tal que $G'(c) = 0$, esto es:

$$F'(c) - \frac{F(b) - F(a)}{b - a} = 0$$

y

$$F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}.$$

La conclusión del Teorema del valor medio como está dada en la igualdad (48), puede expresarse en varias formas equivalentes; dos de estas están enlistadas en seguida para su uso futuro. Es obvio que ya que $b - a \neq 0$, la ecuación (48) puede escribirse como

$$F(b) - F(a) = (b - a)F'(c). \quad (49)$$

Puesto que c es un número entre a y b , existe un número θ entre 0 y 1 tal que $c = a + \theta(b - a)$, y si hacemos $b - a = h$, la igualdad (49) se convierte en

$$F(a + h) - F(a) = hF'(a + \theta h) \quad (50)$$

para algún número $\theta \in (0; 1)$. Es decir que si F es una función que satisface las condiciones del Teorema del valor medio, entonces existe un número θ tal que $0 < \theta < 1$ y para el cual (50) es válida.

Ejemplo 1. Si F está dada por $F(x) = x^2 + 2x + 1$, $1 \leq x \leq 4$, halle un número $c \in (1; 4)$ tal que $F'(c) = \frac{F(4) - F(1)}{4 - 1}$.

Solución. Note que F satisface las condiciones del teorema 15 sobre $[1; 4]$; por lo que existirá tal número c . Ahora bien $F'(x) = 2x + 2$, $F(4) = 25$, y $F(1) = 4$; y de ahí que deseamos hallar c tal que

$$2c + 2 = \frac{25 - 4}{3}.$$

Resolviendo esta ecuación hallamos que $\frac{5}{2}$ es un número con las propiedades requeridas.

Los siguientes cuatro importantes teoremas están basados en el Teorema del valor medio para derivadas.

Teorema 16. Sea F derivable sobre el intervalo $(a; b)$ siendo $F'(x) > 0$ cuando $x \in (a; b)$. Si x_1 y x_2 son dos números tales que $a < x_1 < x_2 < b$, entonces

$$F(x_1) < F(x_2).$$

Demostración. Puesto que F es derivable sobre $(a; b)$, entonces es continua sobre $(a; b)$ (Sec. 3.2). Obsérvese que el intervalo $[x_1; x_2]$ está contenido en $(a; b)$, de modo que F satisface las condiciones del Teorema del valor medio sobre $[x_1; x_2]$. Por tanto, existe un número $c \in (x_1; x_2)$ tal que

$$F'(c) = \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$F(x_2) - F(x_1) = (x_2 - x_1)F'(c).$$

Ahora bien, $c \in (a; b)$ de modo que $F'(c) > 0$ y puesto que $(x_2 - x_1) > 0$, tenemos

$$F(x_2) - F(x_1) > 0$$

$$F(x_2) > F(x_1),$$

que es lo que deseábamos demostrar. ■

Teorema 17. Sea F derivable sobre el intervalo $(a; b)$ siendo $F'(x) < 0$ para toda $x \in (a; b)$. Si x_1 y x_2 son 2 números tales que $a < x_1 < x_2 < b$, entonces

$$F(x_1) > F(x_2).$$

La demostración del teorema 17 es semejante a la del teorema 16 y se le pide al estudiante que la desarrolle en el ejercicio 11 de esta sección.

Teorema 18. Sean F y G dos funciones continuas sobre el intervalo cerrado $[a; b]$ y derivables sobre el intervalo abierto $(a; b)$. Si

$$F'(x) = G'(x) \text{ para } x \in (a; b),$$

entonces existe un número real k tal que

$$F(x) = G(x) + k \text{ para } x \in [a; b].$$

Demostración. Sea U la función dada por

$$U(x) = F(x) - G(x), \quad x \in [a; b].$$

Nótese que U es derivable sobre $(a; b)$ y que $U'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$; o sea que U' es la función constante 0, sobre $(a; b)$. Sea u cualquier número que satisfaga la expresión $a < u < b$. Vemos que U cumple con las condiciones del Teorema del valor medio sobre $[a; u]$ y según ese teorema existe un número $c \in (a; u)$ tal que

$$U(u) - U(a) = U'(c)(u - a). \quad (51)$$

Como $U'(c) = 0$, (51) se puede escribir como

$$U(u) = U(a).$$

Por tanto,

$$F(u) - G(u) = F(a) - G(a) \text{ cuando } u \in [a; b].$$

Esto es,

$$F(u) - G(u) = k \text{ cuando } u \in [a; b],$$

y el teorema queda demostrado.

A veces resulta conveniente usar el teorema 19, que es una consecuencia inmediata del teorema 18.

Teorema 19. Sea F una función continua sobre $[a; b]$ y derivable sobre $(a; b)$. Si $F'(x) = 0$ para $x \in (a; b)$, entonces existe un número real k , con la propiedad de que

$$F(x) = k \text{ para } x \in [a; b].$$

Esto es, que F es una función constante sobre $[a; b]$.

Demostración. Si G es la función definida por $G(x) = 0$ para $x \in [a; b]$, entonces F y G satisfacen la hipótesis del teorema 18. Por tanto

$$F(x) = G(x) + k, \quad \text{o}$$

$$F(x) = k.$$

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 10 determine, para la función y el intervalo dados, si se aplica el Teorema del Valor Medio para Derivadas, o no; si no, demuestre claramente por qué; si se aplica halle el número o los números que pueden usarse como c en el Teorema del Valor Medio.

$$1. F(x) = x^2; [0; 3].$$

$$2. F(x) = \begin{cases} x & \text{cuando } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{cuando } x = 0 \end{cases}; [0; 1].$$

$$3. F(x) = \sqrt{x}; [1; 9].$$

$$5. F(x) = 1 - x^{2/3}; [-1; 1].$$

$$7. F(x) = 9x - 2x^2; [-2; 0].$$

$$9. F(x) = x^2 - 4x; [-2; 2].$$

$$11. \text{ Demuestre el teorema 17.}$$

12. Sean F y G dos funciones continuas sobre $[a; b]$ y derivables sobre $(a; b)$. Suponga además que $G(b) \neq G(a)$ y que $G'(x) \neq 0$ cuando $x \in (a; b)$. Demuestre que existe un número c tal que $a < c < b$ y que

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)}.$$

Sugestión. Aplique el teorema de Rolle a la función U dada por

$$U(x) = F(x) - F(a) - \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} [G(x) - G(a)]$$

para $x \in [a; b]$.

Este resultado se llama generalmente el Teorema Extendido del valor Medio para Derivadas.

3.11 Antiderivadas. Recordará el estudiante que en sus cursos previos de Matemáticas ha encontrado operaciones inversas. Por ejemplo la inversa de la operación de suma es la resta; la inversa de la multiplicación es la división y la inversa de elevar al cuadrado un número es extraer la raíz cuadrada. La operación de encontrar una derivada también tiene una inversa, que llamaremos encontrar una *antiderivada*.

Como ilustración, supóngase que sabemos que

$$F'(x) = 2x.$$

Podemos "deshacer" la derivación, esto es, podemos hallar una $F(x)$ tal que $D_x F(x) = 2x$? Es evidente que

$$F(x) = x^2$$

es una posibilidad para una antiderivada. Sin embargo, vemos que, también

$$F(x) = x^2 + 23$$

es otra posibilidad para una antiderivada. Así pues decimos que x^2 y $x^2 + 23$ son antiderivadas de $2x$. El concepto se precisará mediante la siguiente definición.

Si $F(x)$ y $H(x)$ tienen la propiedad de que

$$F'(x) = H(x) \text{ cuando } x \in X,$$

decimos que $F(x)$ es una *antiderivada de $H(x)$ sobre X* . Si $F(x)$ es una antiderivada de $H(x)$ (sobre X), decimos que la función $F = \{(x, y) \mid y = F(x)\}$ es una *antiderivada de la función H (sobre X)*, donde $H = \{(x, y) \mid y = H(x)\}$.

En nuestro ejemplo vimos que x^2 y $x^2 + 23$ son ambas antiderivadas de $2x$. De hecho notamos que $x^2 + k$, para cualquier número real k , es una antiderivada de $2x$. Podemos preguntarnos si existe alguna antiderivada de $2x$ que no sea de la forma $x^2 + k$, o no. La respuesta es *no*, según se indica en el teorema 20.

Teorema 20. Si las funciones F y G son antiderivadas de la misma función sobre el intervalo S , entonces ambas funciones difieren en una función constante K :

$$F' = G' \Rightarrow F = G + K,$$

o lo que es equivalente,

$$D_x F(x) = D_x G(x) \Rightarrow F(x) = G(x) + k$$

para $x \in S$ y k número real.

El teorema 20 es simplemente otra forma de enunciar el teorema 18 en términos de antiderivadas y por tanto se sigue inmediatamente del teorema 18.

Ejemplo 1. Si $F'(x) = x^3 + 1$ ¿qué puede decirse acerca de $F(x)$?

Solución. Por supuesto que $F(x)$ es por definición antiderivada de $F'(x)$: Nos percatamos que $\frac{1}{4}x^4 + x$ es una antiderivada de $x^3 + 1$, ya que

$$D_x(\frac{1}{4}x^4 + x) = x^3 + 1.$$

Por tanto, lo más que podemos decir acerca de $F(x)$, con las condiciones dadas (y mediante el teorema 20) es que

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x + k,$$

siendo k un número real.

Supóngase que además de decirnos que $F'(x) = x^3 + 1$, se nos señala que $F(2) = 10$. ¿Qué se puede decir acerca de $F(x)$? Del ejemplo 1 sabemos que $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x + k$, y si $F(2) = 10$, vemos que $10 = 16 + 2 + k$ ó $k = 4$; por tanto

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x + 4.$$

Ejemplo 2. Si $D_x F(x) = 3x^3 - 2$ y si $F(1) = 0$, halle una expresión para $F(x)$.

Solución. Observamos que $D_x(\frac{3}{4}x^4 - 2x) = 3x^3 - 2$, de modo que $\frac{3}{4}x^4 - 2x$ es una antiderivada de $3x^3 - 2$. Por tanto, podemos escribir

$$F(x) = \frac{3}{4}x^4 - 2x + k$$

donde k es un número real. Ya que $F(1) = 0$, tenemos que

$$F(1) = \frac{3}{4}(1)^4 - 2(1) + k = 0.$$

y consecuentemente $k = \frac{5}{4}$. Por tanto

$$F(x) = \frac{3}{4}x^4 - 2x + \frac{5}{4}.$$

La pareja de condiciones del ejemplo 2,

$$D_x F(x) = 3x^3 - 2 \text{ y } F(1) = 0,$$

nos brindan un ejemplo de un sistema con derivada.

Un **sistema con derivada** es un par de enunciados, uno que da una expresión para $F'(x)$ y el otro que especifica un par ordenado $(a, F(a))$ que pertenece a F . Una expresión para $F(x)$ que satisfaga los dos enunciados de un

sistema con derivada es una **solución del sistema con derivada**.

Para ejemplo: el par de enunciados

$$F'(x) = x^3 + 1,$$

$$F(2) = 10$$

constituyen un sistema con derivada y hemos visto que

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x + 4$$

es una solución de este sistema.

Teorema 21. Si un sistema con derivada, de la forma

$$F'(x) = H(x),$$

$$F(a) = b$$

(52)

tiene una solución, dicha solución es única.

El teorema es una consecuencia inmediata del teorema 18. Se le pide al estudiante que desarrolle una demostración, en el ejercicio 43 al final de esta sección.

Gracias al teorema 21 es correcto hablar de la solución del sistema (52)

La primera ecuación, $F'(x) = H(x)$ en el sistema con derivada (52), del teorema 21, con frecuencia se llama **ecuación derivada**. La segunda ecuación $F(a) = b$ en este sistema con derivada, se llama **condición a la frontera** para la ecuación derivada $F'(x) = H(x)$.

Ejemplo 3. Resuelva el sistema con derivada

$$F'(x) = \sin x,$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Solución. Puesto que $D_x(-\cos x) = \sin x$, $-\cos x$ es una antiderivada de $\sin x$ y tenemos que $F(x) = -\cos x + k$. Usando la segunda ecuación del sistema hallamos

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} + k = -\frac{1}{\sqrt{2}} + k = 1.$$

Es decir que $k = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}$, y por tanto la solución es

$$F(x) = -\cos x + \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}$$

A menudo podemos hallar inmediatamente una antiderivada para una $H(x)$ dada, si recordamos las fórmulas para derivadas de correspondientes que ya hemos estudiado.

Por ejemplo, de la fórmula $D_x(ax^q) = aqx^{q-1}$ (p y q son números racionales) y el teorema 20 se sigue que

$$\text{si } F'(x) = ax^p, \text{ entonces } F(x) = \frac{a}{p+1} x^{p+1} + k, \quad p \neq -1, \quad (53)$$

según el Teorema 20

$$D_x F(x) = D_x G(x) \Rightarrow F(x) = G(x) + k.$$

Aquí

$$D_x F(x) = ax^p \text{ y } D_x \left(\frac{a}{p+1} x^{p+1} \right) = ax^p,$$

y en consecuencia

$$F(x) = \frac{a}{p+1} x^{p+1} + k.$$

Similarmente, de la fórmula $D_x \sin x = \cos x$ y el Teorema 20, se concluye que si $F'(x) = \cos x$, entonces $F(x) = \sin x + k$. (54)

En este caso

$$D_x F(x) = \cos x \text{ y } D_x(\sin x) = \cos x,$$

y en consecuencia, según el Teorema 20

$$F(x) = \sin x + k.$$

De manera semejante podemos verificar las siguientes proposiciones:

Si $F'(x) = a[V(x)]^p D_x V(x)$,

$$\text{entonces } F(x) = \frac{a}{p+1} [V(x)]^{p+1} + k, \quad p \neq -1. \quad (55)$$

$$\text{Si } F'(x) = \sin x, \text{ entonces } F(x) = -\cos x + k. \quad (56)$$

$$\text{Si } F'(x) = a \cos V(x) \cdot D_x V(x), \text{ entonces } F(x) = a \sin V(x) + k. \quad (57)$$

$$\text{Si } F'(x) = a \sin V(x) \cdot D_x V(x), \text{ entonces } F(x) = -a \cos V(x) + k. \quad (58)$$

$$\text{Si } F'(x) = a D_x V(x), \text{ entonces } F(x) = a V(x) + k. \quad (59)$$

$$\text{Si } F'(x) = D_x U(x) + D_x V(x), \text{ entonces } F(x) = U(x) + V(x) + k. \quad (60)$$

Debemos notar muy atentamente que cuando decimos que $F(x)$ es una antiderivada de $H(x)$ se cumple que

$$F'(x) = H(x);$$

por tanto cualquier expresión propuesta como antiderivada debe poder ser comprobada por derivación.

Ejemplo 4. Halle las antiderivadas de

$$(a) F'(x) = (2+3x)^{1/2};$$

$$(b) G'(x) = x \sin x^2.$$

Solución. (a) $F'(x)$ tiene la forma $[V(x)]^{1/2}$ donde $V(x) = 2+3x$. Vemos si podemos escribir $F'(x)$ de modo tal que se pueda aplicar la expresión (55). Note que $D_x(2+3x) = 3$, y que

$$F'(x) = (2+3x)^{1/2} = \frac{1}{3}(2+3x)^{1/2}(3) = \frac{1}{3}(2+3x)^{1/2} D_x(2+3x),$$

que es de la forma

$$F'(x) = a[V(x)]^p D_x V(x)$$

donde $V(x) = 2+3x$. Entonces según (55)

$$F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (2+3x)^{1/2+1} + k = \frac{2}{3}(2+3x)^{3/2} + k.$$

Como comprobación hallemos la derivada de este resultado para hacer ver que es igual a la expresión dada para $F'(x)$:

$$\begin{aligned} D_x \left[\frac{2}{3}(2+3x)^{3/2} + k \right] &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} (2+3x)^{1/2} \cdot D_x(2+3x) + D_x k \\ &= \frac{1}{3}(2+3x)^{1/2}(3) + 0 = (2+3x)^{1/2}. \end{aligned}$$

(b) Notamos que podemos escribir

$$G'(x) = x \sin x^2 = \frac{1}{2}(2x) \sin x^2 = \frac{1}{2} \sin x^2 \cdot D_x x^2,$$

que es de la forma

$$G'(x) = a \sin V(x) \cdot D_x V(x),$$

donde $V(x) = x^2$. Por tanto, según (58) tenemos que

$$G(x) = -\frac{1}{2} \cos x^2 + k.$$

Para comprobar este resultado vemos que

$$\begin{aligned} D_x \left(-\frac{1}{2} \cos x^2 + k \right) &= -\frac{1}{2} D_x \cos x^2 + D_x k = -\frac{1}{2} (-\sin x^2) \cdot D_x x^2 + 0 \\ &= -\frac{1}{2} (-\sin x^2) (2x) = x \sin x^2. \end{aligned}$$

Ejemplo 5. Si $F''(x) = 2x - 5$, ¿qué puede decir acerca de $F(x)$?

Solución. Por definición $F'(x)$ es una antiderivada de $F''(x)$. Vemos que $x^2 - 5x$ es una antiderivada de $2x - 5$, de modo que

$$F'(x) = x^2 - 5x + k_1,$$

siendo k_1 un número real. Ahora bien, $F(x)$ es una antiderivada de $F'(x)$. Percibimos que $\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + k_1x$ es una antiderivada de $x^2 - 5x + k_1$. Por tanto, lo más que se puede decir acerca de $F(x)$ ante las condiciones dadas es que

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + k_1x + k_2,$$

donde k_1 y k_2 son números reales.

Ejemplo 6. Si la función aceleración de un punto P es $A = \{(t, a) \mid a = -32, t \in [0; 5]\}$, la velocidad del punto es -20 cuando $t = 0$, y la de posición del mismo punto es 10 unidades en la dirección positiva cuando $t = 0$, encuentre la función velocidad V y la función de posición S del punto.

Solución. Si V es la función velocidad, sabemos que $V'(t) = A(t)$; en este caso tenemos que

$$V'(t) = -32,$$

$$V(0) = -20.$$

Resolviendo este sistema con derivada, obtenemos

$$V(t) = -32t - 20.$$

Pero si S es la función de posición, sabemos que $S'(t) = V(t)$; o sea, en este caso

$$S'(t) = -32t - 20,$$

$$S(0) = 10.$$

Resolviendo este sistema con derivada, encontramos que

$$S(t) = -16t^2 - 20t + 10.$$

De donde la función velocidad es

$$V = \{(t, v) \mid v = -32t + 20, t \in [0; 5]\},$$

y la función de posición es

$$S = \{(t, s) \mid s = -16t^2 - 20t + 10, t \in [0; 5]\}.$$

EJERCICIOS

En los ejercicios del 1 al 28 se da una ecuación derivada de la forma $F'(x) = G(x)$. Dé una solución de esta ecuación, en la forma $F(x) = H(x) + k$ donde $D_x H(x) = G(x)$, y k es un número real.

1. $F'(x) = 3x + 2$.

3. $F'(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} + 4$.

5. $F'(x) = \frac{3-x}{\sqrt{x}}$.

7. $F'(x) = \sqrt{2x}$.

9. $F'(x) = x^3 \sqrt{1+3x^2}$.

11. $F'(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^3}}$.

13. $F'(x) = (a-bx)^{3/2}$.

15. $F'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-6x}}$.

17. $F'(x) = 3 \cos 4x$.

19. $F'(x) = \sin(2x+3)$.

21. $F'(x) = \cos \frac{x}{4}$.

23. $F'(x) = \sin^2 x \cos x$.

25. $F'(x) = \sin^2 3x \cos 3x$.

27. $F'(x) = \sin 2x + \cos \frac{x}{3}$.

2. $F'(x) = (x+4)^5$.

4. $F'(x) = \sqrt{x-4}$.

6. $F'(x) = \sqrt{3-x}$.

8. $F'(x) = \sqrt[3]{2x-3}$.

10. $F'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$.

12. $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{ax+b}}$.

14. $F'(x) = (x+1)\sqrt{2x^2+4x}$.

16. $F'(x) = 2 \sin 5x$.

18. $F'(x) = \sin \frac{x}{3}$.

20. $F'(x) = \sin(ax+b)$.

22. $F'(x) = \cos(4-x)$.

24. $F'(x) = \cos^3 x \sin x$.

26. $F'(x) = \cos^3 2x \sin 2x$.

28. $F'(x) = x^2 \sin x^3$.

Resuelva el sistema con derivada propuesto en cada uno de los ejercicios del 29 al 36.

29. $F'(x) = 3x^2, F(1) = 4$.

30. $H'(t) = \sqrt{t}, t > 0, H(1) = 2$.

31. $G'(x) = 4x^3, G(1) = 5$.

32. $F'(x) = \sin 2x, F(\pi/3) = 1$.

33. $H'(x) = x\sqrt{25-x^2}, H(3) = -\frac{1}{3}$.

34. $F'(x) = x \sin x^2, F(\sqrt{\pi/2}) = \frac{1}{2}$.

35. $F'(x) = \sin^2 x \cos x, F(\pi/6) = \frac{5}{24}$.

36. $F'(x) = \cos \frac{3}{2}x, F(0) = 10$.

37. Si $V(t)$ es la velocidad y $S(t)$ es la distancia desde el origen en el tiempo t , halle $S(t)$ si

(a) $V(t) = t^2 - 3, S(1) = 4$;

(b) $V(t) = (3t-4)^2, S(2) = 10$.

38. Halle $F(x)$ si la gráfica de $y = F(x)$ pasa por el punto dado y si la tangente a la gráfica en $(x, F(x))$ tiene la pendiente m , dada

(a) $P_1(0, 2); m = x^2 - 1$.

(b) $P_1(1, 5); m = \frac{2}{\sqrt{5-4x}}$.

(c) $P_1\left(\pi, \frac{7}{3}\right); m = \sin 3x$.

(d) $P_1\left(\frac{\pi}{4}, \frac{7}{2}\right); m = \cos 2x$.

39. La pendiente de una curva en cualquier punto $P(x, y)$ de la misma es igual a $4x + 2$. Si la curva pasa por el punto $(1, 1)$, dé una ecuación para ella.

40. La pendiente de una curva en cualquier punto $P(x, y)$ de ésta, es igual a $1/\sqrt{x}$. Halle una ecuación de la curva si ésta pasa por el punto $(4, 5)$.

41. La pendiente de una curva en cualquier punto $P(x, y)$ de ella es igual a $\sin x$. Encuentre una ecuación para la curva si ésta pasa por el punto $(\pi/3, 2)$.

42. La pendiente de una curva en cualquier punto $P(x, y)$ de ella es igual a $\cos x$. Encuentre una ecuación para la curva si ésta pasa por el punto $(0, 1)$.

43. Demuestre el teorema 21.

En cada uno de los ejercicios del 44 al 49 está dada la función aceleración A de un punto P , junto con alguna otra información. Para cada ejercicio halle la función velocidad V y la función de posición S , del punto.

44. $A = \{(t, \alpha) \mid \alpha = -32, t \in [0; 6]\}; V(0) = 64; S(0) = 80$.

45. $A = \{(t, \alpha) \mid \alpha = -12, t \in [0; 2\frac{1}{2}]\}; V(0) = 50; S(0) = 0$.

46. $A = \{(t, \alpha) \mid \alpha = 12 - 12t, t \in [0; 4]\}; V(1) = 10; S(0) = 15$.

47. $A = \{(t, \alpha) \mid \alpha = 2, t \in [0; 3]\}; V(2) = 1; S(2) = 3$.

48. $A = \{(t, \alpha) \mid \alpha = 3 \cos 3t, t \in [0; 6\pi]\}; V(\pi/18) = \frac{1}{2}; S(\pi/9) = 2$.

49. $A = \{(t, \alpha) \mid \alpha = -\frac{2}{3} \sin \frac{3}{2}t, t \in [0; 3\pi]\}; V(0) = 1; S(0) = 10$.

50. En cada punto de una curva cuya ecuación es $y = F(x)$, $D_x^2 y = 6x - 2$; y en el punto $(2, 2)$ la pendiente de la curva es 8. Halle una ecuación de la curva.

3.12 Derivación implícita. La mayoría de las funciones que hemos considerado han estado especificadas mediante una fórmula para $F(x)$. Para tales funciones, $D_x F(x)$ se obtiene por aplicación directa de los teoremas apropiados sobre derivadas.

Sin embargo, una función puede estar especificada por una ecuación que no sea de la forma $y = F(x)$. Por ejemplo:

$$\{(x, y) \mid 3y^2 - 2y + 5 = 2x^2 + 6x\}$$

es una función para la cual no está dada una fórmula para $F(x)$. En su lugar, $F(x)$ está definida implícitamente por la ecuación

$$3[F(x)]^2 - 2F(x) + 5 = 2x^2 + 6x. \quad (61)$$

Esta ecuación no tiene fácil solución para $F(x)$, de modo que nos agradecería tener un procedimiento para determinar $D_x F(x)$, sin tener necesidad de una fórmula para $F(x)$.

Suponiendo que (61) especifica una función F cuyo dominio es S_1 , y de que F es derivable sobre $S_1 \subseteq S_2$, encontraremos $D_x F(x)$ del modo siguiente. Ante la primera de estas suposiciones, cada lado de (61) especifica una función; el lado izquierdo nos da una función G con

$$G(x) = 3[F(x)]^2 - 2F(x) + 5,$$

y el lado derecho nos da una función H con

$$H(x) = 2x^2 + 6x.$$

Puesto que

$$G(x) = H(x) \quad \text{para } x \in S_1,$$

se concluye que

$$D_x G(x) = D_x H(x) \quad \text{para } x \in S_1;$$

esto es, la derivada con respecto a x del lado izquierdo de (61) es igual a la derivada con respecto a x , del lado derecho de (61). Ahora bien,

$$D_x G(x) = D_x [3[F(x)]^2 - 2F(x) + 5] = 9[F(x)]^2 D_x F(x) - 2D_x F(x),$$

y

$$D_x H(x) = 4x + 6,$$

de modo que

$$9[F(x)]^2 D_x F(x) - 2D_x F(x) = 4x + 6.$$

Resolvemos esta ecuación para $D_x F(x)$ y obtenemos

$$D_x F(x) = \frac{4x + 6}{9[F(x)]^2 - 2}.$$

El proceso que desarrollamos se denomina *derivación implícita* y se usa sólo con el supuesto de que la ecuación dada especifica una función. De no ser así, aunque ejecutemos las operaciones, el resultado carece de significado. Para ilustrar esto, consideremos la ecuación

$$x^2 + y^2 + 8 = 0.$$

Esta ecuación no especifica una función (real) puesto que no hay pareja ordenada de números reales que satisfaga la ecuación. Pero si ejecutamos las operaciones tenemos

$$D_x(x^2 + y^2) = D_x(0) \quad \text{ó} \quad D_x x^2 + D_x y^2 = 0.$$

Usando la regla de la cadena para encontrar $D_x y^2 = 2y D_x y$, tenemos

$$2x + 2y D_x y = 0, \quad \text{de donde } D_x y = -\frac{x}{y}.$$

Esta fórmula parece tener significado para cualquier pareja (x, y) tal que $y \neq 0$, aunque sabemos que no puede haber derivada puesto que la ecuación $x^2 + y^2 + 8 = 0$ no especifica función F alguna y de ahí que no puede existir $D_x y = D_x F(x)$.

Si una ecuación en dos variables tiene la propiedad de que exista un par ordenado de números que la satisfaga, entonces dicha ecuación especificará una

relación. Sin embargo, como ya sabemos, esta relación puede no ser una función. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + y^2 = 4 \quad (62)$$

especifica la relación

$$R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\},$$

cuya gráfica es un círculo, pero R no es una función. Es posible usar la ecuación (62) para especificar una o más funciones. Por ejemplo: podemos usar (62) para especificar la función

$$F_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4, y \geq 0\}$$

cuyo dominio es $[-2; 2]$ y para la cual $F_1(x) = \sqrt{4 - x^2}$. La ecuación (62) se puede usar también para especificar la función

$$F_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4, y \leq 0\}$$

cuyo dominio es $[-2; 2]$ y para la cual $F_2(x) = -\sqrt{4 - x^2}$.

Ejemplo 1. Como acabamos de ver, la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ se puede usar para especificar las funciones F_1 y F_2 , donde

$$F_1(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{y} \quad F_2(x) = -\sqrt{4 - x^2}$$

para $x \in [-2; 2]$. Encuentre $D_x F_1(x)$ y $D_x F_2(x)$ de dos modos: (a) usando la derivación implícita, (b) hallando $D_x F_1(x)$ y $D_x F_2(x)$ directamente de las fórmulas para $F_1(x)$ y $F_2(x)$. Demuestre que cada resultado de (b) concuerda con el correspondiente de (a). Halle los valores de $D_x F_1(x)$ y $D_x F_2(x)$.

Solución. (a) Derivando cada lado de la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ con respecto a x , y tomando y como $F_1(x)$, tenemos que

$$D_x(x^2 + y^2) = D_x(4) \quad \text{ó} \quad D_x(x^2) + D_x(y^2) = 0,$$

o

$$2x + 2y D_x y = 0.$$

Por tanto,

$$D_x y = -\frac{x}{y};$$

esto es que

$$D_x F_1(x) = -\frac{x}{F_1(x)}.$$

Vemos que F_1 es derivable sobre la parte del dominio de F_1 para la que $F_1(x) \neq 0$, es decir, sobre $(-2; 2)$.

Procediendo en la misma forma pero tomando y como $F_2(x)$ hallamos que

$$D_x y = -\frac{x}{y};$$

$$D_x F_2(x) = -\frac{x}{F_2(x)}.$$

De nuevo resulta evidente que F_2 es derivable sobre $(-2; 2)$, la parte del dominio de F_2 para la cual $F_2(x) \neq 0$.

(b) Para $F_1(x) = \sqrt{4-x^2}$,

$$D_x F_1(x) = \frac{1}{2}(4-x^2)^{-1/2} D_x(4-x^2) = \frac{1}{2}(4-x^2)^{-1/2}(-2x)$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{F_1(x)}$$

Para $F_2(x) = -\sqrt{4-x^2}$,

$$D_x F_2(x) = -\frac{1}{2}(4-x^2)^{-1/2} D_x(4-x^2) = -\frac{1}{2}(4-x^2)^{-1/2}(-2x) \\ = \frac{x}{-\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{F_2(x)}$$

Para hallar $D_x F_1(x)$, notamos que $F_1(1) = \sqrt{3}$, de modo que

$$D_x F_1(x) \Big|_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Para hallar $D_x F_2(x)$, notamos que $F_2(1) = -\sqrt{3}$, de modo que

$$D_x F_2(x) \Big|_1 = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Este ejemplo ilustra el hecho de que la derivación implícita conduce a una fórmula para $D_x F(x)$ que es válida para toda función derivable F tal que $F(x)$ esté definida implícitamente por la ecuación dada.

Ejemplo 2. Sobre la suposición de que existe una función derivable F , tal que $F(x)$ está definida implícitamente por la ecuación

$$y \text{ sen } 2x = x \cos 2x,$$

encuentre $D_x y = D_x F(x)$.

Solución. Derivando respecto a x cada lado de la ecuación dada, tenemos que

$$D_x(y \text{ sen } 2x) = D_x(x \cos 2x),$$

$$y D_x(\text{sen } 2x) + (\text{sen } 2x) D_x y = x D_x(\cos 2x) + (\cos 2x) D_x x,$$

$$y(\cos 2x)2 + (\text{sen } 2x) D_x y = -x(\text{sen } 2x)2 + \cos 2x,$$

$$2y \cos 2x + (\text{sen } 2x) D_x y = -2x \text{ sen } 2x + \cos 2x,$$

así que

$$D_x y = \frac{-2x \text{ sen } 2x + \cos 2x - 2y \cos 2x}{\text{sen } 2x}$$

para $\text{sen } 2x \neq 0$.

Ejemplo 3. Encuentre una ecuación de la tangente y una ecuación de la normal a la gráfica de $x^2 + 3y^2 = 4$ en el punto $(1, 1)$. Grafique la curva de la ecuación dada y

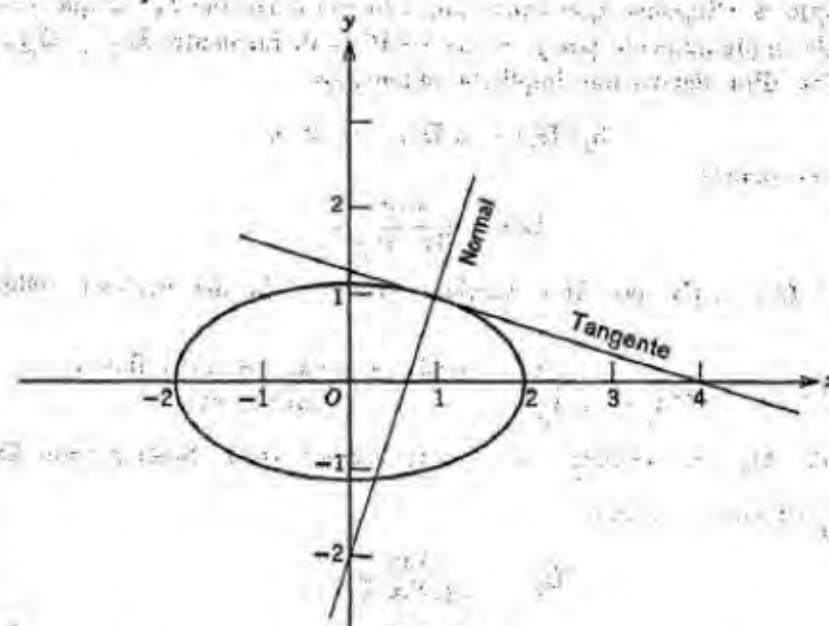


Fig. 3.9

sobre el mismo sistema coordenado, grafique la tangente y la normal cuyas ecuaciones encontró.

Solución. Mediante la derivación implícita obtenemos $D_x(x^2) + D_x(3y^2) = D_x(4)$, ó $2x + 6y D_x y = 0$ y así pues

$$D_x y = -\frac{x}{3y}.$$

La pendiente m_1 de la tangente en $(1, 1)$ es el valor de $D_x y = -(x/3y)$ para $x = 1$ y $y = 1$; es decir que

$$m_1 = -\frac{1}{3} = \frac{1}{-3},$$

y una ecuación de la tangente es

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1) \quad \text{ó} \quad x + 3y = 4.$$

La pendiente de la normal es 3 y una ecuación de la recta normal es

$$y - 1 = 3(x - 1) \quad \text{ó} \quad 3x - y - 2 = 0.$$

La curva cuya ecuación es $x^2 + 3y^2 = 4$ es una elipse; las gráficas de ella, de la tangente y de la normal cuyas ecuaciones encontramos están dadas en la Fig. 3.9.

La tangente a la elipse de la Fig. 3.9 en los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$ es vertical y por ello no tiene pendiente. Esto se relaciona con el hecho de que en dichos puntos no existe $D_x y$.

Ocasionalmente, después de haber encontrado $D_x F(x)$ por derivación implícita, deseamos conocer $D_y^2 F(x)$. El procedimiento se ilustra en el ejemplo 4.

Ejemplo 4. Suponga que existe una función derivable F , tal que $y = F(x)$ está definida implícitamente por $y^3 + xy - 10 = 0$. Encuentre D_{xy} y D_{yy}^2 .

Solución. Por derivación implícita obtenemos

$$3y^2 D_{xy} + x D_{xy} + y = 0,$$

de donde obtenemos

$$D_{xy} = \frac{-y}{3y^2 + x}. \quad (63)$$

Para hallar D_{yy}^2 derivamos D_{xy} mediante la fórmula del cociente. Obtenemos entonces

$$D_{yy}^2 = D_y(D_{xy}) = D_y\left(\frac{-y}{3y^2 + x}\right) = \frac{-(3y^2 + x) D_{xy} + y(6y D_{xy} + 1)}{(3y^2 + x)^2}. \quad (64)$$

Para calcular D_{yy}^2 en términos de x y y , usamos (63). Sustituyendo D_{xy} por $-\frac{y}{3y^2 + x}$ en (64), tenemos

$$D_{yy}^2 = \frac{2xy}{(3y^2 + x)^3};$$

EJERCICIOS

En cada ejercicio del 1 al 10 suponga que existe una función derivable F , tal que $F(x)$ está definida implícitamente por la ecuación dada y calcule $D_{xy} = D_x F(x)$.

- $3x^2 + 4y^2 = 12$.
- $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$.
- $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$.
- $x^2 y^3 = 25$.
- $x^3 + y^3 - 3x^2 + 3y^2 = 0$.
- $x^3 + y^3 - x^2 y = a^3$.
- $\sin x + \cos y = 0$.
- $x = \sin(x + y)$.
- $\sin(x/y) + \cos(y/x) = 0$.
- $\sin x + \cos y = x + y$.

Halle D_{xy} por derivación implícita en cada uno de los ejercicios del 11 al 14. Resuelva después la ecuación dada para y en términos de x y encuentre D_{xy} para cada solución. Demuestre que el resultado según el primer método concuerda con cada uno de los resultados obtenidos según el segundo método.

- $y^2 = 4x$.
- $x^2 + 9y^2 = 1$.
- $x^3 - y^2 = 16$.
- $xy = 6$.

En los ejercicios del 15 al 20 halle D_{xy} por derivación implícita y use ese resultado para determinar una ecuación de la tangente y una ecuación de la normal a la gráfica de la ecuación dada en el punto dado P . Grafique la curva, la tangente y la normal, cuando se pida.

- $x^2 + y^2 = 25$; $P(3, -4)$. Grafique.
- $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 24 = 0$; $P(1, 3)$. Grafique.
- $y^2 = 4ax$; $P(a, 2a)$. Grafique.
- $y^3 + 3x^2 y + x^3 - 2xy - 3 = 0$; $P(1, 1)$.
- $x^4 + y^4 = 17$; $P(-2, 1)$. Grafique.
- $y^3 - 6y + x^2 = 0$; $P(-2, 2)$.

21. Halle una ecuación de la tangente y una ecuación de la normal a la curva cuya ecuación es $16x^2 + 25y^2 = 144$, en el punto del primer cuadrante en que $x = 2$. Grafique la curva, la tangente y la normal.

22. Halle una ecuación de la tangente y una ecuación de la normal al círculo cuya ecuación es $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 24 = 0$, en el punto $(1, 3)$. Grafique el círculo, la tangente y la normal.

23. Demuestre que para la elipse cuya ecuación es $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ una ecuación de la línea tangente en (x_1, y_1) es $b^2 x x_1 + a^2 y y_1 = a^2 b^2$.

24. Demuestre que para la hipérbola cuya ecuación es $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$, una ecuación de la línea tangente en (x_1, y_1) es $b^2 x x_1 - a^2 y y_1 = a^2 b^2$. Encuentre D_{xy} y D_{yy}^2 para los ejercicios del 25 al 28.

$$25. b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

$$26. x^3 - xy + y^3 = 0.$$

$$27. x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

$$28. x^2 + y^2 = a^2.$$

29. Explique por qué el cálculo de D_{xy} mediante derivación implícita carece de significado si

$$(a) x^2 + y^2 = 0; (b) x^2 + y^2 + 4 = 0; (c) x^2 + y^2 + 8x - 10y + 50 = 0.$$

30. Encuentre una ecuación de la tangente al círculo cuya ecuación es $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 31 = 0$ en el punto $(-2, 3)$.

31. Encuentre los puntos del círculo cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 25$, en los que la tangente es paralela a la recta cuya ecuación es $4x = 3y$.

32. Demuestre que las hipérbolas cuyas ecuaciones son $xy = k$ y $x^2 - y^2 = k$ se intersectan en ángulo recto.

3.13 La notación de incrementos. En la definición de derivada:

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

usamos h para expresar un número distinto de cero y tal que $x+h$ pertenece al dominio de F . Podemos interpretar h como la diferencia en las coordenadas x de dos puntos de la gráfica de F y en ese caso es usual llamar *incremento de x* a dicha diferencia y denotarla mediante Δx .

Con la sustitución de h por Δx tenemos que para una $F(x)$ dada

$$F(x+h) = F(x+\Delta x),$$

$$F(x+h) - F(x) = F(x+\Delta x) - F(x).$$

De ahí que escribamos

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

Si $y = F(x)$, la diferencia $F(x+\Delta x) - F(x)$ se expresa mediante Δy y se denomina *incremento de y* , correspondiente al incremento Δx , de x :

$$\Delta y = F(x+\Delta x) - F(x);$$

es decir que Δy es el cambio en y producido por el cambio Δx en las x . La razón

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{o} \quad \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

es llamada **razón promedio de cambio** de y , o de $F(x)$, con respecto a x para el intervalo $[x; x + \Delta x]$. La derivada

$$D_x y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

se llama **razón instantánea de cambio** o simplemente razón de cambio de y , o de $F(x)$ con respecto a x .

Ejemplo 1. Para $y = x^2$,

(a) Halle Δy en términos de x y de Δx .

(b) Use esta fórmula para Δy para calcular Δy cuando x cambia de 1 a 1.1; para calcular Δy cuando x cambia de 1 a 1.001.

(c) Divida ambos lados del resultado que obtuvo en (a) entre Δx para obtener una fórmula para $\Delta y/\Delta x$. Calcule esta razón para $x = 1$ y $\Delta x = 0.1$; para $x = 1$ y $\Delta x = 0.001$.

Obtenga el límite del cociente de diferencias $\Delta y/\Delta x$ cuando Δx tiende a cero y así halle $D_x y$ para $y = x^2$.

¿Cuál es el valor de $D_x y$?

Solución. (a) Puesto que $y = x^2$, entonces

$$\begin{array}{l} \text{Restando} \\ \text{obtenemos} \end{array} \quad \frac{y + \Delta y}{\Delta y} = \frac{(x + \Delta x)^2}{2x\Delta x + \Delta x^2} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2}{2x\Delta x + \Delta x^2}$$

(b) Sustituyendo x por 1 y Δx por 0.1 en esta fórmula (cuando x cambia de 1 a 1.1 entonces $\Delta x = 1.1 - 1 = 0.1$), tenemos que

$$\Delta y = 2(1)(0.1) + (0.1)^2 = 0.2 + 0.01 = 0.21.$$

De manera semejante, cuando $x = 1$ y $\Delta x = 0.001$, entonces

$$\Delta y = 2(1)(0.001) + (0.001)^2 = 0.002001.$$

(c) Obtenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Para	$x = 1,$	$\Delta x = 0.1,$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2.1;$
para	$x = 1,$	$\Delta x = 0.001,$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2.001.$

Además,

$$D_x y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x,$$

$$y \quad D_x y \Big|_1 = 2.$$

Ejemplo 2. (a) Halle la razón de cambio del volumen v de una esfera con respecto a su radio r .

(b) Halle el valor de esta razón de cambio en 1; en 3.

Solución. (a) Recordemos que

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Por definición, la razón de cambio de v con respecto a r es

$$D_r v = 4\pi r^2.$$

(b) Usando el resultado obtenido en (a), obtenemos

$$D_r v \Big|_1 = 4\pi(1)^2 = 4\pi, \quad D_r v \Big|_3 = 4\pi(3)^2 = 36\pi.$$

EJERCICIOS

1. (a) Dada $y = x^3$, halle Δy en términos de x y de Δx . Halle Δy para $x = 1$ y $\Delta x = 0.1$; para $x = 1$ y $\Delta x = 0.01$.

(b) Encuentre la razón promedio de cambio de y con respecto a x para el intervalo $[x; x + \Delta x]$, el intervalo $[1; 1.1]$ y el intervalo $[1; 1.01]$.

(c) Halle la razón de cambio de y con respecto a x . Halle el valor de esta razón de cambio en 1; en 3.

2. (a) Si $y = 2x^2 + 1$, halle Δy en términos de x y Δx . Halle Δy para $x = 1$ y $\Delta x = 0.1$; para $x = 10$ y $\Delta x = 0.01$.

(b) Halle la razón promedio de cambio de y respecto a x para el intervalo $[x; x + \Delta x]$, para el intervalo $[2; 2.5]$ y para el intervalo $[2; 2.01]$.

(c) Halle la razón de cambio de y respecto a x . Halle el valor de esta razón de cambio en 2; en 4.

3. Demuestre que la razón de cambio de área de un círculo con respecto a su radio es igual a la circunferencia del círculo.

4. Demuestre que la razón de cambio del volumen de una esfera con respecto a su radio es igual al área de la superficie de la esfera.

En los ejercicios del 5 al 10 halle $D_x y$ mediante la notación de incremento y sin usar las fórmulas para derivadas, previamente obtenidas.

5. $y = 1/x.$

6. $y = x^{1/2}.$

7. $y = 2x^2 - 3x + 4.$

8. $y = 1/x^2.$

9. $y = x^4.$

10. $y = 2x^2 - 2x + 4.$

En los ejercicios del 11 al 14, halle $F'(x)$ mediante la notación de incrementos y sin usar las fórmulas para derivadas previamente obtenidas.

11. $F(x) = 4x^2 - 3x$.

13. $F(x) = 2x - x^2$.

15. Halle la razón de cambio del área a de un triángulo equilátero, respecto a su lado s .

16. Halle la razón de cambio del volumen v de un cubo, respecto a su arista e .

17. La repulsión r de dos cargas eléctricas separadas x unidades está dada por $r = 25/x^2$. Halle la razón de cambio de r con respecto a x . Halle el valor de esta razón de cambio en 2; en 3.

18. Para algún gas en una cámara eléctrica la presión p y el volumen v están relacionados mediante la igualdad $vp = 75$. Halle la razón de cambio de la presión respecto al volumen. Halle el valor de esta razón de cambio en 1; en 3.

19. Dos lados de un triángulo tienen 10 y 12 cms. de longitud y el ángulo entre ellos es θ . Halle la razón de cambio del área a de este triángulo respecto a θ . Halle el valor de esta razón de cambio en $\pi/4$; en $\pi/2$.

3.14. Diferenciales. Supóngase que F es una función tal que $F'(x)$ existe sobre algún intervalo S . Sea $\Delta x \neq 0$ un número tal que $x + \Delta x$ esté en el dominio de F y por tanto, tal que el punto $(x + \Delta x, F(x + \Delta x))$ esté en la gráfica de F (véase la Fig. 3.10).

De la definición de derivada:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

y de la definición de límite, se concluye que la diferencia

$$\left| \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} - F'(x) \right|$$

puede hacerse tan pequeña como se desee para $\Delta x \neq 0$, suficientemente pequeña. Podemos escribir

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} - F'(x) = k, \quad (65)$$

donde

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} k = 0.$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación (65) por Δx y reagrupando términos tenemos

$$F(x + \Delta x) - F(x) = F'(x) \Delta x + k \Delta x. \quad (66)$$

La expresión $F'(x) \Delta x$ es de especial interés para nosotros por lo que le daremos un nombre.

Si F es una función tal que $F'(x)$ exista sobre el intervalo S y si Δx es cualquier número distinto de cero, la **diferencial** de $F(x)$ con respecto a x es igual a $F'(x)$ multiplicada por Δx . Denotaremos esta diferencial por $d_x F(x)$, de modo que

$$d_x F(x) = F'(x) \Delta x. \quad (67)$$

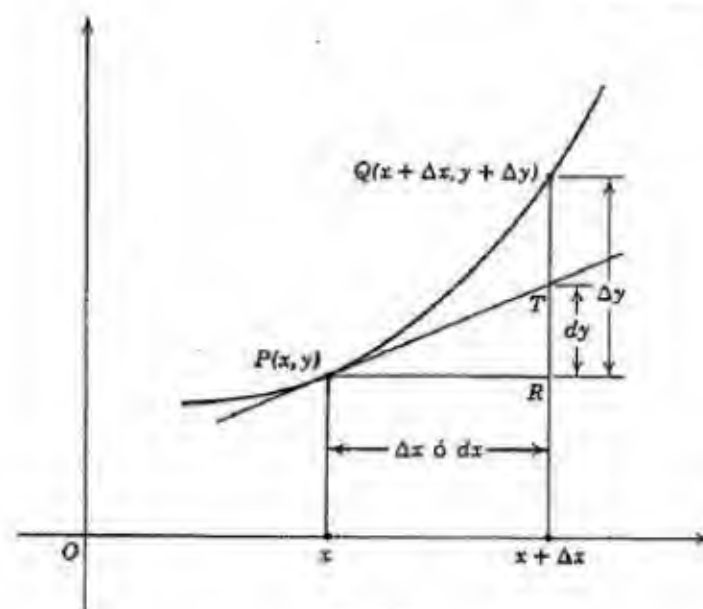


Fig. 3.10

Si $y = F(x)$, entonces (67) toma la forma

$$d_x y = D_x y \Delta x. \quad (68)$$

Para la función identidad $I = \{(x, y) \mid y = x\}$ tal que $I(x) = x$ y $D_x y = 1$ tendremos, según (68)

$$d_x y = (1) \Delta x,$$

o sea

$$d_x x = \Delta x. \quad (69)$$

Podemos escribir (67) en la forma

$$d_x F(x) = F'(x) d_x x, \quad (70)$$

y (68) como

$$d_x y = D_x y d_x x. \quad (71)$$

Supóngase que x es la correspondiente de t ante una función V y que y es la correspondiente de x ante alguna función U , de modo que

$$y = U(x) \quad \text{y} \quad x = V(t).$$

Entonces y es la correspondiente de t ante la función compuesta $F = U[V]$, o sea que

$$y = U[V(t)] = F(t).$$

Suponemos aquí que U y V son derivables sobre intervalos apropiados. De la definición de diferencial:

$$d_t y = D_t y d_t t.$$

de la regla de la cadena

$$D_{t,y} = D_{x,y} D_{t,x}$$

Así pues

$$d_t y = D_{x,y} D_{t,x} d_t x$$

Además, de la definición de diferencial

$$d_t x = D_{t,x} d_t t$$

Por tanto

$$d_t y = D_{x,y} d_t x$$

(72)

Comparemos los resultados

$$d_x y = D_{x,y} d_x x \quad \text{y} \quad d_t y = D_{x,y} d_t x$$

Esta comparación nos hace ver que podemos escribir

$$d_{\square} y = D_{x,y} d_{\square} x$$

con la misma variable (independiente o no) colocada en cada cuadrado. Es por esto que la fórmula

$$d_x y = D_{x,y} d_x x$$

se escribe usualmente en la forma

$$dy = D_{x,y} dx$$

(73)

Leemos (73) como "la diferencial de y es igual a la derivada de y con respecto a x , multiplicada por la diferencial de x ", donde se entiende que dy y dx son diferenciales con respecto a la misma variable. De modo semejante, (70) se puede escribir

$$dF(x) = F'(x) dx$$

(74)

Algunos ejemplos de diferenciales son

$$\text{Si } y = 2x^3 - 4x^2, \text{ entonces } dy = D_x(2x^3 - 4x^2) dx = (6x^2 + 8x^3) dx;$$

$$\text{si } y = \cos x^2, \text{ entonces } dy = D_x(\cos x^2) dx = -2x \sin x^2 dx;$$

$$d(5x+1)^{3/2} = D_x(5x+1)^{3/2} dx = \frac{3}{2}(5x+1)^{1/2} \cdot 5 dx = 15/2 (5x+1)^{1/2} dx;$$

$$d(\sin 3x^2) = D_x(\sin 3x^2) dx = (\cos 3x^2) \cdot 6x dx = 6x \cos 3x^2 dx.$$

Si $y = F(x)$, entonces (66) toma la forma

$$\Delta y = F(x + \Delta x) - F(x) = dy + k \Delta x,$$

(75)

de la que vemos que en general $\Delta y \neq dy$.

Podemos dar una interpretación geométrica de las diferenciales en la forma siguiente. Sea F una función derivable sobre S y sean

$$P(x, y) \quad \text{y} \quad Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$$

dos puntos de la gráfica de F tales que $x \in S$ y $(x + \Delta x) \in S$. Sea PT la tangente en P a la gráfica de F (Fig. 5.10). De la Fig. 3.10 tenemos que

$$PR = \Delta x = dx, \quad RQ = \Delta y,$$

$$\frac{RT}{PR} = \tan \angle RPT.$$

Pero sabemos que $\tan \angle RPT = F'(x)$. Por lo que

$$RT = PR \cdot F'(x) = F'(x) dx,$$

y vemos que RT representa la diferencial $dF(x)$. Esto es, si $y = F(x)$ entonces $RT = dy$.

Como hemos notado, si $y = F(x)$ entonces en general $dy \neq \Delta y$. Sin embargo si F es una función lineal, su gráfica es una recta y la tangente PT coincide con la gráfica de F ; así es que si F es lineal y si $y = F(x)$ entonces $dy = \Delta y$.

De (75) se sigue que

$$|\Delta y - dy| = |k| |\Delta x|.$$

En consecuencia, podemos hacer $|\Delta y - dy|$ tan pequeño como se desee con hacer $|\Delta x|$ suficientemente pequeño. Es por esto que dy es una útil aproximación a Δy cuando Δx es pequeña.

Ejemplo 1. Mediante el uso de diferenciales calcule el valor aproximado de $\sqrt[3]{122}$.

Solución. Sea $y = x^{1/3}$. Entonces

$$dy = D_x y dx = \frac{1}{3} x^{-2/3} dx = \frac{1}{3x^{2/3}} dx.$$

Sustituya x por 125 y dx , por -3 . Luego

$$dy = -\frac{1}{25} = -0.04 \quad \text{y} \quad y = 5.$$

De modo que una aproximación a $y + \Delta y$ para $x = 125$ y $dx = \Delta x = -3$ será

$$y + dy = 5 - 0.04 = 4.96.$$

Ejemplo 2. Para $y = 3x^2$, calcule dy y Δy para cualquier $\Delta x = dx$; Id. para $x = 10$ y $\Delta x = 0.1$; Id. para $x = 10$ y $\Delta x = 0.01$.

Solución. Tenemos que

$$\Delta y = 3(x + \Delta x)^2 - 3x^2 = 6x \Delta x + 3\Delta x^2.$$

Puesto que $D_x y = 6x$, usando $dy = D_x y dx$, $dy = 6x dx$.

$$\text{Para } x = 10 \text{ y } \Delta x = 0.1, \quad \Delta y = 6.03 \quad \text{y} \quad dy = 6.$$

$$\text{Para } x = 10 \text{ y } \Delta x = 0.01, \quad \Delta y = 0.6003 \quad \text{y} \quad dy = 0.60.$$

Como consecuencia de la igualdad (73) podemos escribir

$$D_x y = \frac{dy}{dx}; \quad (76)$$

es decir que la derivada de y con respecto a x es igual a la razón de la diferencial de y a la diferencial de x (donde se sobreentiende que dy y dx son diferenciales con respecto a la misma variable). De ahora en adelante usaremos las notaciones $D_x y$ y dy/dx indistintamente para designar la derivada de y con respecto a x . Por ejemplo: si $y = \sin x^2$, escribiremos

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cos x^2 \text{ ó } D_x y = 2x \cos x^2.$$

Para derivadas de orden superior, se presenta igual posibilidad de intercambiar el simbolismo, siendo

$$D_x^2 y = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad D_x^3 y = \frac{d^3 y}{dx^3}, \quad D_x^n y = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Del hecho de que la diferencial dy , de $y = F(x)$ es el producto de la derivada $D_x y$ por la diferencial dx , se sigue que de cada fórmula que da una derivada se puede obtener una fórmula que dé una diferencial. Por ejemplo, puesto que $D_x u^p = pu^{p-1}$ tenemos, según la fórmula (73) que

$$d(u^p) = pu^{p-1} du.$$

Listaremos las principales fórmulas para derivadas ya establecidas, con sus correspondientes fórmulas para diferenciales. Aquí $u = U(x)$ y $v = V(x)$, siendo U y V derivables sobre algún intervalo S , y c un número real.

Para derivadas	Para diferenciales
(i) $D_x c = 0$	$dc = 0$
(ii) $D_x(cu^p) = cpu^{p-1} D_x u$	$d(cu^p) = cpu^{p-1} du$
(iii) $D_x(cu) = c D_x u$	$d(cu) = c du$
(iv) $D_x(u+v) = D_x u + D_x v$	$d(u+v) = du + dv$
(v) $D_x(uv) = u D_x v + v D_x u$	$d(uv) = u dv + v du$
(vi) $D_x\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v D_x u - u D_x v}{v^2}$	$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$
(vii) $D_x(\sin u) = \cos u D_x u$	$d(\sin u) = \cos u du$
(viii) $D_x(\cos u) = -\sin u D_x u$	$d(\cos u) = -\sin u du$

Para llegar a la fórmula (v) para diferenciales, tenemos que

$$\begin{aligned} d(uv) &= D_x(uv) du && [\text{según (73)}] \\ &= (u D_x v + v D_x u) du \\ &= u D_x v du + v D_x u du \\ &= u dv + v du. && [\text{según (73)}] \end{aligned}$$

Es interesante notar que igualmente podemos tener el mismo resultado diferenciando con respecto a cualquier otra variable. Obsérvese que

$$\begin{aligned} d(uv) &= D_x(uv) dx && [\text{según (73)}] \\ &= (u D_x v + v D_x u) dx \\ &= u D_x v dx + v D_x u dx \\ &= u dv + v du. && [\text{según (73)}] \end{aligned}$$

Para deducir (vii) para diferenciales, simplemente notemos que

$$d(\sin u) = D_u(\sin u) du = \cos u du.$$

Algunos ejemplos de diferenciales son:

$$\begin{aligned} d(9) &= 0; \quad d(4x^2) = 20x^4 dx; \\ d(3 \sin^2 x) &= 3 \cdot 2 \sin x d(\sin x) = 6 \sin x \cos x dx; \\ d(4 \sin x) &= 4 d(\sin x) = 4 \cos x dx; \\ d(x^2 + x^3) &= d(x^2) + d(x^3) = 2x dx + 3x^2 dx; \\ d(x^2 \sin x) &= x^2 d(\sin x) + \sin x d(x^2) = x^2 \cos x dx + 2x \sin x dx; \\ d\left(\frac{x}{\cos x}\right) &= \frac{\cos x dx - x d(\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos x dx + x \sin x dx}{\cos^2 x}; \\ d[\sin(2x^2 - 3)] &= [\cos(2x^2 - 3)] d(2x^2 - 3) = 4x \cos(2x^2 - 3) dx; \\ d(\cos 3x^4) &= -(\sin 3x^4) d(3x^4) = -12x^3 \sin 3x^4 dx. \end{aligned}$$

Al hallar $D_x y$ mediante la derivación implícita de una ecuación en x y y dada, es a veces conveniente usar diferenciales. Nótese que la diferencial del lado izquierdo de la ecuación dada es igual a la diferencial del lado derecho. Al tomar estas diferenciales haremos uso de las fórmulas apropiadas para diferenciales con objeto de obtener una ecuación que comprenda dx y dy . Resolveremos esta ecuación para dy/dx y usaremos el hecho de que

$$D_x y = \frac{dy}{dx}.$$

Ejemplo 3. Halle $D_x y$ mediante diferenciales, si $x^2 - xy + 2y^2 = 4$.

Solución. Al tomar la diferencial de los dos lados de la ecuación dada obtenemos

$$\begin{aligned} d(x^2 - xy + 2y^2) &= d(4), \text{ ó } d(x^2) - d(xy) + d(2y^2) = 0, \\ 2x dx - (x dy + y dx) + 4y dy &= 0. \end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que $\frac{dy}{dx} = \frac{y-2x}{4y-x}$. Por tanto, la respuesta es

$$D_x y = \frac{y-2x}{4y-x}.$$

Recuérdese, de la Sec. 3.11 que un sistema con derivada es un par de proposiciones de la forma

$$F'(x) = H(x), \quad F(a) = b, \quad (77)$$

donde la primera proposición da una expresión para $F'(x)$, y la segunda especifica un par ordenado que pertenece a F . Con el hecho de que $F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$, el sistema con derivada (77) puede darse en la forma

$$dF(x) = H(x) dx, \quad F(a) = b.$$

Si $y = F(x)$, de tal modo que $dy = dF(x)$, esta forma diferencial del sistema (77) puede escribirse como

$$dy = H(x) dx, \quad y = b \text{ si } x = a. \quad (78)$$

Llamaremos a (78) un **sistema con diferencial**, a la proposición $dy = H(x) dx$, **ecuación diferencial**, y a la proposición $y = b$ cuando $x = a$, una **condición a la frontera**, para la ecuación diferencial $dy = H(x) dx$. Una expresión para y que satisfaga al sistema con diferencial (78), se llamará **solución del sistema con diferencial**.

El familiarizarse con las fórmulas para diferenciales dadas en la Pág. 174 facilitará el obtener las antiderivadas. En relación con esto deben tenerse presentes las siguientes proposiciones:

$$\text{Si } dy = au^p du, \text{ entonces } y = \frac{a}{p+1} u^{p+1} + k, p \neq -1. \quad (79)$$

$$\text{Si } dy = a \sin u du, \text{ entonces } y = -a \cos u + k. \quad (80)$$

$$\text{Si } dy = a \cos u du, \text{ entonces } y = a \sin u + k. \quad (81)$$

La proposición (79) es una reestructuración de (55), en términos de diferenciales; de igual forma (80) lo es de (58) y (81) de (57).

Por ejemplo notemos que el sistema con derivada

$$F'(x) = x\sqrt{25-x^2}, \quad F(4) = 7$$

puede intercambiarse por el sistema con diferencial

$$dy = x(25-x^2)^{1/2} dx, \quad y = 7 \text{ cuando } x = 4,$$

donde $y = F(x)$. Para encontrar una fórmula para y a partir de $dy = x(25-x^2)^{1/2} dx$, observamos que

$$d(25-x^2) = -2x dx$$

y que en consecuencia

$$dy = -\frac{1}{2}(25-x^2)^{1/2} d(25-x^2).$$

Por tanto, según (79)

$$y = -\frac{1}{2} \frac{(25-x^2)^{3/2}}{3/2} + k,$$

$$y = -\frac{1}{3}(25-x^2)^{3/2} + k. \quad (82)$$

Usando la condición a la frontera, $y = 7$ cuando $x = 4$, tenemos que

$$7 = -\frac{(25-16)^{3/2}}{3} + k, \text{ luego } k = 16.$$

De ahí que la solución para el propuesto sistema con diferencial sea

$$y = -\frac{(25-x^2)^{3/2}}{3} + 16.$$

Llamaremos a (82) una solución general de la ecuación diferencial $dy = x(25-x^2)^{1/2} dx$, y a

$$y = F(x) + k \quad (83)$$

solución general de la ecuación diferencial

$$dy = H(x) dx$$

si $F'(x) = H(x)$. Para resolver un sistema con diferencial de la forma (78) hallaremos una solución general de la forma (83) de la ecuación diferencial dada, y en seguida usaremos la condición a la frontera para determinar k .

Ejemplo 4. Resuelva el sistema con diferencial

$$dy = \sin 2x dx, \quad y = \frac{7}{2} \text{ cuando } x = \frac{\pi}{2}:$$

Solución. Nos percatamos que $d(2x) = 2dx$, por lo que la ecuación diferencial dada puede ponerse en la forma

$$dy = \frac{1}{2} \sin dx d(2x).$$

Por tanto, según (80)

$$y = -\frac{1}{2} \cos 2x + k.$$

Usando la condición a la frontera dada, obtenemos

$$\frac{7}{2} = -\frac{1}{2} \cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right) + k, \text{ ó } \frac{7}{2} = -\frac{1}{2} \cos \pi + k.$$

Puesto que $\cos \pi = -1$ resulta que $k = 3$. En consecuencia la solución del sistema con diferencial propuesto es

$$y = -\frac{1}{2} \cos 2x + 3.$$

Ejemplo 5. Encuentre una solución general de la ecuación diferencial

$$dy = -t^2 (\cos t^3)^4 \sin t^3 dt.$$

Solución. Como aparece la cuarta potencia de $\cos t^3$, nos preguntamos si dy se puede escribir en la forma $a(\cos t^3)^4 d(\cos t^3)$. Observemos que

$$d(\cos t^3) = -\sin t^3 d(t^3) = -3t^2 \sin t^3 dt,$$

luego, la ecuación diferencial puede escribirse en la forma

$$dy = \frac{1}{3} (\cos t^3)^4 d(\cos t^3).$$

Entonces, según (79) vemos que la solución general es

$$y = \frac{1}{15}(\cos t)^2 + k.$$

EJERCICIOS

1. Dada $y = x^2 - 4x$, halle dy y Δy en términos de x y de Δx . Halle dy y Δy si x cambia de 4 a 4.1; de 4 a 4.01; de 4 a 4.001.

2. En cada uno de los siguientes casos use diferenciales para hallar el cambio aproximado dy , de las y , cuando ocurre en las x el cambio indicado por Δx . Use después este resultado para calcular un valor aproximado de y que corresponda al valor $x_1 + \Delta x$, dado para x .

(a) $y = 3x - x^2$, x cambia de $x_1 = 2$ a $x_1 + \Delta x = 2.02$.

(b) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, x cambia de $x_1 = 2$ a $x_1 + \Delta x = 2.02$.

3. Use diferenciales para calcular un valor aproximado para (a) $\sqrt[3]{66}$; (b) $28^{2/3}$.

4. Dado que $\sin 60^\circ = 0.86603$, $\cos 60^\circ = 0.50000$ y $1^\circ = 0.01745$ radianes, use diferenciales para calcular el valor de $\cos 61^\circ$ y $\sin 59^\circ$ con cuatro decimales.

5. Si el radio de un globo esférico crece de 8m a 8.1m, ¿cuánto crece el volumen aproximadamente?

Sugestión: El aumento exacto en el volumen será Δv , donde $v = \frac{4}{3}\pi r^3$, $r = 8$ y $\Delta r = 0.1$; sin embargo el cálculo de Δv es bastante tedioso. Una buena aproximación de Δv es dv y el estudiante debe encontrar dv .

6. De cada cara de un bloque cúbico de madera se saca una capa de 03 cm. de espesor. Si el bloque tenía originalmente 7 cms de arista, ¿aproximadamente cuánto va a decrecer el volumen a causa del proceso?

7. Si $F(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$, halle el valor aproximado de $F(3.002)$.

8. Usando diferenciales calcule en forma aproximada el volumen del metal usado en una esfera hueca de diámetro interior igual a 10 cms y espesor de 0.05 cms.

9. Encuentre $dF(x)$ para cada uno de los siguientes problemas.

(a) $F(x) = x^4 - 4x$

(b) $F(x) = (x^3 - 1)^3$

(c) $F(x) = x\sqrt{2x-1}$

(d) $F(x) = \sin^3 x$

(e) $F(x) = \cos x^2$

(f) $F(x) = \sin^2 5x + \cos^2 5x$

(g) $F(x) = \frac{2x+1}{\sin x}$

(h) $F(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

10. Encuentre dy para cada uno de los siguientes problemas.

(a) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$

(b) $y = \frac{\sin x}{\cos x}$

(c) $y = \sin^2 x$

(d) $y = x^2 \sin 2x^3$

(e) $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^{3/2}}$

(f) $y = \frac{\sin 2x}{\cos 3x}$

(g) $y = \frac{\sin x^2}{x^3}$

(h) $y = \frac{\cos(2x+3)}{\sin(3x-2)}$

En cada uno de los ejercicios del 11 al 16 resuelva el sistema con diferencial dado.

11. $dy = (2x - 3) dx$, $y = 1$ cuando $x = 0$.

12. $dy = (x^2 - 1) dx$, $y = 2$ cuando $x = 0$.

13. $dy = \frac{2 dx}{\sqrt{5-4x}}$, $y = 5$ cuando $x = 1$.

14. $dy = \frac{x dx}{\sqrt{x^2+9}}$, $y = 0$ cuando $x = 4$.

15. $dy = \sin 2x dx$, $y = 1$ cuando $x = \pi/3$.

16. $dy = \cos^2 x \sin x dx$, $y = 4$ cuando $x = 0$.

En cada uno de los ejercicios del 17 al 28 encuentre una solución general para la ecuación diferencial dada.

17. $dy = \frac{2x dx}{\sqrt{x^2+4}}$

18. $dy = \frac{x dx}{\sqrt{x^2+4}}$

19. $dy = \frac{7x^2 dx}{(x^3-4)^2}$

20. $dy = \frac{x dx}{\sqrt{25-x^2}}$

21. $ds = (t+1) \sqrt{2t^2+4t} dt$

22. $dy = (\cos x)^{-2} \sin x dx$

23. $dy = \cos 3x dx$

24. $dy = \sin 2x dx$

25. $dr = t^2 \cos t^3 dt$

26. $dy = \cos^2 x \sin x dx$

27. $dy = \left(\sin 3x + 3 \cos 5x - \sin \frac{x}{2} \right) dx$

28. $dy = (\sin^2 3t + \sin 3t) \cos 3t dt$

En cada uno de los ejercicios del 29 al 32 encuentre $D_x y$ mediante el uso de diferenciales.

29. $x^3 + y^3 - 3xy = 4$

30. $\sin(x+y) = x$

31. $x \cos xy = 5$

32. $\sin x + \cos y = 0$

33. Si $\sin \frac{x}{y} + \cos \frac{y}{x} = 0$, demuestre que $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

EJERCICIOS ADICIONALES AL CAPITULO 3

En cada uno de los ejercicios del 1 al 10 encuentre $D_x F(x)$ usando cualquiera de las fórmulas que hemos establecido para las derivadas.

1. $F(x) = \left(\frac{a^2 + x^2}{x^4} \right)^3$

2. $F(x) = \left(\frac{x-1}{x} \right)^2$

3. $F(x) = \frac{x^3 - 3x + 1}{x^3 + 3x + 1}$

4. $F(x) = x^2 \sqrt{a^2 - x^2}$

5. $F(x) = x^4 \sin 3x$

6. $F(x) = \frac{3 + 4 \sin x}{4 + 3 \sin x}$

7. $F(x) = \frac{1 + \sin^2 2x}{1 - \sin^2 2x}$

8. $F(x) = \cos^3 x \sin^3 3x$

9. $F(x) = \frac{x}{\sin \sqrt{x}}$

10. $F(x) = \frac{(1+x^2)^2}{1-x^2}$

Para la función y el intervalo dados en cada uno de los ejercicios del 11 al 14 determine si se aplica el Teorema del Valor Medio para Derivadas; si no se aplica indique por qué; si se aplica, encuentre el número o números que pueden usarse como c en el Teorema del Valor Medio.

11. $F(x) = x^2; [2; 5]$.

13. $F(x) = 4/x^2; [-1; 1]$.

14. $F(x) = x^2 + 2x^3 - 1; [-1; 4]$.

En cada uno de los ejercicios del 15 al 22 se da una ecuación derivada de la forma $F'(x) = G(x)$ dé una solución de esta ecuación, en la forma $F(x) = H(x) + k$, donde $D_x H(x) = G(x)$ y k es un número real.

15. $F'(x) = (7x + 2)^{-2}$.

17. $F'(x) = \sin 5x \cos^2 5x$.

19. $F'(x) = x^2 \sqrt{2x^3 + 4}$.

21. $F'(x) = x^3 \sin x^4$.

12. $F(x) = \sin x; [\pi/6; \pi/3]$.

16. $F'(x) = (bx - a)^{-n}$.

18. $F'(x) = \cos 7x \sin^3 7x$.

20. $F'(x) = (2 - 2x)^{2/3}$.

22. $F'(x) = x^4 \cos x^5$.

En cada uno de los ejercicios del 23 al 30 encuentre una solución general de la ecuación diferencial dada.

23. $dy = (8x^3 - 2x) dx$.

25. $dy = x^2 \sin 2x^3 dx$.

27. $dy = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx$.

29. $dy = (3x - 5)^{-3/2} dx$.

24. $dy = (7x - 4)^6 dx$.

26. $dy = \sin 2x \cos 2x dx$.

28. $dy = \cos(a - t) dt$.

30. $dy = (1 - x)^{-3/2} dx$.

Algunas aplicaciones de las derivadas

4.1 Correspondientes crecientes y decrecientes. Considérese la función.

$$F = \{(x, y) \mid y = F(x), x \in X\}.$$

Se dice que $F(x)$ es **creciente sobre un intervalo** $S \subseteq X$ si

$$F(x_1) < F(x_2) \text{ cuando } x_1 \in S, x_2 \in S, \text{ y } x_1 < x_2.$$

Se dice que $F(x)$ es **decreciente sobre un intervalo** $S \subseteq X$ si

$$F(x_1) > F(x_2) \text{ cuando } x_1 \in S, x_2 \in S, \text{ y } x_1 < x_2.$$

Se dice que un punto c es un **punto interior** de un intervalo S si existe un intervalo abierto $(a; b)$, tal que

$$c \in (a; b) \subseteq S.$$

De acuerdo con esta definición de punto interior, todo punto de un intervalo abierto es un punto interior del intervalo. De modo semejante, todos los puntos de un intervalo cerrado, excepto los puntos extremos, son puntos interiores del mismo.

Decimos que $F(x)$ es **creciente en** c si c es un punto interior de algún intervalo sobre el cual $F(x)$ es creciente. Si $F(x)$ es creciente sobre un intervalo abierto, es creciente en todos los puntos del intervalo; si $F(x)$ es creciente sobre un intervalo cerrado, es creciente en todos los puntos interiores al mismo.

Decimos que $F(x)$ es **decreciente en** c si c es un punto interior de algún intervalo sobre el cual $F(x)$ es decreciente. Si $F(x)$ es decreciente sobre un intervalo abierto, es decreciente en todos los puntos de dicho intervalo; si $F(x)$ es decreciente sobre un intervalo cerrado, es decreciente en todos los puntos interiores al mismo.

Supóngase que $F(x)$ es creciente sobre el intervalo $[a; b]$. Entonces para $a < c < b$,

$$F(x) < F(c) \text{ cuando } x \in [a; c),$$

y

$$F(x) > F(c) \text{ cuando } x \in (c; b].$$

(1)

Sea el dominio de F un conjunto de puntos sobre un eje horizontal cuya dirección positiva es hacia la derecha. Se sigue de (1) que si $P(c, F(c))$ y $M(x_1, F(x_1))$

son dos puntos de la gráfica de F tales que x_1 sea menor que c , entonces la ordenada $F(x_1)$ de M , es menor que la ordenada $F(c)$ de P . Además, si $N(x_2, F(x_2))$ es un punto de la gráfica de F , tal que x_2 sea mayor que c , entonces la ordenada $F(x_2)$ de N , es mayor que la ordenada $F(c)$ de P (véase la Fig. 4.1). Describimos esta situación diciendo que el punto M es "más bajo" que P y que el punto N está "más alto" que P , y que la gráfica de F "asciende" sobre $[a; b]$.

Supóngase que $F(x)$ es decreciente sobre el intervalo $[a; b]$. Entonces para $a < c < b$,

$$F(x) > F(c) \text{ cuando } x \in [a; c), \quad (2)$$

$$\text{y} \quad F(x) < F(c) \text{ cuando } x \in (c; b].$$

De nuevo, sea el dominio de F un conjunto de puntos sobre un eje horizontal cuya dirección positiva es hacia la derecha. Se sigue de (2) que si $P(c, F(c))$

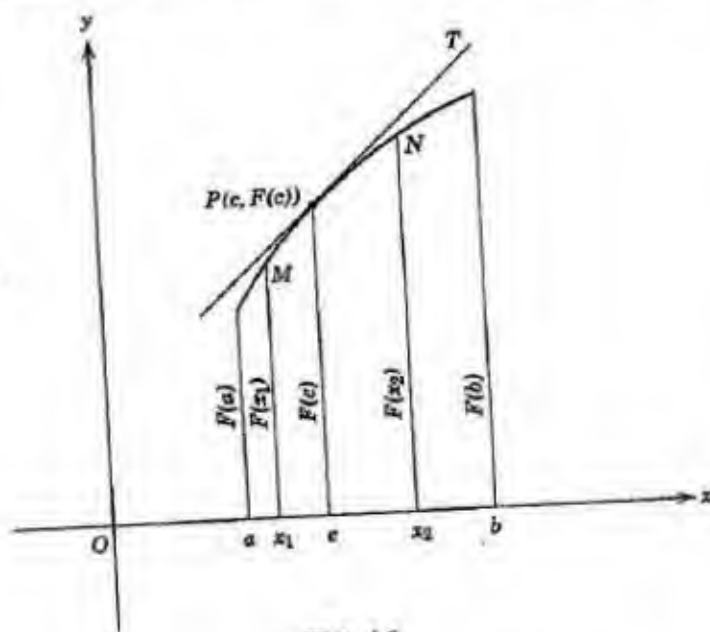


Fig. 4.1

y $M(x_1, F(x_1))$ son dos puntos de la gráfica de F , tales que x_1 sea menor que c , entonces la ordenada $F(x_1)$ de M , es mayor que la ordenada $F(c)$ de P . Además, si $N(x_2, F(x_2))$ es un punto de la gráfica de F , tal que x_2 sea mayor que c , entonces la ordenada $F(x_2)$ de N , es menor que la $F(c)$ de P (véase la Fig. 4.2). Para describir esta situación decimos que el punto M está "más alto" que P y que el punto N está "más bajo" que P , y que la gráfica de F "desciende" sobre $[a; b]$.

Como ejemplo tómese la función valor absoluto $F = \{(x, |x|)\}$, cuya gráfica aparece en la Fig. 1.3 y para la cual $F(x) = |x|$. Nótese que $F(x)$ es decreciente sobre $(-\infty; 0]$ y creciente sobre $[0; +\infty)$.

Para la función raíz cuadrada simple $F = \{(x, \sqrt{x})\}$, cuya gráfica aparece en la Fig. 1.21 y para la cual $F(x) = \sqrt{x}$, $F(x)$ es creciente sobre $[0; +\infty)$.

Para la función $G = \{(x, y) \mid y = x^2 - 1, x \in (-\infty; -1)\}$, cuya gráfica es el arco de trazo grueso de la Fig. 1.27 y para la cual $G(x) = x^2 - 1$, $G(x)$ es decreciente sobre el intervalo $(-\infty; -1)$.

Para la función $F = \{(x, y) \mid y = 4x - x^2\}$ cuya gráfica aparece en la Fig. 1.32 y para la cual $F(x) = 4x - x^2$, $F(x)$ es creciente sobre $(-\infty; 2]$ y es decreciente sobre $[2; +\infty)$.

La tangente a la gráfica de F en cada punto de la gráfica dada en la Fig. 4.1 tiene pendiente positiva y resulta intuitivamente verosímil que si $F'(x) > 0$ para $x \in (a; b)$ entonces $F(x)$ es creciente sobre $(a; b)$. En forma similar, la tangente a la gráfica de F en cada punto de la gráfica dada en la Fig. 4.2 tiene pendiente negativa y resulta también verosímil que si $F'(x) < 0$ para $x \in (a; b)$ entonces $F(x)$ es decreciente sobre $(a; b)$. Daremos demostraciones analíticas de estas conjeturas en los dos teoremas siguientes.

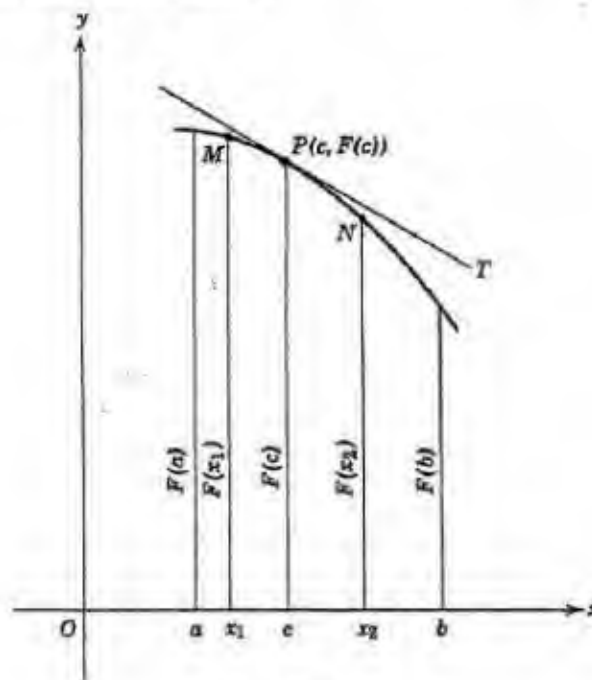


Fig. 4.2

Teorema 1. Si $F'(x) > 0$ sobre $(a; b)$ entonces $F(x)$ es creciente sobre $(a; b)$.

Demostración. Sean x_1 y x_2 dos elementos de $(a; b)$, tales que $x_1 < x_2$. Entonces según el teorema 16 de la Sec. 3.10, $F(x_1) < F(x_2)$. Por tanto $F(x)$ es creciente sobre $(a; b)$ y el teorema queda demostrado. ■

Si además de la hipótesis del teorema 1 de que $F'(x) > 0$ sobre $(a; b)$, se nos da que F es continua sobre $[a; b]$, entonces $F(x)$ será creciente sobre $[a; b]$. Para demostrarlo basta probar que

$$F(a) < F(x) \text{ cuando } x \in (a; b).$$

Puesto que F satisface la hipótesis del Teorema del Valor Medio para Derivadas, tenemos que

$$\frac{F(x) - F(a)}{x - a} = F'(c) \quad \text{si } c \in (a; x).$$

Puesto que $F'(c) > 0$ y $x - a > 0$, se concluye que

$$F(x) > F(a).$$

De manera semejante se puede demostrar que si $F'(x) > 0$ sobre $(a; b)$ y F es continua sobre $[a; b]$, entonces $F(x)$ es creciente sobre $(a; b)$. Se sigue entonces que si $F'(x) > 0$ sobre $(a; b)$ y F es continua $[a; b]$, entonces $F(x)$ es creciente sobre $[a; b]$.

Teorema 2. Si $F'(x) < 0$ sobre $(a; b)$, entonces $F(x)$ es decreciente sobre $(a; b)$.

La demostración del teorema 2 es semejante a la del Teorema 1 y se pide al estudiante que la desarrolle en el ejercicio 19 de esta sección.

Si además de la hipótesis del teorema 2 de que $F'(x) < 0$ sobre $(a; b)$, se nos da que F es continua sobre $[a; b]$, entonces $F(x)$ será decreciente sobre $[a; b]$. Lo que es más, si $F'(x) < 0$ sobre $(a; b)$ y F es continua sobre $(a; b)$, entonces $F(x)$ es decreciente sobre $(a; b)$. Estas proposiciones pueden demostrarse como las análogas para correspondientes crecientes que se siguen del teorema 1. De ahí que si $F'(x) < 0$ sobre $(a; b)$ y si F es continua sobre $[a; b]$, entonces $F(x)$ es decreciente sobre $[a; b]$.

Para la mayoría de las funciones F que tendremos que considerar, habrá un número finito de intervalos que estén en el dominio de F , sobre los cuales $F'(x) > 0$ y un número finito de intervalos que estén en el dominio de F , sobre los cuales $F'(x) < 0$. Con objeto de determinar dichos intervalos es útil tabular primero los conjuntos.

$$S_0 = \{x \mid F'(x) = 0\} \text{ y } S_1 = \{x \mid F'(x) \text{ no existe}\}$$

Si $c \in S_0 \cup S_1$ y si $(a; b)$ es cualquier intervalo tal que

$$(a; b) \cap (S_0 \cup S_1) = \{c\},$$

o sea, que si c es el único elemento de $S_0 \cup S_1$ que está en $(a; b)$, examinaremos el signo de $F'(x)$ para $x \in (a; c)$ y para $x \in (c; b)$. Haciendo esto para cada $c \in S_0 \cup S_1$ podremos generalmente, determinar los intervalos sobre los que $F(x)$ es creciente y aquellos sobre los que $F(x)$ es decreciente.

Ejemplo 1. Dada la función

$$F = \{(x, y) \mid y = 3x^2 - x^3\}$$

determine los intervalos sobre los que $F(x)$ es creciente y aquellos sobre los que $F(x)$ es decreciente. Grafique F .

Solución. Aquí $F(x) = 3x^2 - x^3$ y $F'(x) = 6x - 3x^2 = 3x(2 - x)$.

Es claro que

$$S_0 = \{x \mid F'(x) = 0\} = \{0, 2\},$$

y que

$$S_1 = \{x \mid F'(x) \text{ no existe}\} = \emptyset.$$

Estas observaciones nos conducen a preguntarnos acerca del signo de $F'(x)$ sobre cada uno de los intervalos $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ y $(2; +\infty)$.

Si $x \in (-\infty; 0)$, entonces $3x < 0$, $2 - x > 0$, y $F'(x) < 0$.

Si $x \in (0; 2)$, entonces $3x > 0$, $2 - x > 0$, y $F'(x) > 0$.

Si $x \in (2; +\infty)$, entonces $3x > 0$, $2 - x < 0$, y $F'(x) < 0$.

Por tanto, $F(x)$ es decreciente sobre $(-\infty; 0]$, creciente sobre $[0; 2]$ y decreciente sobre $[2; +\infty)$. La gráfica de F aparece en la Fig. 4.3. Esta gráfica está construida con ayuda de la tabla siguiente

Si $x =$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
entonces $y =$	4	$\frac{7}{8}$	0	$\frac{5}{8}$	2	$\frac{27}{8}$	4	$\frac{25}{8}$	0

Puesto que $F(x)$ es decreciente sobre $(-\infty; 0]$ y creciente sobre $[0; 2]$, no existe entonces, intervalo abierto que contenga al 0, sobre el que $F(x)$ sea creciente (o decreciente). Por tanto, $F(x)$ no es creciente ni decreciente en 0. Por razones semejantes, $F(x)$ no es creciente ni decreciente en 2.

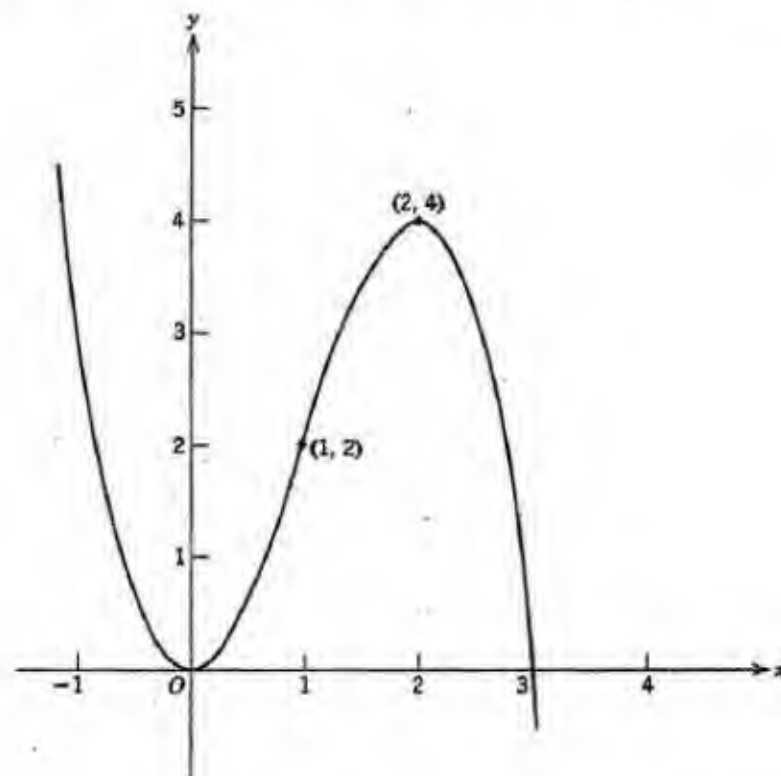


Fig. 4.3

Ejemplo 2. Demuestre que $G(x) = (x-3)^3$ es creciente sobre \mathbb{R} .

Solución. Sea $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$ y $x_2 > x_1$. Entonces

$$x_2 - 3 > x_1 - 3 \text{ y } (x_2 - 3)^3 > (x_1 - 3)^3,$$

de modo que $G(x_2) > G(x_1)$ y en consecuencia $G(x)$ es creciente sobre \mathbb{R} .

Nótese que aunque $G(x)$ es creciente sobre \mathbb{R} , $G'(x) = 3(x-3)^2$ no es positiva sobre \mathbb{R} , ya que $G'(3) = 0$.

La gráfica de G está dada en la Fig. 4.4. Esta gráfica tiene una tangente horizontal en $(3, 0)$, ya que $G'(3) = 0$.

Obsérvese que los teoremas 1 y 2 no permiten determinar si $F(x)$ es creciente o no, o si es decreciente o no en c si $F'(c) = 0$, o si $F'(c)$ no existe. Cuando esto sucede, las definiciones de correspondientes crecientes y decrecientes deben aplicarse directamente (como en el ejemplo 2).

Ejemplo 3. Dada la función

$$H = \{(x, y) \mid y = (x-6)(x-1)^{2/3}, x \in [0; 7]\}$$

determine los intervalos sobre los que $H(x)$ es creciente y aquellos sobre los que $H(x)$ es decreciente. Grafique H .

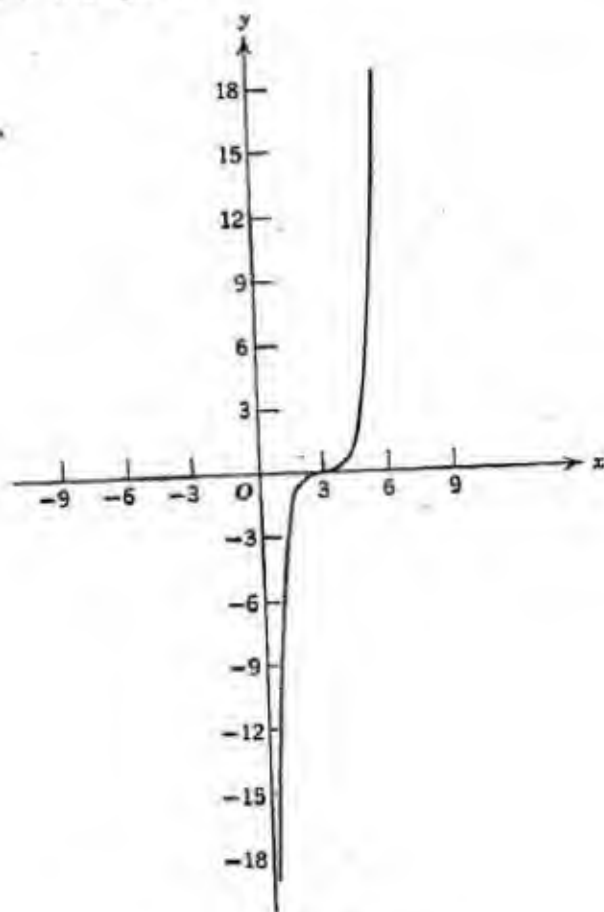


Fig. 4.4

Solución. Mediante la fórmula para la derivada de un producto, hallamos

$$H'(x) = (x-1)^{2/3} + (x-6) \cdot \frac{2}{3}(x-1)^{-1/3} = \frac{5(x-3)}{3(x-1)^{1/3}};$$

Observe que

$$\{x \mid H'(x) = 0\} = \{3\}$$

y

$$\{x \mid H'(x) \text{ no existe}\} = \{1\}.$$

Estas observaciones nos llevan a preguntar acerca del signo de $H'(x)$ sobre cada uno de los intervalos $(0; 1)$, $(1; 3)$ y $(3; 7)$.

Si $x \in (0; 1)$, entonces $x-1 < 0$, $(x-1)^{1/3} < 0$, $x-3 < 0$, y $H'(x) > 0$.

Si $x \in (1; 3)$, entonces $x-1 > 0$, $(x-1)^{1/3} > 0$, $x-3 < 0$, y $H'(x) < 0$.

Si $x \in (3; 7)$, entonces $x-1 > 0$, $(x-1)^{1/3} > 0$, $x-3 > 0$, y $H'(x) > 0$.

Por tanto $H(x)$ es creciente sobre $[0; 1]$, decreciente sobre $[1; 3]$ y creciente sobre $[3; 7]$ como se indica en la Fig. 4.5.

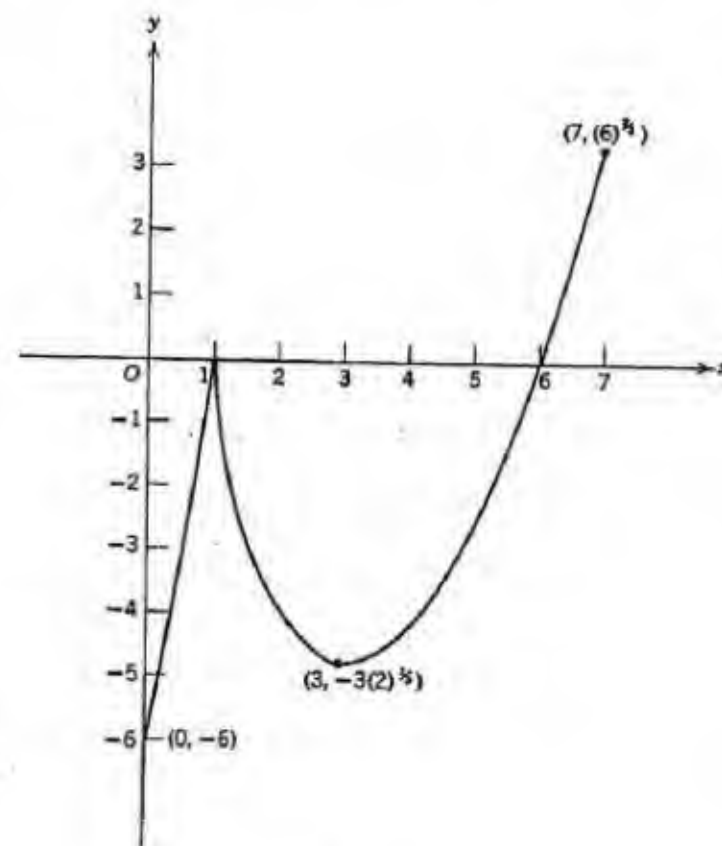


Fig. 4.5

EJERCICIOS

En los ejercicios del 1 al 8 determine los intervalos sobre los que $F(x)$ es creciente y aquellos sobre los que $F(x)$ es decreciente. Grafique F .

1. $F(x) = x^2 - 9$.
2. $F(x) = 6 - x^2$.
3. $F(x) = x^3 - x + 6$.
4. $F(x) = 3x^3 - 5x^2$.
5. $F(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$.
6. $F(x) = 4x^2 + 16x - 7$.
7. $F(x) = \sin x, -2\pi \leq x \leq 2\pi$.
8. $F(x) = \cos x, 0 \leq x \leq 4\pi$.

En los ejercicios 9-12 demuestre que la correspondiente dada es creciente sobre \mathbb{R} , conjunto de los números reales. Grafique la función cuya correspondiente es la que se da

9. $G(x) = 4x - 6$.
10. $H(x) = \frac{1}{2}x^3$.
11. $H(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 2$.
12. $F(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$.

En los ejercicios 13-16 demuestre que la correspondiente dada es decreciente sobre \mathbb{R} . Grafique la función cuya correspondiente es la que se da

13. $G(x) = -3x + 7$.
14. $G(x) = -\frac{1}{2}x^3$.
15. $H(x) = -3x^3 - x + 4$.
16. $F(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$.

17. Demuestre que $G(x) = x/\cos x$ es creciente sobre $(0; \pi/2)$.

18. Determine los valores de x para la función propuesta en el ejemplo 1, que (a) hacen que la razón de cambio de $y = F(x)$ con respecto a x sea igual a 3; (b) hacen que la razón de cambio de y respecto a x sea igual a -9 .

19. Demuestre el teorema 2.
20. Demuestre que $F(x) = \sin x$ es creciente sobre $[-\pi/2; \pi/2]$.
21. Demuestre que $F(x) = \cos x$ es decreciente sobre $[0; \pi]$.
22. Demuestre que $F(x) = \tan x$ es creciente sobre $(-\pi/2; \pi/2)$. (Vea el ejercicio 21, Sec. 3.8 para $D_x \tan x$).
23. Demuestre que $F(x) = \cot x$ es decreciente sobre $(0; \pi)$. (Vea el ejercicio 22, Sec. 3.8 para $D_x \cot x$).

4.2 Valores máximos y mínimos. Considérese la función

$$F = \{(x, y) \mid y = F(x), x \in X\}$$

donde X es un intervalo o una unión de intervalos.

$F(c)$ es un **valor máximo relativo de $F(x)$** si existe un intervalo abierto $(a; b)$ que contenga a c ($a < c < b$), tal que

$$F(c) \geq F(x) \quad (3)$$

cuando $x \in (a; b) \cap X$. Si la desigualdad (3) se cumple para toda $x \in X$, entonces se dice que $F(c)$ es el **valor máximo de $F(x)$** . Es decir que el valor máximo de $F(x)$ es el valor mayor en el rango de F .

$F(c)$ es un **valor mínimo relativo de $F(x)$** si existe un intervalo abierto $(a; b)$ que contenga a c , tal que

$$F(c) \leq F(x) \quad (4)$$

cuando $x \in (a; b) \cap X$. Si la desigualdad (4) se cumple para toda $x \in X$, entonces se dice que $F(c)$ es el **valor mínimo de $F(x)$** . Es decir que el valor mínimo de $F(x)$ es el valor menor en el rango de F .

Por ejemplo dada la función valor absoluto (véase la Fig. 1.3), para la cual $F(x) = |x|$, $F(0)$ es un valor mínimo relativo y al mismo tiempo el valor mínimo. $F(x) = |x|$ no tiene valor máximo puesto que dado cualquier número c , existe un número x tal que $F(x) > F(c)$.

Para la función F cuya gráfica se muestra en la Fig. 1.32 y para la cual $F(x) = 4x - x^2$, $F(2) = 4$ es un valor máximo relativo y también el valor máximo. $F(x)$ no tiene valor mínimo puesto que dado cualquier número c , existe un número x tal que $F(x) < F(c)$.

Para la función raíz cuadrada simple (véase la Fig. 1.21), para la cual $F(x) = \sqrt{x}$, $F(0) = 0$ es un valor mínimo relativo ya que para cualquier intervalo $(a; b)$ que contenga al 0, es evidente que

$$F(0) \leq F(x) \text{ para } x \in (a; b) \cap [0; +\infty).$$

$F(0)$ es también el valor mínimo de $F(x)$, puesto que $F(0) \leq F(x)$ para $x \in [0; +\infty)$. $F(x) = \sqrt{x}$ no tiene valor máximo.

Para la función G cuya gráfica se muestra en la Fig. 1.27 y tal que $G(x) = x^2 - 1$, no existe valor máximo. $G(-1) = 0$ es un valor mínimo relativo y también el valor mínimo.

Para la función F del ejemplo 1 de la Sec. 4.1 (véase la Fig. 4.3), $F(0)$ es un valor mínimo relativo.

Para la función G del ejemplo 2 de la Sec. 4.1 (véase la Fig. 4.4), $G(x)$ no tiene valor máximo relativo, ni valor mínimo relativo, ni valor máximo ni valor mínimo.

Para la función H del ejemplo 3 de la Sec. 4.1 (véase la Fig. 4.5), $H(0)$ y $H(3)$ son valores mínimos relativos, $H(0) = -6$ es el valor mínimo, $H(1)$ y $H(7)$ son valores máximos relativos y $H(7) = 6^{2/3}$ es el valor máximo.

Los **valores extremos de $F(x)$** son los valores máximos relativos y los valores mínimos relativos de $F(x)$.

Por ejemplo: para la función H del ejemplo 3 de la Sec. 4.1 (véase la Fig. 4.5), los valores extremos de $H(x)$ son:

$$H(0) = -6, \quad H(1) = 0, \quad H(3) = -3(2)^{2/3}, \quad H(7) = 6^{2/3}.$$

Para una función F cuyo dominio es el intervalo S , un valor $c \in S$ será un **valor crítico de x para $F(x)$** si

- (i) $F'(c) = 0$, o
- (ii) $F'(c)$ no existe o
- (iii) c es un extremo del intervalo S .

Respecto a (iii) debemos hacer las siguientes observaciones: si $S = [a; b]$, entonces a y b son valores críticos. Si $S = [a; b)$ o si $S = [a; +\infty)$, entonces a es un valor crítico; y si $S = (a; b]$ o si $S = (-\infty; b]$, entonces b es un valor crítico. Si $S = (a; b)$ ni a ni b son valores críticos (los valores extremos de un intervalo abierto no son elementos del intervalo).

Dada una función F , los valores máximos relativos y los valores mínimos relativos de $F(x)$, y los valores críticos de x para los que $F'(x) = 0$ se relacionan en la forma indicada en los teoremas 3, 4 y 5.

Teorema 3. Si c es un punto interior del dominio de la función F , si $F(c)$ es un valor máximo relativo de $F(x)$ y si existe $F'(c)$, entonces $F'(c) = 0$.

Demostración. Puesto que $F(x)$ tiene un valor máximo relativo en c , existe entonces un número $k > 0$, tal que $F(x)$ está definida sobre el intervalo abierto $(c-k; c+k)$ y

$$F(x) \leq F(c) \text{ cuando } x \in (c-k; c+k).$$

Por tanto

$$F(c+h) \leq F(c) \text{ cuando } h \in (-k; k).$$

Ahora bien, para toda $h \in (0; k)$,

$$\frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq 0.$$

Por tanto

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq 0;$$

así que

$$F'_+(c) \leq 0. \quad (5)$$

Similarmente, para toda $h \in (-k; 0)$,

$$\frac{F(c+h) - F(c)}{h} \geq 0;$$

y

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \geq 0;$$

de modo que

$$F'_-(c) \geq 0. \quad (6)$$

Puesto que por hipótesis existe $F'(c)$, sabemos que las derivadas de $F(x)$ por la izquierda y por la derecha, existen en c y son iguales a $F'(c)$. Esto, junto con (5) y (6) necesita que

$$0 \leq F'(c) \leq 0,$$

de donde concluimos que

$$F'(c) = 0.$$

Así queda demostrado el teorema 3. ■

Teorema 4. Si c es un punto interior del dominio de la función F , si $F(c)$ es un valor mínimo relativo de $F(x)$ y si existe $F'(c)$, entonces $F'(c) = 0$.

La demostración del teorema 4 es similar a la del teorema 3 y se pide al estudiante que la desarrolle en el ejercicio 23 de esta sección.

Los teoremas 3 y 4 se pueden combinar para formar el Teorema 5.

Teorema 5. Si c es un punto interior del dominio de la función F , si $F(c)$ es un valor extremo de $F(x)$ y si $F'(c)$ existe, entonces $F'(c) = 0$.

Debe observarse que el teorema 5 no exige que $F(c)$ sea un valor extremo para que $F'(c) = 0$. $F'(c)$ puede ser igual a cero sin que $F(c)$ sea un valor extremo. Por ejemplo, considérese la función de 3er grado $G = \{(x, y) | y =$

$(x-3)^3$, cuya gráfica se da en la Fig. 4.4 y para la cual $G(x) = (x-3)^3$. Aquí $G'(x) = 3(x-3)^2$ y $G'(3) = 0$. Sin embargo, $G(3)$ no es un valor máximo relativo ni un valor mínimo relativo.

Según el teorema 5, se sigue que un valor extremo de $F(x)$ puede presentarse sólo en un valor crítico de x . Si F es continua sobre un intervalo cerrado, determinaremos los valores máximos y mínimos de $F(x)$, encontrando los valores críticos de x y sus correspondientes valores de $F(x)$. El mayor de estos valores será el valor máximo de $F(x)$, y el más pequeño de ellos será el valor mínimo de $F(x)$.

Ejemplo 1. Halle los valores críticos de x , el valor máximo de $H(x)$ y el valor mínimo de $H(x)$, para la función H dada por

$$H(x) = (x-6)(x-1)^{2/3}, \quad x \in [0; 7],$$

Solución. En este caso

$$H'(x) = \frac{5(x-3)}{3(x-1)^{1/3}}, \quad x \in [0; 1) \cup (1; 7].$$

Así que

$$\{x | H'(x) = 0\} = \{3\},$$

y

$$\{x | H'(x) \text{ no existe}\} = \{1\}.$$

Los valores extremos del dominio son 0 y 7. Por tanto los valores críticos de x para $H(x)$ son

$$0, \quad 1, \quad 3, \quad \text{y} \quad 7,$$

y los valores correspondientes de $H(x)$ son

$$\begin{aligned} H(0) &= -6, & H(3) &= -3(2)^{2/3} \doteq -4.7,^* \\ H(1) &= 0, & H(7) &= 6^{2/3} \doteq 3.3. \end{aligned}$$

Por tanto, $H(0) = -6$ es el valor mínimo de $H(x)$ y $H(7) = 6^{2/3}$ es el valor máximo para $H(x)$.

La gráfica de H aparece en la Fig. 4.5.

Ejemplo 2. Se desea construir una caja sin tapa y de base cuadrada, recortando cuadrados iguales de las esquinas de una pieza rectangular de cartón de 8 dm por 5 dm y doblando hacia arriba el cartón para formar los lados y los extremos de la caja. Halle las dimensiones y el volumen de la caja de volumen máximo que se pueda construir de este modo.

Solución. Sea x la longitud en decímetros de cada lado del cuadrado cortado en las esquinas (Fig. 4.6) y sea $V(x)$ el volumen en dm^3 . Entonces

* Usaremos el símbolo \doteq para significar "aproximadamente igual a".

$$V(x) = x(8 - 2x)(5 - 2x) = 40x - 26x^2 + 4x^3, \quad x \in [0; \frac{5}{2}].$$

Luego $V'(x) = 40 - 52x + 12x^2 = 4(3x - 10)(x - 1), \quad x \in [0; \frac{5}{2}].$

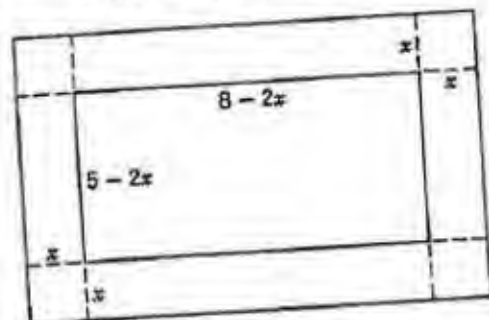


Fig. 4.6

Notamos que

$$\{x \mid V'(x) = 0 \text{ y } x \in [0; \frac{5}{2}]\} = \{1\}.$$

Por tanto, los valores críticos de x para $V(x)$ son

$$0, \quad 1, \quad \text{y} \quad \frac{5}{2},$$

y

$$V(0) = 0, \quad V(1) = 18, \quad V(\frac{5}{2}) = 0.$$

De ahí que el valor máximo de $V(x)$ es $V(1) = 18 \text{ dm}^3$. Para obtener este

volumen máximo la caja debe tener las dimensiones: 1 dm, 3 dm y 6 dm.

Si dada una función F , deseamos determinar los valores máximos relativos de $F(x)$, debemos examinar el comportamiento de $F(x)$ cerca de los valores críticos de x . Podemos hacerlo determinando los intervalos sobre los que $F(x)$ es creciente y los intervalos sobre los que es decreciente. Si F es continua sobre $[a; b]$ y si c es un valor crítico de x que sea un punto interior de $[a; b]$, entonces el teorema 6 enuncia las condiciones que permiten determinar si $F(c)$ es un valor máximo relativo, un valor mínimo relativo o ninguno de los dos. Este teorema es conocido como la primera prueba para valores máximo y mínimo relativos.

Teorema 6. Siendo F una función continua sobre un intervalo S , si c es un punto interior de S , tal que $F'(c) = 0$ ó $F'(c)$ no existe y

(i) Si existe un intervalo $(a; b)$ tal que $c \in (a; b) \subseteq S$, para el cual $F'(x) > 0$ cuando $x \in (a; c)$ y $F'(x) < 0$ cuando $x \in (c; b)$, entonces $F(c)$ es un valor máximo relativo de $F(x)$;

(ii) si existe un intervalo $(a; b)$ tal que $c \in (a; b) \subseteq S$, para el cual $F'(x) < 0$ cuando $x \in (a; c)$ y $F'(x) > 0$ cuando $x \in (c; b)$, entonces $F(c)$ es un valor mínimo relativo de $F(x)$;

(iii) Si existe un intervalo $(a; b)$ tal que $c \in (a; b) \subseteq S$, para el cual $F'(x) > 0$ cuando $x \in (a; c)$ y $F'(x) > 0$ cuando $x \in (c; b)$, o para el cual $F'(x) < 0$ cuando $x \in (a; c)$ y $F'(x) < 0$ cuando $x \in (c; b)$, entonces $F(c)$ no es un valor máximo relativo ni un valor mínimo relativo de $F(x)$.

Demostración. (i) Puesto que $F'(x) > 0$ cuando $x \in (a; c)$ y puesto que F es continua sobre $(a; c]$, se sigue que $F(x)$ es creciente sobre $(a; c]$. Por tanto,

$$F(x) \leq F(c) \quad \text{cuando } x \in (a; c].$$

Ya que $F'(x) < 0$ cuando $x \in (c; b)$ y puesto que F es continua sobre $[c; b)$, se sigue que $F(x)$ es decreciente sobre $[c; b)$. Por tanto,

$$F(x) \leq F(c) \quad \text{cuando } x \in [c; b).$$

En consecuencia

$$F(x) \leq F(c) \quad \text{cuando } x \in (a; b),$$

y $F(c)$ es un valor máximo relativo de $F(x)$.

(ii) La demostración de (ii) es semejante a la de (i) y se pide al estudiante que la desarrolle en el ejercicio 24 de esta sección.

(iii) Si $F'(x) > 0$ cuando $x \in (a; c)$ y $F'(x) > 0$ cuando $x \in (c; b)$, entonces, ya que F es continua en c , se sigue que $F(x)$ es creciente sobre $(a; c]$ y sobre $[c; b)$; por tanto, es creciente sobre $(a; b)$. En forma semejante vemos que si $F'(x) < 0$ sobre $(a; c)$ y $F'(x) < 0$ sobre $(c; b)$, entonces, ya que F es continua en c , $F(x)$ es decreciente sobre $(a; b)$. En consecuencia $F(c)$ no puede ser un valor máximo relativo ni un valor mínimo relativo de $F(x)$. ■

Ejemplo 3. Halle los valores máximos relativos y los valores mínimos relativos de

$$F(x) = \frac{1}{8}(x^4 - 8x^2).$$

Grafique la función F .

Solución. En este caso F es continua sobre \mathbb{R} y

$$F'(x) = \frac{1}{8}(4x^3 - 16x) = \frac{1}{2}x(x + 2)(x - 2)$$

existe sobre \mathbb{R} . Además

$$\{x \mid F'(x) = 0\} = \{-2, 0, 2\}.$$

Para poder aplicar el teorema 6 determinemos el signo de $F'(x)$ sobre cada uno de los intervalos $(-\infty; -2)$, $(-2; 0)$ y $(2; +\infty)$.

(i) Si $x \in (-\infty; -2)$, entonces $x < 0$, $(x + 2) < 0$, $(x - 2) < 0$, y $F'(x) < 0$.

(ii) Si $x \in (-2; 0)$, entonces $x < 0$, $(x + 2) > 0$, $(x - 2) < 0$, y $F'(x) > 0$.

Por tanto, según el teorema 6 (ii), $F(-2) = -2$ es un valor mínimo relativo de $F(x)$.

(iii) Si $x \in (0; 2)$, entonces $x > 0$, $(x + 2) > 0$, $(x - 2) < 0$, y $F'(x) < 0$.

De (ii), (iii) y el teorema 6 (i) se sigue que $F(0) = 0$ es un valor máximo relativo de $F(x)$.

(iv) Si $x \in (2; +\infty)$, entonces $x > 0$, $(x + 2) > 0$, $(x - 2) > 0$, y $F'(x) > 0$.

De (iii), (iv) y el teorema 6 (ii) se sigue que $F(2) = -2$ es un valor mínimo relativo de $F(x)$.

La gráfica de F está dada en la Fig. 4.7.

Ejemplo 4. Halle los valores máximos relativos y los valores mínimos relativos de

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 5.$$

Grafique la función F .

Solución. Aquí F es continua sobre \mathbb{R} y

$$F'(x) = x^3 - 3x + 2 = (x+2)(x-1)^2$$

existe sobre \mathbb{R} . Puesto que

$$\{x \mid F'(x) = 0\} = \{-2, 1\},$$

para aplicar el teorema 6 determinemos el signo de $F'(x)$ sobre cada uno de los intervalos $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ y $(1; +\infty)$.

- (i) Si $x \in (-\infty; -2)$, entonces $(x+2) < 0$, $(x-1)^2 > 0$, y $F'(x) < 0$.
 (ii) Si $x \in (-2; 1)$, entonces $(x+2) > 0$, $(x-1)^2 > 0$, y $F'(x) > 0$.

Por tanto, según el teorema 6 (ii), $F(-2) = -1$ es un valor mínimo relativo de $F(x)$.

- (iii) Si $x \in (1; +\infty)$, entonces $(x+2) > 0$, $(x-1)^2 > 0$, y $F'(x) > 0$.

De (ii), (iii) y el teorema 6 (iii) se concluye que $F(1) = \frac{23}{4}$ no es un valor máximo relativo ni un valor mínimo relativo de $F(x)$.

La gráfica de F está dada en la Fig. 4.8.

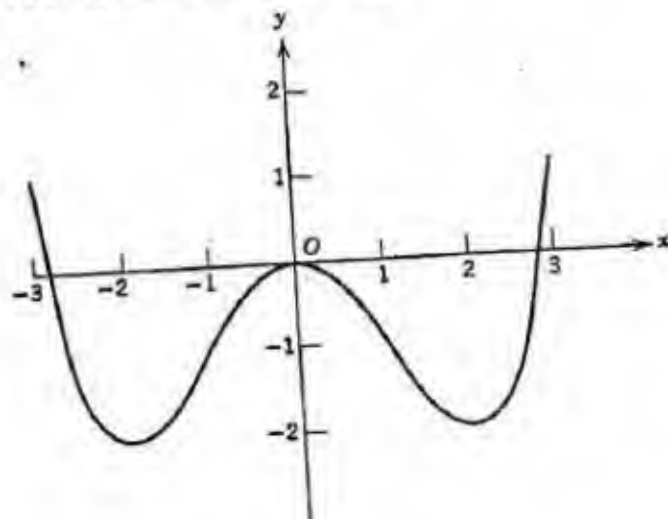


Fig. 4.7

Ejemplo 5. Halle los valores máximos relativos y los valores mínimos relativos de

$$F(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3, \quad x \in [-3; 3].$$

Grafique la función F .

Solución. Aquí F es continua sobre su dominio y

$$F'(x) = 4 - x^2 = (2+x)(2-x)$$

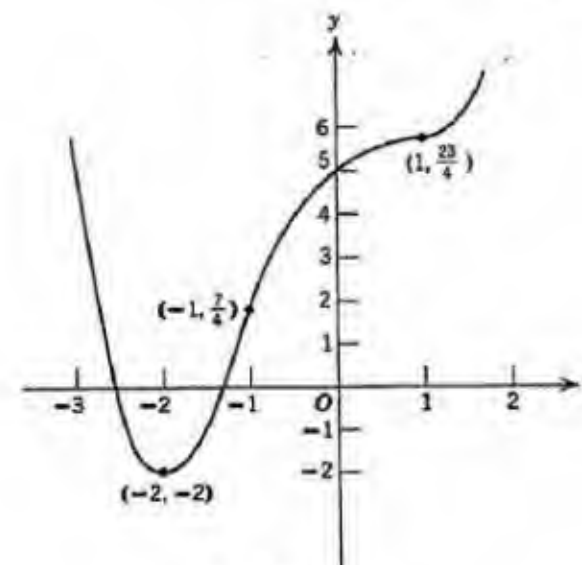


Fig. 4.8

existe sobre dicho dominio. Observemos que

$$\{x \mid F'(x) = 0\} = \{-2, 2\};$$

para aplicar el teorema 6 determinemos el signo de $F'(x)$ sobre cada uno de los intervalos $(-3; -2)$, $(-2; 2)$ y $(2; 3)$.

- (i) Si $x \in (-3; -2)$, entonces $(2+x) < 0$, $(2-x) > 0$, y $F'(x) < 0$.

Puesto que $F'(x) < 0$ sobre $(-3; -2)$ y puesto que F es continua sobre $[-3; -2]$, se concluye que $F(x)$ es decreciente sobre $[-3; -2]$. Por tanto

$$F(-3) \geq F(x) \text{ cuando } x \in [-3; -2],$$

y $F(-3) = -3$, es un valor máximo relativo de $F(x)$.

- (ii) Si $x \in (-2; 2)$, entonces $(2+x) > 0$, $(2-x) > 0$ y $F'(x) > 0$.

De (i), (ii) y el teorema 6 (ii) se sigue que $F(-2) = -\frac{16}{3}$ es un valor mínimo relativo de $F(x)$.

- (iii) Si $x \in (2; 3)$, entonces $(2+x) > 0$, $(2-x) < 0$ y $F'(x) < 0$.

De (ii), (iii) y el teorema 6 (i) se sigue que $F(2) = \frac{16}{3}$ es un valor máximo relativo de $F(x)$.

Puesto que $F'(x) < 0$ sobre $(2; 3)$ y puesto que F es continua sobre $(2; 3]$, se concluye que $F(x)$ es decreciente sobre $(2; 3]$. Por tanto

$$F(3) \leq F(x) \text{ cuando } x \in (2; 3],$$

y $F(3) = 3$ es un valor mínimo relativo de $F(x)$.

La gráfica de F está dada en la Fig. 4.9.

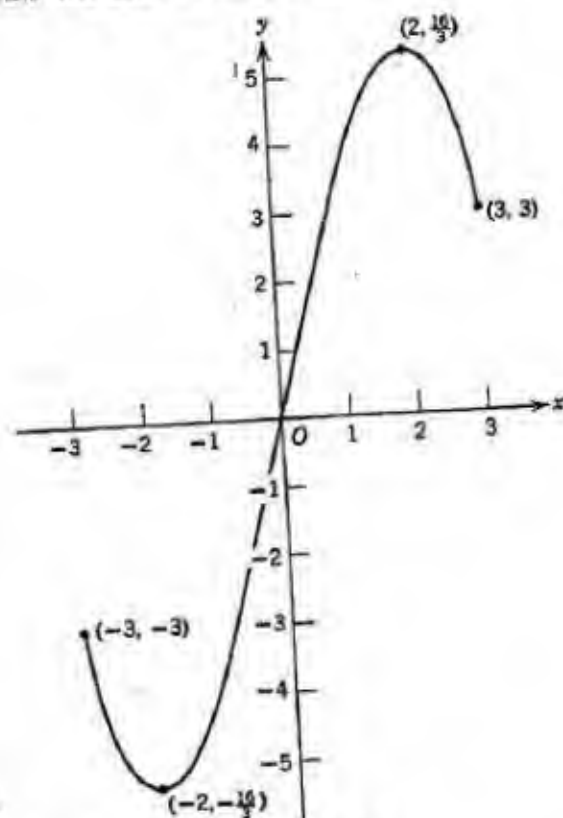


Fig. 4.9

EJERCICIOS

- Encuentre dos números no negativos cuya suma sea 10 y cuyo producto tenga el mayor valor posible. Exprese el dominio de la función que usó en el ejercicio.
- Halle el volumen de la caja abierta de base cuadrada y volumen máximo que se pueda hacer a partir de una pieza cuadrada de hojalata de 18 cms. de lado, cortando cuadrados iguales de las esquinas y doblando los lados hacia arriba.
- Se desea cercar un lote rectangular que tenga 4,000 dm² de superficie, con uno de sus lados a lo largo de un río recto. Si no se necesita cerca para el lado que da al río, ¿qué dimensiones requieren la menor cantidad de cerca?
- Se desea construir una caja sin tapa y de base cuadrada, disponiendo de 300 dm² de material. Halle las dimensiones para que el volumen sea máximo.
- Halle las dimensiones y el volumen del cono circular recto de volumen máximo que pueda ser inscrito en una esfera de radio a .
- Halle las dimensiones y el volumen del cilindro circular recto de volumen máximo que pueda ser inscrito en una esfera de radio a .
- La resistencia de una viga de sección transversal rectangular varía directamente con la anchura y con el cubo de la altura. Encuentre las dimensiones de la viga de mayor resistencia que se pueda obtener de un tronco circular de 10 cms. de diámetro.
- Halle las dimensiones del rectángulo de mayor área que se pueda inscribir en un círculo de radio r .

En cada uno de los ejercicios del 9 al 16 se da una función F sobre un intervalo cerrado $[a; b]$. Encuentre todos los valores críticos de x para $F(x)$ y el valor máximo y el valor mínimo de $F(x)$.

- $F(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3, x \in [-5; 5]$.
- $F(x) = (x-1)^{2/3} + 3, x \in [0; 9]$.
- $F(x) = (x-1)^{2/3}(x+1)^3, x \in [-1; 1]$.
- $F(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}; x \in [0; 2]$.
- $F(x) = \sin x, x \in [-\pi/2; \pi]$.
- $F(x) = \sin x + \cos x, x \in [0; 2\pi]$.
- $F(x) = x^4 + 2x^3 - 3, x \in [-2; 2]$.
- $F(x) = \sqrt{x}(x-5)^{1/3}, x \in [0; 6]$.

En los ejercicios del 17 al 22 halle los valores máximos relativos y mínimos relativos de $F(x)$. Grafique $y = F(x)$.

- $F(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.
- $F(x) = x^4 - 4x^3$.
- $F(x) = x^4 - 6x^2$.
- $F(x) = x^2 + (8/x)$.
- $F(x) = \sin^3 x, x \in [0; 2\pi]$. Además halle los valores máximo y mínimo de $F(x)$.
- $F(x) = \sin 2x, x \in [-\pi; \pi/2]$. Además halle los valores máximo y mínimo de $F(x)$.

23. Demuestre el teorema 4.

24. Demuestre el teorema 6(ii).

En los ejercicios del 25 al 28 halle los valores máximos relativos y mínimos relativos, y el máximo y el mínimo valor de $F(x)$. Construya la gráfica de F .

- $F(x) = x^3 - 3x, x \in [-2; 2]$.
- $F(x) = \frac{1}{2}x^2(x-4)^{1/3}, x \in [-4; 5]$.
- $F(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 1, x \in [0; 4]$.
- $F(x) = x^{2/3}(x-1), x \in [-8; 8]$.

4.3 Concavidad y puntos de inflexión. La gráfica de una función F es cóncava hacia arriba sobre un intervalo $S \subseteq D_F$ si $F'(x)$ es creciente sobre S . La gráfica de una función F es cóncava hacia abajo sobre un intervalo $S \subseteq D_F$ si $F'(x)$ es decreciente sobre S .

Para determinar los intervalos sobre los que la gráfica de F es cóncava hacia arriba o hacia abajo usaremos los teoremas 7 y 8.

Teorema 7. Si F es una función F tal que $F''(x) > 0$ cuando $x \in (a; b)$, entonces la gráfica de F es cóncava hacia arriba sobre $(a; b)$.

Demostración. La hipótesis de que $F''(x) > 0$ cuando $x \in (a; b)$, necesita que $F'(x)$ sea creciente sobre $(a; b)$, según el teorema 1. [Hemos usado el hecho de que $F''(x) = D_x F'(x)$]. En consecuencia la gráfica de F es cóncava hacia arriba sobre $(a; b)$. ■

Teorema 8. Si F es una función tal que $F''(x) < 0$ cuando $x \in (a; b)$, entonces la gráfica de F es cóncava hacia abajo sobre $(a; b)$.

Demostración. Según el teorema 2, se sigue directamente de la hipótesis que $F'(x)$ es decreciente sobre $(a; b)$ y en consecuencia, que la gráfica de F es cóncava hacia abajo sobre $(a; b)$. ■

Un punto $(c, F(c))$ es un **punto de inflexión** de la gráfica de F si existe un intervalo $(a; b)$, en que $c \in (a; b)$, tal que la gráfica de F sea cóncava hacia arriba sobre $(a; c)$ y cóncava hacia abajo sobre $(c; b)$, o viceversa.

Teorema 9. Si $(c, F(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de F y si existe $F''(c)$, entonces $F''(c) = 0$.

Demostración. Como $(c, F(c))$ es un punto de inflexión, existe entonces un intervalo $(a; b)$ que contenga a c como punto interior y tal que:

- (i) $F'(x)$ es creciente sobre $(a; c)$ y decreciente sobre $(c; b)$ o bien
- (ii) $F'(x)$ es decreciente sobre $(a; c)$ y creciente sobre $(c; b)$.

Supóngase que es el caso (i). Puesto que existe $F''(c)$ sabemos que F' será continua en c y por tanto, sabemos que $F'(x)$ es creciente sobre $(a; c]$ y decreciente sobre $[c; b)$. Luego $F'(c)$ es un valor máximo relativo de $F'(x)$ y entonces según el teorema 3

$$F''(c) = 0.$$

Si es el caso (ii), la demostración es semejante a la de (i), siendo en ese caso $F'(c)$ un valor mínimo relativo de $F'(x)$. ■

Teorema 10. Si F es una función continua sobre un intervalo S , si c es un punto interior de S , tal que $F''(c) = 0$ ó $F''(c)$ no existe y

- (i) si existe un intervalo $(a; b)$, siendo $c \in (a; b) \subseteq S$, tal que $F''(x) > 0$ cuando $x \in (a; c)$ y $F''(x) < 0$ cuando $x \in (c; b)$, entonces $(c, F(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de F ;
- (ii) si existe un intervalo $(a; b)$, siendo $c \in (a; b) \subseteq S$, tal que $F''(x) < 0$ cuando $x \in (a; c)$ y $F''(x) > 0$ cuando $x \in (c; b)$, entonces $(c, F(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de F ;
- (iii) si existe un intervalo $(a; b)$, siendo $c \in (a; b) \subseteq S$, tal que $F''(x) < 0$ cuando $x \in (a; c)$ y $F''(x) < 0$ cuando $x \in (c; b)$ o tal que $F''(x) > 0$ cuando $x \in (a; c)$ y $F''(x) > 0$ cuando $x \in (c; b)$, entonces $(c, F(c))$ no es un punto de inflexión de la gráfica de F .

La demostración del teorema 10 es parecida a la del Teorema 6, con F' en vez de F y F'' en vez de F' .

Los siguientes son ejemplos de la determinación de puntos de inflexión.

Para la función F del ejemplo 1 de la Sec. 4.1, dada por $F(x) = 3x^2 - x^3$, tenemos que

$$F'(x) = 6x - 3x^2 = 3x(2 - x)$$

y

$$F''(x) = 6 - 6x = 6(1 - x),$$

existiendo ambas sobre \mathbb{R} . Ahora bien

$$\{x \mid F''(x) = 0\} = \{1\},$$

y $F(1) = 2$. Por tanto, si la gráfica de F tiene un punto de inflexión, éste será $(1, 2)$. Consideremos el signo de $F''(x)$ sobre cada uno de los intervalos $(-\infty; 1)$ y $(1; +\infty)$.

Si $x \in (-\infty; 1)$, entonces $(1 - x) > 0$ y $F''(x) > 0$.

Si $x \in (1; +\infty)$, entonces $(1 - x) < 0$ y $F''(x) < 0$.

Por tanto, $(1, 2)$ es un punto de inflexión de la gráfica de F , según el teorema 10(ii). Esta gráfica (Fig. 4.3) es cóncava hacia arriba sobre $(-\infty; 1)$ y cóncava hacia abajo sobre $(1; +\infty)$.

Para la función H del ejemplo 2 de la Sec. 4.1, dada por $H(x) = (x - 3)^3$, tenemos que

$$H'(x) = 3(x - 3)^2 \text{ y } H''(x) = 6(x - 3),$$

existiendo ambas sobre \mathbb{R} . Ahora bien

$$\{x \mid H''(x) = 0\} = \{3\},$$

y $H(3) = 0$. Por tanto, si la gráfica de H tiene un punto de inflexión éste será $(3, 0)$. Determinemos el signo de $H''(x)$ sobre cada uno de los intervalos $(-\infty; 3)$ y $(3; +\infty)$.

Si $x \in (-\infty; 3)$, entonces $(x - 3) < 0$ y $H''(x) < 0$.

Si $x \in (3; +\infty)$, entonces $(x - 3) > 0$ y $H''(x) > 0$.

Por tanto, $(3, 0)$ es un punto de inflexión de la gráfica de H según el teorema 10(i). Esta gráfica (Fig. 4.4) es cóncava hacia abajo sobre $(-\infty; 3)$ y cóncava hacia arriba sobre $(3; +\infty)$.

Ejemplo 1. Encuentre los puntos de inflexión de la gráfica de F , si

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 2x + 5.$$

Solución. Aquí $F'(x) = x^3 - 3x + 2$, y

$$F''(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1),$$

que existe sobre \mathbb{R} . Observamos que

$$\{x \mid F''(x) = 0\} = \{-1, 1\},$$

y los posibles puntos de inflexión son $(-1, \frac{7}{4})$ y $(1, \frac{23}{4})$. Determinemos el signo de $F''(x)$ sobre cada uno de los intervalos $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ y $(1; +\infty)$.

- (i) Si $x \in (-\infty; -1)$, entonces $(x - 1) < 0$, $(x + 1) < 0$, y $F''(x) > 0$.
- (ii) Si $x \in (-1; 1)$, entonces $(x - 1) < 0$, $(x + 1) > 0$, y $F''(x) < 0$.
- (iii) Si $x \in (1; +\infty)$, entonces $(x - 1) > 0$, $(x + 1) > 0$, y $F''(x) > 0$.

Por tanto, según (i), (ii) y el teorema 10(ii), $(-1, \frac{7}{4})$ es un punto de inflexión. Según (ii), (iii) y el teorema 10(i), $(1, \frac{23}{4})$ es un punto de inflexión.

La gráfica de F (Fig. 4.8) es cóncava hacia arriba sobre $(-\infty; -1)$, cóncava hacia abajo sobre $(-1; 1)$ y cóncava hacia arriba sobre $(1; +\infty)$.

Debe notarse que si existe $F''(c)$, entonces el que $F''(c) = 0$ es una condición necesaria pero no suficiente para que $(c, F(c))$ sea un punto de inflexión de la gráfica de F . El hecho de que $F''(c)$ pueda ser cero sin que $(c, F(c))$ sea un punto de inflexión queda demostrado con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. Si $F(x) = x^4$, halle los puntos de inflexión de la gráfica de F y construya dicha gráfica.

Solución. Aquí $F'(x) = 4x^3$, $F''(x) = 12x^2$, y $\{x | F''(x) = 0\} = \{0\}$, existiendo $F''(x)$ sobre \mathbb{R} . Deseamos conocer en el signo de $F''(x)$ sobre cada uno de los intervalos $(-\infty; 0)$ y $(0; +\infty)$.

Si $x \in (-\infty; 0)$, entonces $F''(x) > 0$; si $x \in (0; +\infty)$, entonces $F''(x) > 0$.

En consecuencia, según el teorema 10(iii) la gráfica de F no tiene puntos de inflexión. Esta gráfica (Fig. 4.10) es cóncava hacia arriba sobre $(-\infty; 0)$ y también sobre $(0; +\infty)$.

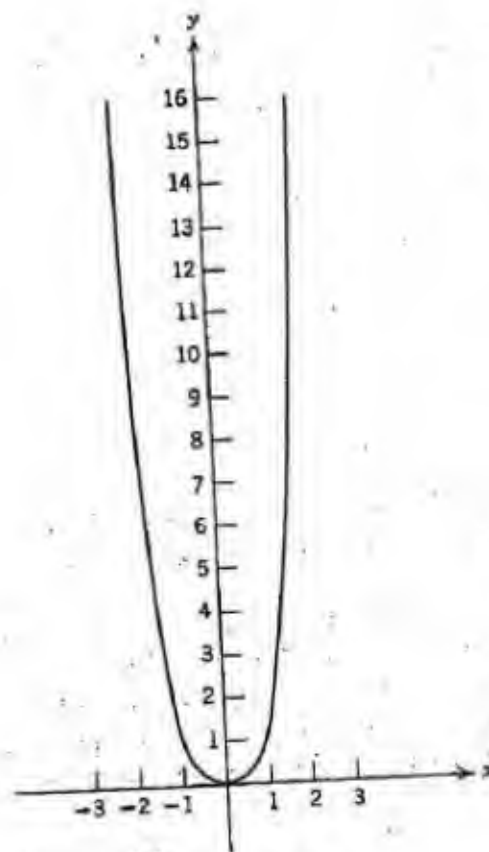


Fig. 4.10

Del teorema 9 se sigue que si $(c, F(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de F , entonces $F''(c) = 0$ ó bien no existe $F''(c)$. Luego, para encontrar los puntos de inflexión de la gráfica de F , analizamos según el teorema 10, cada punto $(c, F(c))$ para el cual $F''(c) = 0$ ó $F''(c)$ no exista.

Ejemplo 3. Encuentre los puntos de inflexión de la gráfica de F si

$$F(x) = (x-2)^{3/2} + 1,$$

y construya dicha gráfica.

Solución. Aquí

$$F'(x) = \frac{1}{3(x-2)^{1/2}},$$

$$F''(x) = -\frac{2}{9(x-2)^{3/2}},$$

$$\{x | F''(x) = 0\} = \emptyset,$$

$$\{x | F''(x) \text{ no existe}\} = \{2\}.$$

Por tanto, $(2, 1)$ es el único punto de inflexión posible. Considérese el signo de $F''(x)$ en cada uno de los intervalos $(-\infty; 2)$ y $(2; +\infty)$.

Si $x \in (-\infty; 2)$, entonces $(x-2) < 0$, y $F''(x) > 0$.

Si $x \in (2; +\infty)$, entonces $(x-2) > 0$, y $F''(x) < 0$.

De ahí que según el teorema 10(ii), $(2, 1)$ es un punto de inflexión de la gráfica de F y ésta gráfica (Fig. 4.11) es cóncava hacia arriba sobre $(-\infty; 2)$ y cóncava hacia abajo sobre $(2; +\infty)$.

Si c es un valor crítico de x para $F(x)$, tal que $F'(c) = 0$, a menudo se puede usar la 2a. derivada para determinar si $F(c)$ es un valor máximo relativo o un valor mínimo relativo de $F(x)$. El procedimiento es el señalado en el Teorema 11. Nos referiremos a este Teorema como la segunda prueba para valores máximos relativos y mínimos relativos.

Teorema 11. Sea F una función cuyo dominio es X . Si $F'(x)$ está definida para $x \in (a; b) \subseteq X$, si $F'(x) = 0$ para $c \in (a; b)$ y

(i) si $F''(c) < 0$, entonces $F(c)$ es un valor máximo relativo de $F(x)$;

(ii) si $F''(c) > 0$, entonces $F(c)$ es un valor mínimo relativo de $F(x)$.

Demostración. (i) Por hipótesis

$$F''(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F'(c+h) - F'(c)}{h} = b < 0.$$

Por tanto (según ejercicio 31 de la Sec. 2.1), existe un número $k > 0$, tal que $(c-k; c+k) \subseteq (a; b)$ con la propiedad de que

$$\frac{F'(c+h) - F'(c)}{h} < 0 \text{ para } h \in (-k; 0) \cup (0; k).$$

De donde

$$F'(c+h) - F'(c) > 0 \text{ cuando } -k < h < 0$$

y

$$F'(c+h) - F'(c) < 0 \text{ cuando } 0 < h < k,$$

o bien, ya que

$$F'(c) = 0,$$

$$F'(c+h) > 0 \text{ cuando } -k < h < 0$$

y

$$F'(c+h) < 0 \text{ cuando } 0 < h < k.$$

Se concluye por tanto que $F(c)$ es un valor máximo relativo de $F(x)$, según el Teorema 6(i).

(ii) La demostración es semejante a la de (i) y se pide al estudiante que la desarrolle en el ejercicio 29 de esta sección. ■

Ejemplo 4. Mediante la segunda prueba para valores máximos y mínimos relativos (Teorema 11), halle los valores máximos y mínimos relativos de

$$F(x) = x^4 - 2x^2 + 1.$$

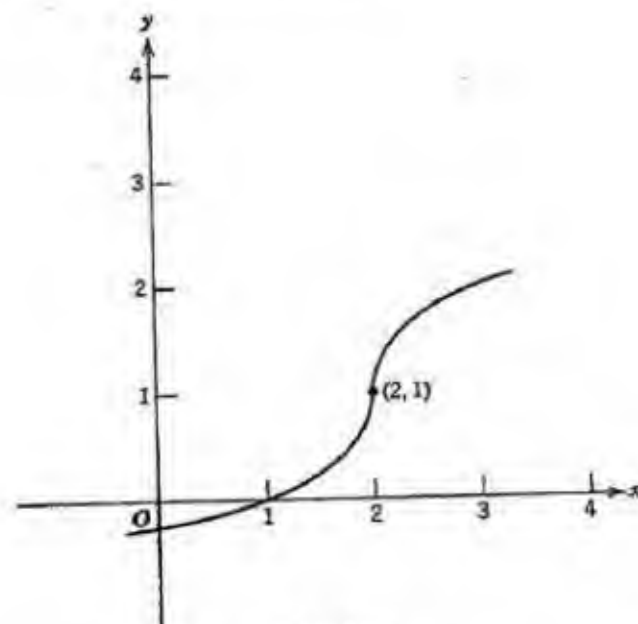


Fig. 4.11

Halle los puntos de inflexión de la gráfica de F y construya dicha gráfica.

Solución: Tenemos que

$$F'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1),$$

$$F''(x) = 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1) = 12\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Tanto $F'(x)$ como $F''(x)$ existen sobre \mathbb{R} . Observe que

$$\{x \mid F'(x) = 0\} = \{-1, 0, 1\}.$$

Por tanto, los únicos valores críticos de x para $F(x)$ son $-1, 0, 1$. Para aplicar

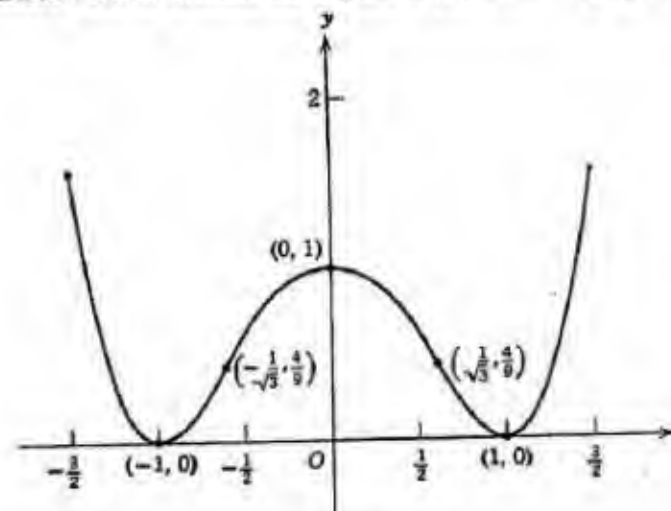


Fig. 4.12

el teorema 11, determinemos los signos de $F''(-1)$, $F''(0)$ y $F''(1)$. Encontramos que

$$F''(-1) > 0, \quad F''(0) < 0, \quad F''(1) > 0.$$

Por lo que según el teorema 11, $F(-1) = 0$ y $F(1) = 0$ son valores mínimos relativos de $F(x)$ y $F(0) = 1$ es un valor máximo relativo de $F(x)$.

Puesto que

$$\{x \mid F''(x) = 0\} = \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\},$$

los únicos puntos de inflexión posibles son $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9}\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9}\right)$. Determina-

remos los signos de $F''(x)$ en cada uno de los intervalos $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \text{ y } \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right).$$

$$(i) \text{ Si } x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \text{ entonces } \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0,$$

$$\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0, \text{ y } F''(x) > 0.$$

$$(ii) \text{ Si } x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \text{ entonces } \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0,$$

$$\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0, \text{ y } F''(x) < 0.$$

$$(iii) \text{ Si } x \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right), \text{ entonces } \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0,$$

$$\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0, \text{ y } F''(x) > 0.$$

De estas observaciones y el teorema 10, se sigue que $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9}\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9}\right)$ son puntos de inflexión de la gráfica de F . Esta gráfica (Fig. 4.12) es cóncava hacia arriba sobre $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, cóncava hacia abajo sobre $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, y cóncava hacia arriba sobre $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$.

Si $F'(c) = 0$ y $F''(c) = 0$ ó $F''(c)$ no existe, entonces la segunda prueba (teorema 11) no nos es útil para determinar si $F(c)$ es un valor máximo relativo o mínimo relativo o ninguno de ambos y debemos acudir entonces a la primera prueba (Teorema 6).

Ejemplo 5. Encuentre los valores máximos relativos y mínimos relativos de

$$F(x) = 3x^3 - 20x^2 + 16.$$

Halle además los puntos de inflexión de la gráfica de F y construya dicha gráfica.

Solución. Aquí

$$F'(x) = 9x^2 - 40x = 9x(x - \frac{40}{9}),$$

$$F''(x) = 18x - 40 = 18(x - \frac{20}{9}).$$

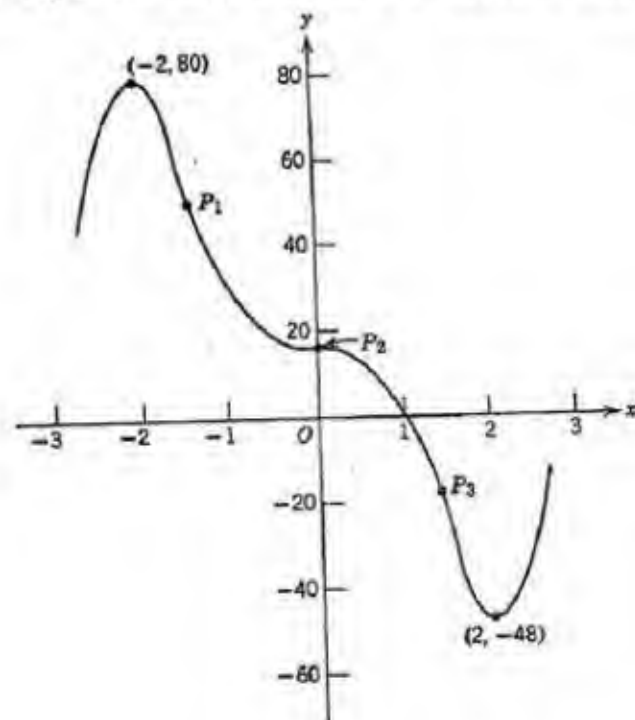


Fig. 4.13

Tanto $F'(x)$ como $F''(x)$ existen sobre \mathbb{R} . Observe que $\{x | F'(x) = 0\} = \{-2, 0, 2\}$; por lo que los valores críticos de x para $F(x)$ son $-2, 0, 2$. Ya que $\{x | F''(x) = 0\} = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$, podemos usar la segunda prueba para los valores críticos -2 y 2 pero no para 0 [porque $F''(0) = 0$]. Hallamos así que

$$F''(-2) < 0 \text{ y } F''(2) > 0.$$

Luego, según el teorema 11, $F(-2) = 80$ es un valor máximo relativo y $F(2) = -48$ es un valor mínimo relativo, de $F(x)$.

Para usar la primera prueba (teorema 6) para el valor crítico 0 , determinemos el signo de $F'(x)$ sobre cada uno de los intervalos $(-2; 0)$ y $(0; 2)$. Hallemos que $F'(x) < 0$ cuando $x \in (-2; 0)$ y que $F'(x) > 0$ cuando $x \in (0; 2)$. Por tanto, $F(0)$ no es un valor máximo relativo ni mínimo relativo de $F(x)$.

Puesto que $\{x | F''(x) = 0\} = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$, los únicos puntos de inflexión posibles son $(-\sqrt{2}, 16 + 28\sqrt{2})$, $(0, 16)$ y $(\sqrt{2}, 16 - 28\sqrt{2})$. Determinaremos el signo de $F''(x)$ en cada uno de los intervalos $(-\infty; -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}; 0)$, $(0; \sqrt{2})$ y $(\sqrt{2}; +\infty)$.

(i) Si $x \in (-\infty; -\sqrt{2})$, entonces $x < 0$, $(x + \sqrt{2}) < 0$,

$$(x - \sqrt{2}) < 0, \text{ y } F''(x) < 0.$$

(ii) Si $x \in (-\sqrt{2}; 0)$, entonces $x < 0$, $(x + \sqrt{2}) > 0$,

$$(x - \sqrt{2}) < 0, \text{ y } F''(x) > 0.$$

Por lo cual, según el teorema 10(i), $P_1(-\sqrt{2}, 16 + 28\sqrt{2})$ es un punto de inflexión.

(iii) Si $x \in (0; \sqrt{2})$, entonces $x > 0$, $(x + \sqrt{2}) > 0$,

$$(x - \sqrt{2}) < 0, \text{ y } F''(x) < 0.$$

A partir de (ii), (iii) y el teorema 10(ii) se sigue que $P_2(0, 16)$ es un punto de inflexión.

(iv) Si $x \in (\sqrt{2}; +\infty)$, entonces $x > 0$, $(x + \sqrt{2}) > 0$,

$$(x - \sqrt{2}) > 0, \text{ y } F''(x) > 0.$$

A partir de (iii), (iv) y el teorema 10(i) se sigue que $P_3(\sqrt{2}, 16 - 28\sqrt{2})$ es un punto de inflexión.

La gráfica de F aparece en la Fig. 4.13. Esta gráfica es cóncava hacia abajo sobre $(-\infty; -\sqrt{2})$, cóncava hacia arriba sobre $(-\sqrt{2}; 0)$, cóncava hacia abajo sobre $(0; \sqrt{2})$ y cóncava hacia arriba sobre $(\sqrt{2}; +\infty)$.

EJERCICIOS

Encuentre los valores máximos relativos y mínimos relativos de $F(x)$ para cada uno de los ejercicios del 1 al 12. Además, halle los puntos de inflexión de la gráfica de F y construya dicha gráfica.

1. $F(x) = 2x^2 - x^4$

2. $F(x) = x^3 - 12x$

3. $F(x) = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$

4. $F(x) = x^3 - 5x$

5. $F(x) = \frac{x^2}{x+1}$

6. $F(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 + 6x + 5}{5}$

7. $F(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 7$

8. $F(x) = \frac{1}{3}(x-9)(x-1)^{3/2}$

9. $F(x) = \frac{4a^2}{x^2 + a^2}; a > 0$

10. $F(x) = \frac{8x}{x^2 + 4}$

11. $F(x) = \sin^2 x, x \in [0; \pi]$

12. $F(x) = \frac{\pi}{2} + \cos x, x \in [0; 2\pi]$

13. Un tanque de forma cilíndrica circular recta, sin tapa y con base horizontal ha de contener 400π m³. El material de la base cuesta el doble por metro² que el de los lados. Calcule las dimensiones del tanque más económico.

14. Se va a construir una caja rectangular que tenga un volumen de 256 c.c. Su base debe ser doble de largo que de ancho. El material de la tapa cuesta 10 cts. por cm² y el de los lados, 5 cts. por cm². Encuentre las dimensiones que hagan el costo mínimo.

15. Se desea hacer un recipiente con forma de cilindro circular recto y de volumen dado V . Halle las dimensiones para tener un área total mínima.

(a) Si el recipiente debe ser cerrado.

(b) Si el recipiente debe ser sin tapa.

(c) Para el área total mínima ¿cuál es la razón del radio a la altura en (a)? ¿En (b)?

16. Calcule las dimensiones del rectángulo de área máxima que se pueda inscribir en un semicírculo de radio 10 mts.

(a) Usando seno y coseno;

(b) Sin usar las razones trigonométricas.

17. Se va a construir un embalaje con tapa para naranjas para contener 2m³. Se va a dividir en 2 partes mediante una separación paralela a sus extremos cuadrados. Encuentre las dimensiones del embalaje que requiere la menor cantidad de material.

18. Se va a construir un calentador para agua en forma de un cilindro circular recto con eje vertical, usando para ello una base de cobre y lados de hojalata. Si el cobre cuesta 5 veces lo que la hojalata, calcule la razón de la altura h al radio r que hará que el costo sea mínimo cuando el volumen V es constante.

19. Una página impresa debe contener 432 cm² de material impreso. Debe tener márgenes de 4 cms. a los lados y de 3 cms. arriba y abajo. ¿Cuáles han de ser las dimensiones de la página para que la cantidad de papel usado sea mínima?

20. Encuentre el punto de la parábola $4y = x^2$ que esté más próximo al punto $P(0, 4)$.

21. Encuentre las dimensiones del rectángulo de área máxima que se pueda inscribir en la elipse cuya ecuación es $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$.

22. Se tiene un cono circular recto, circunscrito a una esfera de radio a . Halle las dimensiones del cono que hagan mínimo su volumen.

23. Un triángulo tiene dos de sus lados de longitudes a y b siendo el ángulo comprendido θ . Determine el valor de θ para que el área del triángulo sea máxima.

24. Demuestre que $F(x) = 2 \cos x - \cos 2x$ tiene valores máximos relativos para $x = (\pi/3) + 2n\pi$ y para $x = (5\pi/3) + 2n\pi$, y que $F(x)$ tiene valores mínimos relativos para $x = n\pi$ (siendo n cualquier entero).

25. Encuentre los valores máximos relativos y mínimos relativos de $F(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$. Encuentre el punto de inflexión P de la gráfica G de F y encuentre una ecuación de la línea tangente a G en P . Construya la gráfica de F y la de la tangente.

26. Se va a construir un tanque de concreto para agua, con base cuadrada y sin tapa. El tanque ha de tener una capacidad de 192 m³. Si los lados cuestan \$4.00 por m² y la base cuesta \$3.00 por m². ¿Cuáles han de ser las dimensiones para que el costo total sea mínimo? ¿Cuál es dicho costo mínimo?

27. Una ventana tiene forma rectangular con un semicírculo sobrepuesto, en que el diámetro del semicírculo coincide con la base superior del rectángulo. ¿Qué dimensiones de la ventana admitirán la mayor cantidad de luz si el perímetro ha de ser P mts?

28. Halle los puntos de inflexión de la gráfica de F si $F(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - x^2 + x - 1$. ¿Sobre qué intervalos es cóncava hacia arriba la gráfica de F ? ¿Sobre cuáles es cóncava hacia abajo?

29. Demuestre el teorema 11(ii).

30. Determine los valores de a , b , c y d que permiten que la curva cuya ecuación es $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sea tangente al eje X , en $(2, 0)$ y que tenga un punto de inflexión en $(0, 4)$.

4.4 Funciones inversas y derivadas. Recordemos de la Sec. 1.7 que si una función F es biunívoca o uno a uno sobre su dominio, entonces la inversa de F es una función F^* . Además, de la Sec. 4.1, recordemos que si $F(x)$ es

(i) creciente sobre $[a; b]$

o (ii) decreciente sobre $[a; b]$,

entonces para $x_1 \in [a; b]$, $x_2 \in [a; b]$ y $x_1 \neq x_2$ teníamos que

$$F(x_1) \neq F(x_2)$$

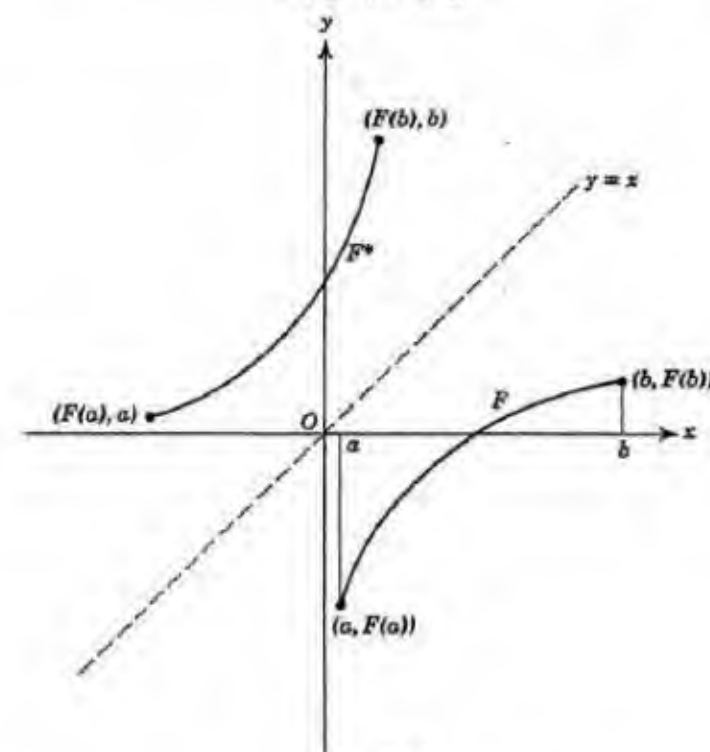


Fig. 4.14

Por tanto, si $F(x)$ es creciente sobre $[a; b]$, entonces la función F es biunívoca sobre $[a; b]$ y la inversa de F es una función F^* cuyo dominio es $[F(a); F(b)]$; si $F(x)$ es decreciente sobre $[a; b]$, entonces la función F es biunívoca sobre $[a; b]$ y la inversa de F es una función F^* cuyo dominio es $[F(b); F(a)]$. La Fig. 4.14 muestra las gráficas de una función F y de su inversa F^* , siendo $F(x)$ creciente sobre $[a; b]$. La Fig. 4.15 muestra las gráficas de una función F y de su inversa F^* , siendo $F(x)$ decreciente sobre $[a; b]$.

Por ejemplo, consideremos la función.

$$F = \{(x, y) \mid (x+3)^2 = y+1, x \in [-2; 0]\}$$

para la cual

$$F(x) = (x+3)^2 - 1$$

y

Puesto que $F'(x) > 0$ para $x \in [-2; 0]$, $F(x)$ es creciente sobre $[-2; 0]$; de ahí que F es biunívoca sobre $[-2; 0]$ y el rango de F es $[0; 8]$. La inversa de F es

$$F^* = \{(x, y) \mid (y+3)^2 = x+1, y \in [-2; 0]\},$$

para la cual

$$F^*(x) = \sqrt{x+1} - 3, \quad x \in [0; 8].$$

Las gráficas de F y F^* se muestran en la Fig. 4.16.

Para la función F^* , tenemos que

$$F^{*'}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}; \quad x \in [0; 8],$$

y vemos que $F^{*'}(x) > 0$ para $x \in [0; 8]$. Por tanto, $F^*(x)$ es creciente sobre $[0; 8]$.

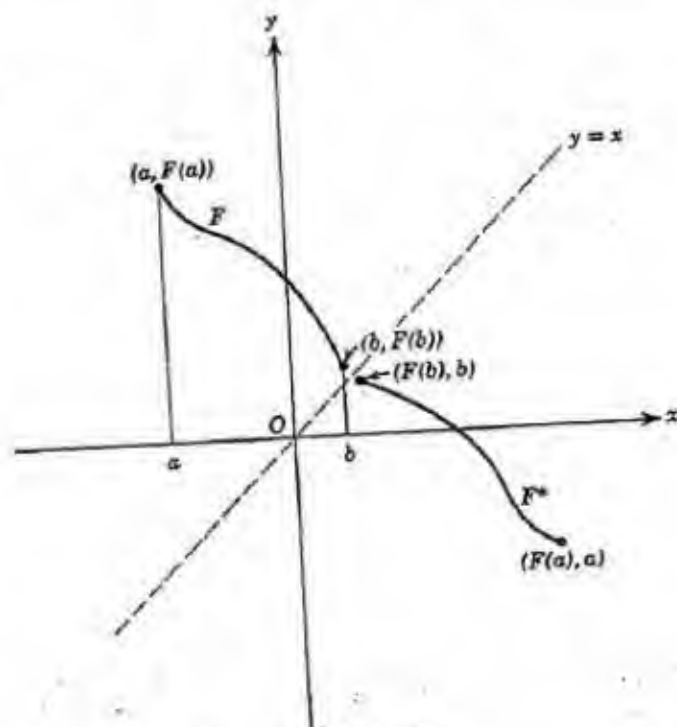


Fig. 4.15

Si (c, d) es un par ordenado de F^* $(c, d) \in F^*$, entonces $(d, c) \in F$, y

$$(d+3)^2 = c+1.$$

Notamos que

$$F^{*'}(c) = \frac{1}{2\sqrt{c+1}} = \frac{1}{2(d+3)} = \frac{1}{F'(d)}.$$

Este resultado no es una coincidencia; tendremos que demostrar que si F es biunívoca y derivable, siendo $F'(x) \neq 0$ sobre un conjunto S , si F^* es la inversa de F y si $y = F^*(x)$ y $x = F(y)$, entonces F^* es derivable sobre $S_1 = \{x \mid x = F(y), y \in S\}$, y

$$F^{*'}(x) = \frac{1}{F'(y)}, \quad \text{ó} \quad D_x F^*(x) = \frac{1}{D_y F(y)}.$$

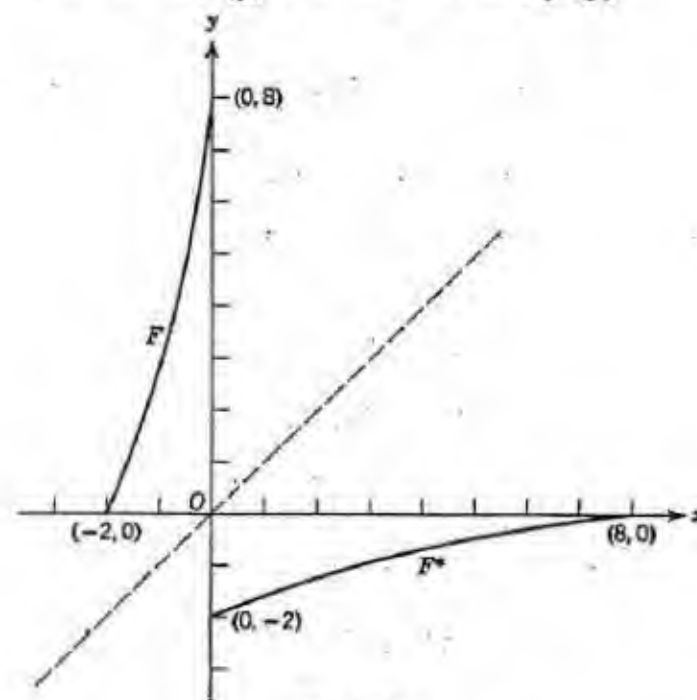


Fig. 4.16

Para lo cual, primero demostraremos el siguiente teorema concerniente a la derivada de la compuesta de dos funciones. La demostración de este teorema comprende el análisis usado en la demostración del teorema 11 de la Sec. 3.9, al cual se recomienda que se remita el estudiante.

Teorema 13. Si la función

$$V = \{(x, u) \mid u = V(x)\}$$

tiene el dominio S_1 , si la función

$$U = \{(u, y) \mid y = U(u)\}$$

es derivable sobre $S_2 = \text{rango de } V$, siendo $U'(u) \neq 0$ para $u \in S_2$ y si

$$U[V] = \{(x, y) \mid y = U[V(x)]\}$$

es derivable sobre S_1 , entonces

V es derivable sobre S_1 .

Demostración. Como en el teorema 11 de la Sec. 3.9 usaremos la notación

$$u = V(x), \quad u + k = V(x + h),$$

y notemos que cuando x y $x + h$ están en S_1 , entonces u y $u + k$ están en S_2 , si hacemos $F = U[V]$, de modo que $F(x) = U[V(x)]$, tenemos que

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} = \frac{U[V(x + h)] - U[V(x)]}{h} = \frac{U(u + k) - U(u)}{h}$$

para $x \in S_1, (x + h) \in S_1$.

Al igual que en la demostración del teorema 11 de la Sec. 3.9, podemos escribir

$$U(u + k) - U(u) = U'(u) \cdot k + k \cdot G(k), \quad (u + k) \in S_2,$$

donde $k = V(x + h) - V(x)$ y G es continua en 0.

Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} &= \frac{k}{h} [U'(u) + G(k)] \\ &= \frac{V(x + h) - V(x)}{h} [U'(u) + G(k)], \end{aligned}$$

$$y \quad \frac{V(x + h) - V(x)}{h} = \frac{\frac{F(x + h) - F(x)}{h}}{U'(u) + G(k)}$$

Por hipótesis

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h}$$

existe, y

$$\lim_{h \rightarrow 0} U'(u) = U'(u) \neq 0,$$

y como se hizo ver en la demostración del teorema 11 de la Sec. 3.9,

$$\lim_{h \rightarrow 0} G(k) = G(0) = 0.$$

De todo esto y según el teorema 6 de la Sec. 2.1,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(x + h) - V(x)}{h} \text{ existe para } x \in S_1.$$

Luego V es derivable sobre S_1 y

$$V'(x) = \frac{F'(x)}{U'(u)} \text{ siendo } u = V(x).$$

Recuérdese de la Sec. 1.7 que si F^* es la inversa de F , entonces la compuesta de F con F^* es la función identidad I ,

$$F[F^*] = I.$$

Este hecho se puede usar junto con el teorema 13 para demostrar el siguiente teorema.

Teorema 14. Si F^* es la inversa de F y si F es derivable y $F'(x) \neq 0$ sobre un conjunto S , entonces F^* es derivable sobre $\{u \mid u = F(x), x \in S\}$.

Demostración. Tenemos que $F[F^*] = I$. Puesto que la función I , tal que $I(x) = x$, es derivable sobre Re y F es derivable y $F'(x) \neq 0$ sobre S , podemos aplicar el teorema 13 [donde $V = F^*, U = F, S_1 = \{u \mid u = F(x), x \in S\}, S_2 = S$] para concluir que F^* es derivable sobre $\{u \mid u = F(x), x \in S\}$. ■

El teorema 14 nos permite usar la derivación implícita para determinar la derivada de F^* , la inversa de F , cuando conozcamos la derivada de F .

Por ejemplo consideremos la función

$$F = \{(x, y) \mid y = x^3 + 6x\}.$$

Para esta función $F'(x) = 3x^2 + 6$ que es positiva sobre Re . Luego F es biunívoca sobre Re y su inversa es una función F^* . Puesto que el rango de F es Re , el dominio de F^* es Re . Podemos escribir

$$F^* = \{(x, y) \mid x = y^3 + 6y\},$$

donde $y = F^*(x)$. Esto es, que la ecuación

$$x = y^3 + 6y$$

especifica una función F^* donde $y = F^*(x)$. Lo que es más, ya que F es derivable sobre Re , F^* será derivable sobre su dominio Re . Por tanto, podemos usar la derivación implícita para calcular

$$D_x x = D_x (y^3 + 6y)$$

$$1 = (3y^2 + 6) D_x y$$

$$D_x y = \frac{1}{3y^2 + 6}.$$

Esto es que

$$D_x F^*(x) = \frac{1}{3[F^*(x)]^2 + 6}.$$

El resultado de este ejemplo se generaliza en el teorema 15.

Teorema 15. Sea F una función biunívoca y derivable tal que $F'(x) \neq 0$ sobre el conjunto S . Sea F^* la inversa de F . Entonces, si $y = F^*(x)$ y $x = F(y)$ tenemos que

$$D_x F^*(x) = \frac{1}{D_y F(y)} \quad (7)$$

para $x \in \{F(y) \mid y \in S\}, y \in S$.

Demostración. Según el teorema 14, F^* es derivable sobre $\{F(y) \mid y \in S\}$. Puesto que $x = F(y)$ y F es derivable sobre S , tenemos que

$$D_x x = D_y F(y).$$

Ahora bien, según la regla de la cadena, y puesto que $y = F^*(x)$,

$$D_x F(y) = D_y F(y) \cdot D_x y,$$

de modo que

$$1 = D_y F(y) \cdot D_x y.$$

Es decir que

$$D_y F(y) \cdot D_x F^*(x) = 1 \text{ ó } D_x F^*(x) = \frac{1}{D_y F(y)}.$$

Usando (7) podemos obtener una expresión para $D_x F^*(x)$ en términos de y , donde $y = F^*(x)$, aunque no podamos tener una expresión para $F^*(x)$ en términos de x .

Nótese que si en (7) $D_y F(y) > 0$, entonces $D_x F^*(x) > 0$; y si $D_y F(y) < 0$, entonces $D_x F^*(x) < 0$. De aquí que si F es derivable y $F(x)$ es creciente sobre S , entonces $F^*(x)$ es asimismo creciente sobre el dominio de F^* ; si F es derivable y $F(x)$ es decreciente sobre S , entonces $F^*(x)$ es asimismo decreciente sobre el dominio de F^* .

Ejemplo 1. Si $F = \{(x, y) \mid y = x^2 - 1, x \in [-3; -1]\}$ demuestre que la inversa de F es una función F^* y mediante el Teorema 15, dé una expresión para $F^{*'}(x)$. Compruebe el resultado obteniendo una fórmula para $F^{*'}(x)$ y calculando $F^{*'}(x)$ directamente.

Solución. Aquí $F(x) = x^2 - 1$ y

$$F'(x) = 2x, \text{ para } x \in [-3; -1].$$

Por tanto, $F'(x) < 0$ sobre el dominio de F ; de donde $F(x)$ es decreciente y F es biunívoca sobre $[-3; -1]$. Consecuentemente, la inversa de F es una función F^* donde

$$F^* = \{(x, y) \mid x = y^2 - 1, y \in [-3; -1]\}. \quad (8)$$

Según el teorema 15

$$D_x F^*(x) = \frac{1}{D_y F(y)}$$

en que $x = y^2 - 1$, $y = -\sqrt{x+1}$, $x \in [0; 8]$, $y \in [-3; -1]$, $F(y) = y^2 - 1$. Se sigue que

$$D_x F^*(x) = \frac{1}{2y} = \frac{1}{-2\sqrt{x+1}}; \quad x \in [0; 8]$$

y

$$F^{*'} = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{1}{-2\sqrt{x+1}}; x \in [0; 8] \right\}.$$

De (8) sabemos que

$$F^*(x) = -\sqrt{x+1}, \quad x \in [0; 8].$$

Entonces

$$F^{*'}(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} = \frac{1}{-2\sqrt{x+1}}$$

que es el resultado obtenido mediante nuestro primer método.

Las gráficas de F y F^* aparecen en la Fig. 4.17.

Ejemplo 2. Demuestre que la función

$$F = \{(x, y) \mid y = 2x^5 + 4x^3 + 12x, x \in [-5; 8]\},$$

para la cual

$$F(x) = 2x^5 + 4x^3 + 12x,$$

tiene una inversa que es una función F^* . Use el teorema 15 para expresar una fórmula para $D_x F^*(x)$.

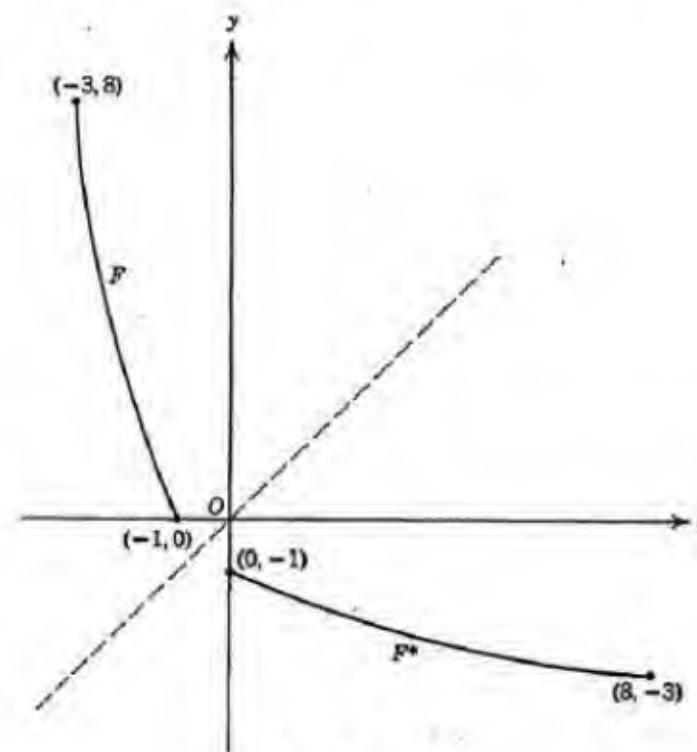


Fig. 4.17

Solución. Aquí

$$D_x F(x) = 10x^4 + 12x^2 + 12 > 0 \text{ para } x \in [-5; 8].$$

Por tanto, $F(x)$ es creciente sobre $[-5; 8]$ y F es biunívoca y continua sobre $[-5; 8]$. De modo que la inversa de F es una función F^* que es continua y $F^*(x)$ es creciente sobre $[F(-5); F(8)]$.

Puesto que F es derivable sobre $[-5; 8]$ F^* es derivable sobre $[F(-5); F(8)]$ y según el teorema 15

$$D_x F^*(x) = \frac{1}{D_y F(y)} = \frac{1}{10y^4 + 12y^2 + 12},$$

para $x \in [F(-5); F(8)]$, $y \in [-5; 8]$.

En este caso

$$F^* = \{(x, y) \mid x = 2y^5 + 4y^3 + 12y, y \in [-5; 8]\},$$

y no es factible obtener una expresión para $F^*(x)$ en términos de x . Así pues, el teorema 15 nos provee del único método para obtener $D_x F^*(x)$ y esta derivada queda expresada en términos de $F^*(x)$ misma.

Ejemplo 3. Demuestre que la función

$$F = \{(x, y) \mid y = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]\}$$

tiene una inversa que es una función F^* . Demuestre que el dominio de F^* es $[-1; 1]$ y que F^* es derivable sobre $(-1; 1)$ con

$$D_x F^*(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1; 1):$$

Solución. En este ejemplo $F(x) = \sin x$, $x \in [-\pi/2; \pi/2]$, y $F'(x) = \cos x$, $x \in [-\pi/2; \pi/2]$. Ahora $F'(x) > 0$ para $x \in (-\pi/2; \pi/2)$ y F es continua sobre $[-\pi/2; \pi/2]$. Por tanto, $F(x)$ es creciente y de ahí que F es biunívoca sobre $[-\pi/2; \pi/2]$. Así pues la inversa de F es una función F^* que es continua y para la cual $F^*(x)$ es creciente sobre

$$\left[F\left(-\frac{\pi}{2}\right); F\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = [-1; 1].$$

Dado el hecho de que $F'(x) > 0$ sobre $(-\pi/2; \pi/2)$, se concluye del teorema 14 que F^* es derivable sobre

$$\left(F\left(-\frac{\pi}{2}\right); F\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (-1; 1).$$

Ahora bien, $F^* = \{(x, y) \mid x = \sin y, y \in [-\pi/2; \pi/2]\}$ y puesto que F^* es derivable sobre $(-1; 1)$, podemos decir, según el teorema 15, que

$$D_x F^*(x) = \frac{1}{D_y F(y)} = \frac{1}{\cos y}; \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Pero $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ para $y \in (-\pi/2; \pi/2)$, y $\sin y = x$, de modo que

$$D_x F^*(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1; 1):$$

EJERCICIOS

En los ejercicios del 1 al 4 se da una función F cuya inversa F^* se ha encontrado en los ejercicios del 5 al 8 de la Sec. 1.7. Use la fórmula (7) del teo-

rema 15 para calcular $D_x F^*(x)$. Halle en seguida $D_x F^*(x)$ de la fórmula para $F^*(x)$ y compruebe que los resultados son iguales.

$$1. F = \{(x, y) \mid y = x^2 - 4, x \in (-\infty; -2]\}.$$

$$2. F = \{(x, y) \mid y = x^2 - 4, x \in [2; +\infty)\}.$$

$$3. F = \{(x, y) \mid y = x^3\}.$$

$$4. F = \{(x, y) \mid y = x^4, x \in [0; +\infty)\}.$$

En los ejercicios del 5 al 8 se define una función F sobre un intervalo especificado. Demuestre que F es derivable y que $F(x)$ es creciente (o decreciente) sobre el intervalo, y en consecuencia que la inversa de F es una función F^* . Use la igualdad (7) del teorema 15 para obtener una fórmula para $D_x F^*(x)$.

$$5. F(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2, x \in [-1; 10].$$

$$6. F(x) = \frac{1}{3}x^3, x \in [-8; 10].$$

$$7. F(x) = -3x^3 - 5x + 7, x \in [-12; 8].$$

$$8. F(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1, x \in [-4; 25].$$

9. Demuestre que la función

$$F = \{(x, y) \mid y = \cos x, x \in [0; \pi]\}$$

tiene una inversa que es una función F^* . Demuestre que F^* es derivable sobre $(-1; 1)$ y que

$$D_x F^*(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

10. Demuestre que la función

$$F = \{(x, y) \mid y = \tan x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\}$$

tiene una inversa que es una función F^* . Demuestre que F^* es derivable sobre \mathbb{R} y que

$$D_x F^*(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

EJERCICIOS ADICIONALES AL CAPITULO 4

En los ejercicios del 1 al 4 determine los intervalos sobre los que $F(x)$ es creciente y aquellos sobre los que es decreciente

$$1. F(x) = x^3 - 9x^2 + 15x.$$

$$3. F(x) = -5x^3 - 6x + 13.$$

$$2. F(x) = 3x^3 + 8x + 7.$$

$$4. F(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1.$$

En los ejercicios del 5 al 10 halle los valores máximos relativos y mínimos relativos de $F(x)$. Halle también los puntos de inflexión de la gráfica de F y construya dicha gráfica.

$$5. F(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x.$$

$$6. F(x) = x^4 - 6x^2.$$

$$7. F(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 10.$$

$$8. F(x) = 2 \cos x - \cos 2x, x \in [-\pi; \pi].$$

$$9. F(x) = \frac{a^2 x}{a^2 + x^2}; a > 0.$$

$$10. F(x) = \sin x - \cos x.$$

11. Demuestre que la función

$$F = \{(x, y) \mid y = \cot x, x \in (0; \pi)\}$$

tiene una inversa que es una función F^* . Demuestre que F^* es derivable sobre \mathbb{R} y que

$$D_x F^*(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Integrales definidas

5.1 Sumas en que el número de términos crece sin límite. En el estudio del álgebra encontramos sumas del tipo S_n dadas por

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}. \quad (1)$$

Recordemos que una suma de este tipo se llama *suma de una progresión geométrica*. Ejemplos de este tipo de sumas son:

$$S_5 = 2 + 2\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^4 \quad (2)$$

$$S_9 = 5 + 5(4) + 5(4)^2 + 5(4)^3 + \cdots + 5(4)^8. \quad (3)$$

Un teorema básico para la suma (1) es que S_n queda expresada en forma compacta mediante las fórmulas *

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

y

$$S_n = \frac{a}{1 - r} - \frac{a}{1 - r} r^n \quad (4)$$

cuando $r \neq 1$.

Como ejemplo del uso de la fórmula (4), consideremos la suma S_5 dada mediante (2). En ella $a = 2$, $r = \frac{1}{3}$ y $n = 5$; por tanto, S_5 tiene el valor

$$\frac{2}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^5 = 3 - \frac{3}{243} = 3 - \frac{1}{81}.$$

Para la suma S_9 dada en (3), hallamos que

$$S_9 = \frac{5 - 5(4)^9}{1 - 4} = 436,905.$$

Si hacemos que el número de términos en la suma (1) crezca indefinidamente tendremos un ejemplo de una *serie infinita*. (Las series infinitas serán definidas y analizadas en el capítulo 14). Por ejemplo, considérese la suma

$$S_n = 2 + 2\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}. \quad (5)$$

* Véase T. L. Wade y H. E. Taylor, *Fundamental Mathematics*. 2a. edición, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1961.

Según la fórmula (4) tenemos que $S_n = 3 - (\frac{1}{2})^n$. ¿Qué le ocurre a S_n en este ejemplo si hacemos que n crezca? Es evidente que si n crece, $3(\frac{1}{2})^n$ decrece y de hecho, dada cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo N , tal que $|3(\frac{1}{2})^n| < \varepsilon$ para toda $n \geq N$. En otras palabras, dada cualquier $\varepsilon > 0$, existe una N , tal que $|S_n - 3| < \varepsilon$ para toda $n \geq N$. Simbolizamos estos resultados escribiendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 3$$

y decimos que la suma S_n tiene el límite 3 cuando n crece sin límite.

La suma S_n dada en (5) puede interpretarse como la correspondiente $F(n)$ de n ante una función F cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos. Tal función, cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos o el conjunto de los enteros mayores o iguales que un entero dado, es llamada *sucesión infinita*. La correspondiente $F(n)$ de n ante la sucesión infinita F se llama término enésimo del rango, o *término general del rango de la sucesión infinita*. Al estudiar una sucesión infinita F , se hace gran uso del concepto del *límite del término general del rango* cuando n crece sin límite.*

Sea $F(n)$ la correspondiente de n ante una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos. El límite de $F(n)$ cuando n crece sin límite es b , lo cual se expresa por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = b,$$

si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo N para el cual

$$|F(n) - b| < \varepsilon \text{ para toda } n \geq N.$$

hemos visto que $\lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = 3$ para la sucesión F definida por $F(n) = 3 - 3(\frac{1}{2})^n$. En ella $F(n)$ era la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica cuyo primer término es 2 y cuya razón común es $r = \frac{1}{2}$ y el $\lim_{n \rightarrow \infty} F(n)$ existía en ese caso porque la razón común r tenía un valor tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$. Consideremos la sucesión infinita G definida al hacer $G(n)$ igual a la suma (1), esto es,

$$G(n) = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1}.$$

Entonces según (4)

$$G(n) = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} (r)^n.$$

En este caso

$$\left| G(n) - \frac{a}{1-r} \right| = \left| \frac{a}{1-r} \right| |r|^n$$

y es evidente que si $|r| < 1$, entonces dada una $\varepsilon > 0$ existe una N para la que

$$\left| \frac{a}{1-r} \right| |r|^n < \varepsilon \text{ para toda } n \geq N \text{ y de ahí que}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(n) = \frac{a}{1-r} \text{ cuando } |r| < 1; \quad (6)$$

* Las sucesiones infinitas y los límites de la correspondiente $F(n)$ se tratarán en forma más completa en el capítulo 14.

Cuando n crece sin límite en la suma (5), tenemos un ejemplo de una suma en la que el número de términos crece sin límite con sólo añadir nuevos términos sucesivos a los ya presentes. (Tal suma se puede considerar como definición de una sucesión infinita donde la suma con n términos será la correspondiente de n ante la sucesión infinita).

Sin embargo, en aplicaciones matemáticas es frecuente encontrar sumas en que el número de términos crece sin límite y en que a cada crecimiento el valor de cada término decrece. El que una suma de este tipo se pueda usar para definir una sucesión infinita depende de si el especificar al número de términos en la suma se determina el valor de la suma o no. Una suma en que

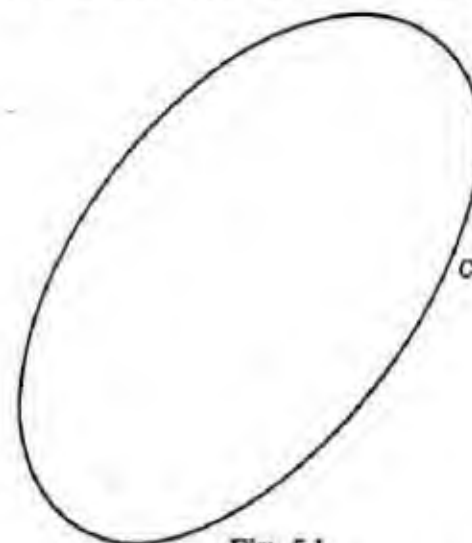


Fig. 5.1

el valor de cada término decrece cuando el número de términos crece se presenta, por ejemplo, cuando consideramos el cálculo del área de una región plana cuya frontera contiene por lo menos una porción que no sea un segmento de recta. En realidad, antes de hablar sobre calcular el área de tal figura debemos definir el concepto de "área" de una figura plana con fronteras curvas. Considérese como ejemplo, la región limitada por la curva C , como se muestra en la Fig. 5.1.

Una manera de definir el concepto de área de tales regiones, que nos brinda al mismo tiempo un método para calcular el área hasta una precisión deseada, es superponer una red o malla rectangular sobre la región, como en la Fig. 5.2. Damos por aceptado que el área de un rectángulo es (por definición) el producto de su longitud por su ancho. Si consideramos los rectángulos cuyos puntos quedan dentro de la curva C o sobre ella, podemos formar la suma de sus áreas. Esta suma será naturalmente, menor que la cantidad que deseamos considerar como el "área" de región limitada por C . En la Fig. 5.2 la suma

$$S_{20} = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_{20} \quad (7)$$

es una aproximación al "área" de la región y será, evidentemente menor que ella. Es lógico que podemos mejorar la aproximación si usamos una malla de

rectángulos menores, de modo que superponemos a la región una red cuyos rectángulos sean menores que cualquiera de los rectángulos de la malla anterior (véase la Fig. 5.3). Con esta nueva red podemos producir una suma de áreas de rectángulos que (intuitivamente) es una aproximación mejor que la anterior, al "área" de la región.

Supóngase que en la Fig. 5.3 hay n rectángulos ($n > 20$) cuyos puntos están dentro o sobre la curva C . Si numeramos estos rectángulos y designamos sus áreas mediante B_1, B_2, \dots, B_n respectivamente, notamos que cada B_i es menor que cualquiera de las A_j de la suma (7). Considérese la suma S_n de dichas n áreas.

$$S_n = B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_n.$$

Esta suma es también menor que el "área" de la región pero está "más cerca" de dicha "área" que el valor de la suma (7) que obtuvimos de la Fig. 5.2.

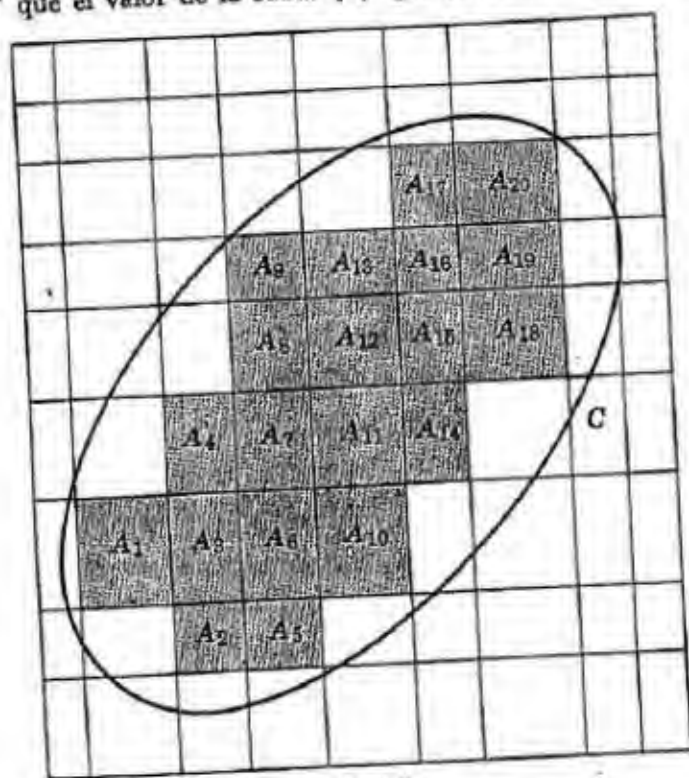


Fig. 5.2

En esta forma producimos sumas en que el número de términos es creciente y en las que cada término de una suma S_n es menor que el valor de cualquier término de la suma precedente. Cada vez que aumentamos el número de términos de la suma (aumentando el número y disminuyendo el tamaño de los rectángulos de la red) obtenemos una suma que es, intuitivamente, una mejor aproximación a la cantidad que "sentimos" que debe llamarse "área" de la región. Si existe un número A , tal que la diferencia entre A y la suma de las áreas de los rectángulos "interiores" se pueda hacer arbitrariamente pequeña para todas las redes con

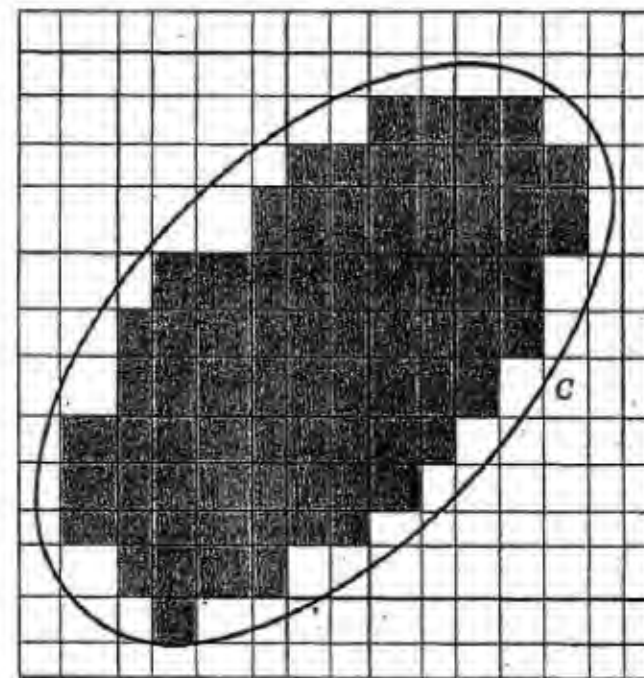


Fig. 5.3

rectángulos suficientemente pequeños, este número A debe ser, con seguridad, lo que deseamos llamar "área" de la región.*

En el problema de definir un área hemos sido conducidos a la consideración de sumas en que el número de términos es creciente y en que el tamaño de cada término es decreciente. El mismo tipo de sumas aparece en la definición de otras cantidades físicas —por ejemplo: el trabajo hecho por una fuerza variable, la fuerza ejercida por un fluido sobre la pared de un recipiente, los volúmenes de sólidos de varios tipos y la longitud de un arco. Fue en conexión con consideraciones de este tipo de cantidades físicas, que se desarrolló el concepto de integral definida. Dicho concepto de *integral definida*, junto con el de *derivada* son los dos conceptos básicos del cálculo.

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 6 se define una sucesión infinita G , mediante $G(n)$, en la forma de suma (1). Use el resultado (6) para determinar los casos en que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} G(n)$. Si este límite existe, calcule su valor.

1. $G(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$.
2. $G(n) = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1}$.
3. $G(n) = 4 + 4 + 4 + \dots + 4$.
4. $G(n) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n - 1}$.

* En secciones siguientes daremos una formulación precisa de la definición de área para varios tipos de regiones.

$$5. G(n) = \frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{2^{n-1}}{3^n}.$$

$$6. G(n) = 3 - \frac{9}{4} + \frac{27}{16} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{3^n}{4^{n-1}}.$$

7. Sea F una sucesión infinita para la cual $F(n) = 2 - \frac{1}{n}$. Demuestre que $|F(n) - 2| < 0.1$ para toda $n \geq 11$; demuestre que $|F(n) - 2| < 0.01$ para toda $n \geq 101$; demuestre que $|F(n) - 2| < 0.001$ para toda $n \geq 1001$. ¿Cuál parece ser el límite de $F(n)$ cuando n crece sin límite? Demuestre su suposición aplicando la definición de $\lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = b$.

8. Sea F una sucesión infinita tal que $F(n) = 6 - 3(\frac{1}{2})^{n-1}$. Halle el menor entero N que tenga la propiedad de que

$$(a) |F(n) - 6| < 0.1 \text{ para toda } n \geq N;$$

$$(b) |F(n) - 6| < 0.01 \text{ para toda } n \geq N;$$

$$(c) |F(n) - 6| < 0.001 \text{ para toda } n \geq N.$$

¿Cuál parece ser el valor del $\lim_{n \rightarrow \infty} F(n)$?

Para los límites del término general del rango de una sucesión cuando n crece sin límite, existen teoremas análogos a los de límites de correspondientes de funciones, que fueron dados en el capítulo 2. Por ejemplo, si F y G son sucesiones y si $\lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = b$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} G(n) = c$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [F(n) + G(n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} F(n) + \lim_{n \rightarrow \infty} G(n),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [F(n) - G(n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} F(n) - \lim_{n \rightarrow \infty} G(n),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [F(n) \cdot G(n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} F(n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} G(n),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n)}{G(n)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} F(n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} G(n)} \text{ siempre que } \lim_{n \rightarrow \infty} G(n) \neq 0.$$

Usando estos teoremas y el hecho de que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, calcule los límites de cada uno de los ejercicios del 9 al 12.

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{2n}\right).$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} a \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8n^2}\right).$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 4}{3n^2 - 2n}$$

$$\text{Sugestión: primero escriba } \frac{2n^2 - 3n + 4}{3n^2 - 2n} = \frac{2 - (3/n) + (4/n^2)}{3 - (2/n)}.$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right].$$

5.2 Notaciones para Sumas. En la definición de integral y en sus aplicaciones analizamos sumas en las que el número de términos es grande. Por esta

razón es cómodo usar la notación aceptada para indicar dichas sumas. La notación sigma de sumas está definida por la igualdad

$$\sum_{i=m}^n F(i) = F(m) + F(m+1) + F(m+2) + \cdots + F(n)$$

donde m y n son enteros y $n \geq m$. El símbolo $\sum_{i=m}^n$ lo leemos como "la suma desde $i = m$ hasta $i = n$ ". Por ejemplo:

$$\sum_{i=3}^5 i^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2;$$

$$\sum_{i=1}^6 i(i+2) = 1(1+2) + 2(2+2) + 3(3+2) + 4(4+2) + 5(5+2) + 6(6+2);$$

$$\sum_{i=1}^n a(r)^{i-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}; \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) + n; \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2; \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^n c = c + c + c + \cdots + c = nc;$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0.$$

Las sumas (8), (9) y (10) son de especial interés. Hemos ya mencionado que (8) se puede escribir en la forma

$$\sum_{i=1}^n a(r)^{i-1} = \frac{a - ar^n}{1 - r}, \quad (11)$$

y se puede hacer ver fácilmente (véase el ejemplo 1) que para (9)

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2} n(n+1). \quad (12)$$

Para la suma (10), podemos demostrar (véase el ejemplo 2) que

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} (2n^3 + 3n^2 + n) = \frac{1}{6} (n)(n+1)(2n+1). \quad (13)$$

Ejemplo 1. Demuestre la fórmula (12).

Solución. Escribamos $S = \sum_{i=1}^n i$, y notemos que

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) + n$$

y también que

$$S = n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 2 + 1.$$

Sumando estas desigualdades tenemos

$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)$$

donde $n+1$ aparece como sumando, n veces. Por tanto

$$2S = n(n+1)$$

$$S = \frac{1}{2}n(n+1).$$

y

Ejemplo 2. Demuestre la fórmula 13.

Solución. Note que

$$\begin{aligned} i^3 - (i-1)^3 &= i^3 - (i^3 - 3i^2 + 3i - 1) \\ &= 3i^2 - 3i + 1, \end{aligned}$$

y de aquí que

$$\sum_{i=1}^n [i^3 - (i-1)^3] = \sum_{i=1}^n (3i^2 - 3i + 1). \quad (14)$$

$$\text{Ahora bien } \sum_{i=1}^n [i^3 - (i-1)^3] = (1^3 - 0^3) + (2^3 - 1^3) + (3^3 - 2^3) + \dots + [n^3 - (n-1)^3] = n^3,$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (3i^2 - 3i + 1) &= \sum_{i=1}^n 3i^2 - \sum_{i=1}^n 3i + \sum_{i=1}^n 1 \\ &= 3 \sum_{i=1}^n i^2 - 3 \sum_{i=1}^n i + n \\ &= 3 \sum_{i=1}^n i^2 - 3 \left[\frac{1}{2}n(n+1) \right] + n. \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en (14) tenemos

$$n^3 = 3 \sum_{i=1}^n i^2 - \frac{3}{2}n(n+1) + n$$

y

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{3} \left[n^3 + \frac{3}{2}n(n+1) - n \right],$$

o lo que es equivalente

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} (2n^3 + 3n^2 + n) = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 6 desarrolle en detalle la suma representada por el símbolo dado

$$1. \sum_{i=1}^6 \frac{1}{i^2}.$$

$$3. \sum_{k=1}^5 k(k+1).$$

$$2. \sum_{i=4}^{10} i \cdot 3^{i-1}.$$

$$4. \sum_{i=2}^5 \left(\frac{1}{i} - \frac{2}{i-1} \right)$$

$$5. \sum_{k=1}^n kx^k.$$

$$6. \sum_{i=1}^n \frac{m}{i^2}.$$

Use la notación sigma para representar las sumas dadas en los ejercicios del 7 al 12.

$$7. 2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{8}\right) + 2\left(\frac{1}{16}\right) + 2\left(\frac{1}{32}\right).$$

$$8. (1)^2(2-1) + 2^2(3-2) + 3^2(4-3) + 4^2(5-4) + 5^2(6-5) + 6^2(7-6).$$

$$9. (2-x_1)(x_1-x_0) + (2-x_2)(x_2-x_1) + (2-x_3)(x_3-x_2) + \dots + (2-x_n)(x_n-x_{n-1}).$$

$$10. \left(\frac{6}{n}\right)^2 \left(\frac{6}{n}\right) + \left(2 \cdot \frac{6}{n}\right)^2 \left(\frac{6}{n}\right) + \left(3 \cdot \frac{6}{n}\right)^2 \left(\frac{6}{n}\right) + \left(4 \cdot \frac{6}{n}\right)^2 \left(\frac{6}{n}\right) + \dots + \left[(n-1) \left(\frac{6}{n}\right)\right]^2 \left(\frac{6}{n}\right).$$

$$11. 62.5 \pi [x_1^2(18-x_0)(x_1-x_0) + x_2^2(18-x_1)(x_2-x_1) + x_3^2(18-x_2)(x_3-x_2) + \dots + x_{n-1}^2(18-x_{n-2})(x_{n-1}-x_{n-2})];$$

$$12. 62.5 [2\sqrt{\frac{9}{4}-y_0^2}(6-y_1)(y_1-y_0) + 2\sqrt{\frac{9}{4}-y_1^2}(6-y_2)(y_2-y_1) + 2\sqrt{\frac{9}{4}-y_2^2}(6-y_3)(y_3-y_2) + \dots + 2\sqrt{\frac{9}{4}-y_{n-1}^2}(6-y_n)(y_n-y_{n-1})].$$

En cada uno de los ejercicios del 13 al 15 establezca la fórmula dada

$$13. \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

$$14. \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

$$15. \sum_{k=1}^n \left[1 + (k-1) \frac{2}{n} \right]^2 \left(\frac{2}{n} \right) = 2 \left[1 + 2 \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{2}{3} \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \right].$$

16. Use una fórmula para $i^4 - (i-1)^4$ y el método expuesto en el ejemplo 2 para obtener el resultado

$$\sum_{i=1}^n i^4 = \frac{1}{4} (n^4 + 2n^3 + n^2) = \left[\frac{1}{2} n(n+1) \right]^2.$$

$$17. \text{Derive la fórmula } \sum_{i=1}^n i^4 = \frac{1}{30} (6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n).$$

Establezca la fórmula dada en cada uno de los ejercicios del 18 al 21.

$$18. \sum_{i=1}^n \frac{i^3}{n^4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}$$

$$19. \sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2.$$

$$20. \sum_{k=1}^n k(k-1) = \frac{1}{3} (n^3 - n).$$

$$21. \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{3} n^3 + n^2 + \frac{2}{3} n.$$

$$22. \sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = 2n^2 - n^2.$$

5.3 Particiones, normas y aumentos. En esta sección definiremos algunos conceptos y términos que emplearemos para definir la integral defi-

nida. Estos términos y conceptos se usarán en relación con un *intervalo cerrado finito*.

$$\{x \mid a \leq x \leq b\} = [a; b]$$

definido en la Sec. 1.2. Recuérdese que en dicha sección convinimos en usar la palabra "intervalo" para significar tanto el conjunto de números $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ como su representación gráfica sobre la escala de los números.

Una **partición** de un intervalo cerrado $[a; b]$ es un conjunto de intervalos cerrados

$$\{[x_0; x_1], [x_1; x_2], [x_2; x_3], \dots, [x_{n-2}; x_{n-1}], [x_{n-1}; x_n]\}$$

que tiene las propiedades de que

$$(i) [x_0; x_1] \cup [x_1; x_2] \cup [x_2; x_3] \cup \dots \cup [x_{n-2}; x_{n-1}] \cup [x_{n-1}; x_n] = [a; b];$$

$$(ii) [x_{i-1}; x_i] \cap [x_i; x_{i+1}] = x_i \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, n;$$

$$(iii) [x_{j-1}; x_j] \cap [x_k; x_{k+1}] = \emptyset \text{ a menos que } k = j \text{ ó } j - 1 = k + 1.$$

Cada intervalo en una partición de $[a; b]$ se llama **subintervalo** $[a; b]$.

Es evidente que una partición está determinada por los números que son puntos extremos de los subintervalos de la partición. Una partición que contenga n subintervalos queda, según eso, determinada por un conjunto de $n + 1$ números

$$\{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

donde $x_0 = a$, $x_n = b$ y $x_{i-1} < x_i$ para $i = 1, 2, 3, \dots, n$. El símbolo P_n se usará para la partición determinada por este conjunto de $n + 1$ números, es decir

$$P_n = \{[x_0; x_1], [x_1; x_2], [x_2; x_3], \dots, [x_{n-2}; x_{n-1}], [x_{n-1}; x_n]\}.$$

La Fig. 5.4 muestra una representación gráfica de una partición P_n de un intervalo cerrado $[a; b]$.

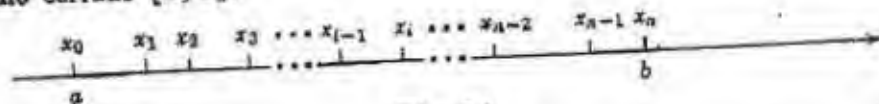


Fig. 5.4

Si P_n es una partición de un intervalo $[a; b]$, la **norma** \mathcal{N}_P de P_n es el mayor de los n números $(x_1 - x_0), (x_2 - x_1), (x_3 - x_2), \dots, (x_n - x_{n-1})$. Por conveniencia haremos

$$x_1 - x_0 = \Delta x_1, x_2 - x_1 = \Delta x_2, \dots, x_n - x_{n-1} = \Delta x_n,$$

esto es

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Se sigue, de la definición de la norma \mathcal{N}_P , que

$$\mathcal{N}_P \geq \Delta x_i \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Gráficamente, la norma \mathcal{N}_P de una partición P_n es la longitud del más grande de los subintervalos en la gráfica de P_n .

Si P_n es una partición de un intervalo $[a; b]$, un **aumento** T_n de la partición es un conjunto de n números, seleccionados uno de cada intervalo de la partición; esto es, un conjunto de n números $\{t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-1}, t_n\}$ tales que $x_0 \leq t_1 \leq x_1$, $x_1 \leq t_2 \leq x_2$, $x_2 \leq t_3 \leq x_3$, \dots , $x_{n-1} \leq t_n \leq x_n$; en otras palabras,

$$x_{i-1} \leq t_i \leq x_i \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

La Fig. 5.5 muestra una representación gráfica de una partición P_n de $[a; b]$ y un aumento de P_n .

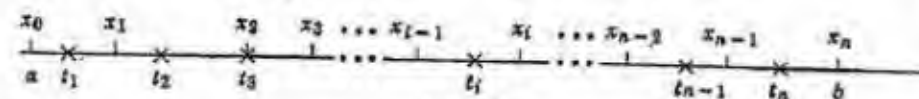


Fig. 5.5

Es importante notar que dados un intervalo $[a; b]$ y un entero positivo n , hay un número infinito de particiones que contengan n intervalos y que para cada una de tales particiones hay un número infinito de aumentos con n elementos. En otras palabras: el dar un intervalo $[a; b]$ y un entero positivo n , no determina una partición única, ni el dar una partición determina un aumento único.

5.4 La integral definida. En esta sección definiremos la integral de una función F . Este concepto y el de derivada de una función constituyen las dos ideas centrales y las principales herramientas del cálculo. Daremos primero una definición general de la integral de una función cuyo dominio es un intervalo cerrado y la aplicaremos después a la clase de funciones que son continuas sobre un intervalo cerrado.

Para definir la integral usaremos un tipo especial de suma, cuya descripción vamos a dar a continuación.

Sea F una función cuyo dominio es el intervalo cerrado $[a; b]$, sea P_n una partición de $[a; b]$ determinada por el conjunto $\{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ y cuya norma es \mathcal{N}_P y sea $T_n = \{t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-1}, t_n\}$ un aumento de la partición P_n . Recuérdese que $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ para $i = 1, 2, \dots, n$, y fórmese la suma

$$F(t_1) \Delta x_1 + F(t_2) \Delta x_2 + F(t_3) \Delta x_3 + \dots + F(t_{n-1}) \Delta x_{n-1} + F(t_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n F(t_i) \Delta x_i.$$

Esta suma se expresará por el símbolo $S(F; P_n; T_n)$; o sea que

$$S(F; P_n; T_n) = \sum_{i=1}^n F(t_i) \Delta x_i.$$

Conviene hacer énfasis que en general, no se puede considerar a $S(F; P_n; T_n)$ como término general del rango de una sucesión. La selección de un valor para n no determina un valor único de $S(F; P_n; T_n)$ puesto que dado un valor de n hay un número infinito de particiones posibles con n subintervalos y un número infinito de aumentos para cada partición. Por tanto, no podemos hablar del "límite" de $S(F; P_n; T_n)$ (cuando n crece sin límite) en el sentido de la definición de $\lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = b$ dado en la pág. 218, Sec. 5.1.

Definición de la integral definida de F . Sea F una función cuyo dominio contenga al intervalo cerrado $[a; b]$, siendo $a < b$. Si existe un número I tal que a cada $\varepsilon > 0$ corresponda una $\delta > 0$ tal que

$$|S(F; P_n; T_n) - I| < \varepsilon$$

para todas las particiones P_n y todos los aumentos T_n con $\mathcal{N}_F < \delta$, este número (único *) es llamado la **integral definida** (de Riemann) de F sobre $[a; b]$. Si tal número I existe decimos que F es **integrable** (en el sentido Riemann) sobre $[a; b]$ y denotamos este número mediante el símbolo $\int_a^b F(x) dx$; esto es:

$$I = \int_a^b F(x) dx.$$

Naturalmente, el uso de x en estos símbolos es totalmente arbitrario y bien puede usarse cualquier otro símbolo como u , s , ζ .

En $\int_a^b F(x) dx$, a se llama **límite inferior de integración**, b es el **límite superior de integración** y $F(x)$ el **integrando**.

La integral recién definida es llamada usualmente integral de Riemann para distinguirla de otros tipos de integrales usadas en matemáticas, como por ejemplo la integral de Riemann-Stieltjes y la integral de Lebesgue. Cuando hablemos de la integral de F en este libro, nos referimos a la integral recién definida.

Dimos una definición de integral definida $\int_a^b F(x) dx$, sobre la hipótesis de que $a < b$. Es útil tener una definición de $\int_a^b F(x) dx$ cuando el límite superior de integración a es menor que el límite inferior b y también para cuando $a = b$.

Si F está definida sobre $[a; b]$, siendo $a < b$, entonces **definimos**

$$\int_b^a F(x) dx = -\int_a^b F(x) dx \quad (15)$$

Además, **definimos**

$$\int_a^a F(x) dx = 0. \quad (16)$$

Algunos escritores expresan que la integral $\int_a^b F(x) dx$ es el "valor límite" de las sumas $S(F; P_n; T_n)$ pero debemos tener precaución de que al interpretar esta afirmación signifiquemos que dada una $\varepsilon > 0$, exista una $\delta > 0$ tal que

$$\left| S(F; P_n; T_n) - \int_a^b F(x) dx \right| < \varepsilon$$

para todas las particiones P_n y aumentos T_n en que $\mathcal{N}_F < \delta$.

Sea F una función dada, definida sobre un intervalo dado $[a; b]$. Un intento de responder a las preguntas:

* Para una demostración de que cuando el número I existe es único, véase J.M.H. Olmsted, *Real Variables*, Appleton-Century-Crofts. New York, 1959, p. 133.

(i) ¿Existe la integral de F sobre $[a; b]$?

(ii) Si la integral existe, ¿Cuál es su valor?,

mediante una aplicación directa de la definición de integral no es, excepto en casos triviales, una cuestión elemental. Si, no obstante, se sabe que la integral de una función existe, entonces el problema de hallar el valor de dicha integral puede reducirse al problema de hallar el límite del término general del rango de una sucesión. Este es un hecho extremadamente importante; examinémoslo más de cerca y veamos por qué es cierto. Supóngase que se sabe que para la función F existe $\int_a^b F(x) dx = I$; esto significa, de acuerdo con la definición, que dada cualquier $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ para la cual

$$|S(F; P_n; T_n) - I| < \varepsilon$$

para todas las particiones P_n y aumentos T_n con $\mathcal{N}_F < \delta$. Supóngase ahora que seleccionamos un conjunto de particiones $\{P_n\}$ de $[a; b]$ y un aumento T_n de cada partición, de forma tal que para un valor dado de n , P_n y T_n quedan determinadas en forma única; supóngase además que la selección del conjunto $\{P_n\}$ se hace de tal modo que para cada $\delta > 0$ existe un entero positivo N para el cual $\mathcal{N}_F < \delta$ para toda $n \geq N$. En ese caso será cierto que una sucesión G que tiene la propiedad de que

$$S(F; P_n; T_n) = G(n).$$

Con este supuesto, demos una $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ el número en la definición de integral definida cuya existencia queda garantizada por la suposición de que la integral existe; entonces existe un entero positivo N , tal que $\mathcal{N}_F < \delta$ para toda $n \geq N$ y de aquí que

$$|G(n) - I| < \varepsilon$$

para toda $n \geq N$.

En otras palabras, podemos decir en este caso especial (ya que aquí $S(F; P_n; T_n)$ es el término general del rango de una sucesión) que

$$\int_a^b F(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S(F; P_n; T_n).$$

Es importante comprender que esto no es una definición sino simplemente una igualdad, que es verdadera en virtud del hecho de que F está dada como una función para la cual existe $\int_a^b F(x) dx$.

Hay muchos teoremas que dan condiciones de una función F que sean suficientes para asegurar la existencia de $\int_a^b F(x) dx$. Uno de los más sencillos y más útiles de ellos es el siguiente que enunciaremos sin demostración y que formará la base de nuestro trabajo con integrales.

Teorema 1. Si F es continua sobre el intervalo cerrado $[a; b]$, entonces $\int_a^b F(x) dx$ existe.*

Se ha señalado que si sabemos que existe $\int_a^b F(x) dx$ entonces es posible seleccionar un conjunto de particiones $\{P_n\}$ y un conjunto de aumentos $\{T_n\}$ de modo tal que dado un valor de n , la suma $S(F; P_n; T_n)$ quede determinada en forma única. Una forma en que se puede construir tal conjunto de particiones $\{P_n\}$ consiste en hacer que la partición P_n divida al

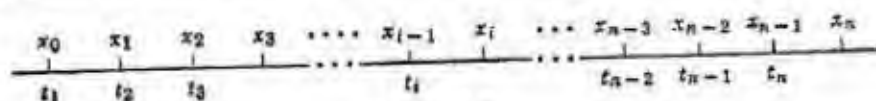


Fig. 5.6

intervalo $[a; b]$ en n subintervalos iguales, de longitud $\frac{b-a}{n}$, es decir haciendo $\frac{b-a}{n} = \Delta x$, P_n queda determinada por el conjunto de $n+1$ números $\{a, a + \Delta x, a + 2\Delta x, a + 3\Delta x, \dots, a + (n-1)\Delta x, b\}$

y

$$\mathcal{N}_P = \frac{b-a}{n} = \Delta x.$$

Para un aumento T_n de P_n podemos seleccionar t_i como el punto extremo izquierdo del subintervalo $[x_{i-1}; x_i]$, esto es:

$$T = \{a, a + \Delta x, a + 2\Delta x, \dots, a + (n-1)\Delta x\}.$$

Ciertamente que para cualquier $\delta > 0$ podemos seleccionar un entero positivo N tal que

$$\mathcal{N}_P = \frac{b-a}{n} < \delta$$

para toda $n \geq N$. La partición P_n y el aumento T_n se muestran gráficamente en la Fig. 5.6.

Para estas formas de escoger P_n y T_n , tenemos que

$$\begin{aligned} S(F; P_n; T_n) &= [F(a)]\Delta x + [F(a + \Delta x)]\Delta x + [F(a + 2\Delta x)]\Delta x + \dots \\ &\quad + [F(a + (n-1)\Delta x)]\Delta x \\ &= \sum_{i=1}^n [F(a + (i-1)\Delta x)]\Delta x, \end{aligned}$$

y vemos que $S(F; P_n; T_n)$ puede considerarse como el término general del rango de una sucesión y que si sabemos que $\int_a^b F(x) dx$ existe, podemos decir que

$$\int_a^b F(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F[a + (i-1)\Delta x] \Delta x.$$

* Para una demostración de este teorema véase: Olmsted: *Real Variables*, Sec. 502.

Pudimos haber seleccionado el aumento T_n de P_n como el conjunto de puntos extremos derechos de los subintervalos de P_n ; es decir que

$$T_n = \{a + \Delta x, a + 2\Delta x, a + 3\Delta x, \dots, a + n\Delta x\},$$

de modo que

$$S(F; P_n; T_n) = \sum_{i=1}^n F(a + i\Delta x) \Delta x,$$

y entonces podemos decir que

$$\int_a^b F(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F(a + i\Delta x) \Delta x.$$

Ejemplo 1. Halle $\int_0^5 x^2 dx$ seleccionando para ello la partición P_n de $[0; 5]$

como el conjunto de n intervalos de longitud $\Delta x = \frac{5-0}{n} = \frac{5}{n}$ y T_n como el conjunto de puntos extremos izquierdos de los subintervalos.

Solución. En este ejemplo, P_n queda determinada por el conjunto de números

$$\{0, \Delta x, 2\Delta x, 3\Delta x, \dots, (n-1)\Delta x, 5\}, \quad (17)$$

y con t_i escogida como el punto extremo izquierdo del intervalo $[x_{i-1}; x_i]$, el aumento será

$$T_n = \{0, \Delta x, 2\Delta x, 3\Delta x, \dots, (n-1)\Delta x\}.$$

Ahora, para $F(x) = x^2$,

$$\begin{aligned} S(F; P_n; T_n) &= \sum_{i=1}^n F(t_i) \Delta x \\ &= (0)^2 \Delta x + (\Delta x)^2 \Delta x + (2\Delta x)^2 \Delta x + \dots + [(n-1)\Delta x]^2 \Delta x \\ &= (\Delta x)^3 [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2]. \end{aligned}$$

Según el teorema 1, sabemos que existe $\int_0^5 x^2 dx$ y que por tanto

$$\int_0^5 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (\Delta x)^3 [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2].$$

Según la ecuación (13) de la Sec. 5.2.

$$\begin{aligned} (\Delta x)^3 [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2] &= (\Delta x)^3 \cdot \frac{1}{6} (n-1) [(n-1) + 1] \\ [2(n-1) + 1] &= (\Delta x)^3 \cdot \frac{1}{6} (n-1) (n) (2n-1), \end{aligned}$$

y ya que $\Delta x = 5/n$

$$\begin{aligned} S(F; P_n; T_n) &= \frac{125}{n^3} \cdot \frac{1}{6} (n-1) (n) (2n-1) \\ &= \frac{125}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) (1) \left(2 - \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} \int_0^5 x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{125}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) (1) \left(2 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{125}{6} (1) (1) (2) = \frac{125}{3}. \end{aligned}$$

Es interesante interpretar geoméricamente los resultados del ejemplo 1. En dicho ejemplo, la suma $S(F; P_n; T_n) = \sum_{i=1}^n F(t_i) \Delta x$, siendo $t_i = (i-1) \Delta x$, puede interpretarse como la suma de las áreas de n rectángulos, cada uno de ancho Δx y cuyas alturas son

$$(0)^2, (\Delta x)^2, (2\Delta x)^2, \dots, (i\Delta x)^2, \dots, [(n-1)\Delta x]^2$$

respectivamente. Cada uno de estos rectángulos está inscrito en la región limitada por la gráfica de $F = \{(x, y) | y = x^2\}$ y las líneas cuyas ecuaciones son $x = 0$, $x = 5$ y $y = 0$. La Fig. 5.7 muestra el rectángulo cuya área se da mediante el término $F(t_i) \Delta x = t_i^2 \Delta x = [(i-1)\Delta x]^2$, estando Δx en la suma $S(F; P_n; T_n)$.

A la luz del análisis de áreas hecho en la Sec. 5.1 es evidente que para cada valor de n , el valor de $S(F; P_n; T_n)$ es una aproximación para el área de la región recién descrita. Si se aumenta el valor de n , obtenemos una mayor aproximación al área. Por tanto, supuesto que exista el área A de la región limitada

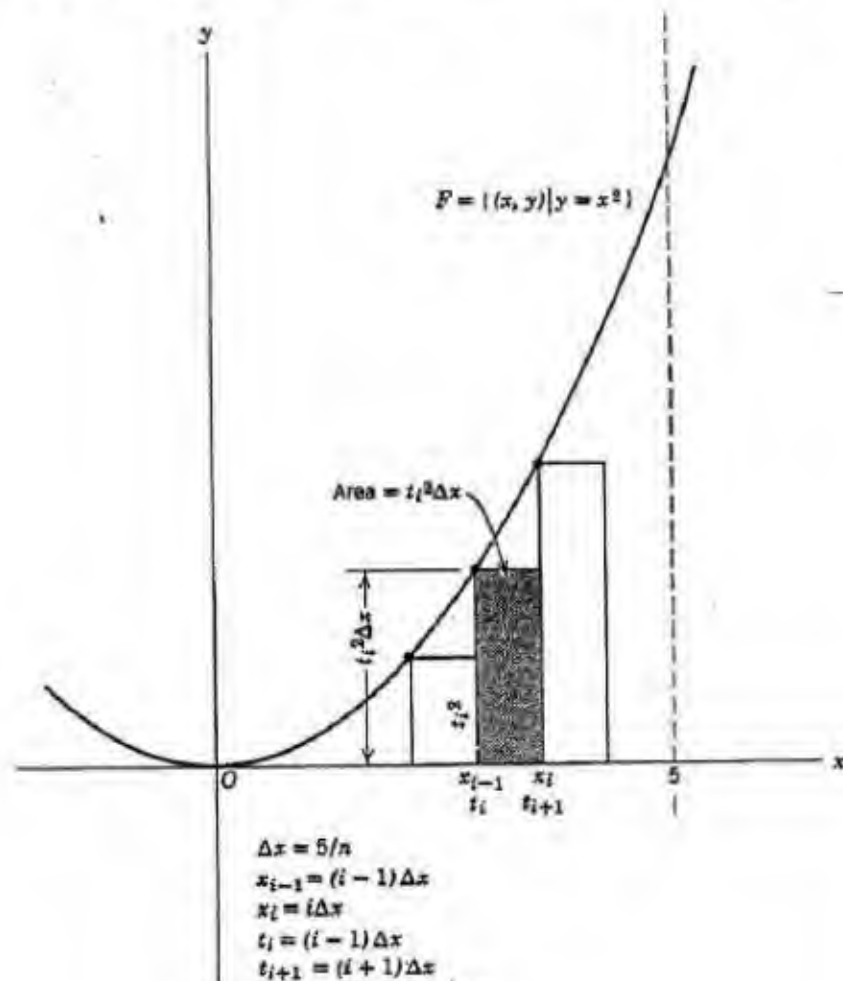


Fig. 5.7

por las gráficas de $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 5$, es evidente que dicha área debe considerarse igual a $\lim_{n \rightarrow \infty} S(F; P_n; T_n)$ es, que

$$A = \int_0^5 x^2 dx = \frac{125}{3}.$$

El uso de integrales para evaluar áreas de regiones planas se discutirá en la Sec. 5.8.

Ejemplo 2. Calcule $\int_0^5 x^2 dx$ escogiendo la partición P_n de $[0; 5]$ como el

conjunto de n intervalos de longitud $\Delta x = \frac{5-0}{n} = \frac{5}{n}$; y T_n como el conjunto de puntos extremos derechos de los subintervalos.

Solución. En este ejemplo P_n está determinada por el conjunto de números (17). Con t_i escogido como el punto extremo derecho del intervalo $[x_{i-1}; x_i]$, el aumento es

$$T_n = \{\Delta x, 2\Delta x, 3\Delta x, \dots, n\Delta x\}$$

y con $F(x) = x^2$,

$$\begin{aligned} S(F; P_n; T_n) &= \sum_{i=1}^n F(t_i) \Delta x \\ &= (\Delta x)^2 \Delta x + (2\Delta x)^2 \Delta x + (3\Delta x)^2 \Delta x + \dots + (n\Delta x)^2 \Delta x \\ &= (\Delta x)^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \\ &= \left(\frac{125}{n^3}\right) \left(\frac{1}{6}\right) (n)(n+1)(2n+1)^* \\ &= \frac{125}{6} (1) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Ya que, según el teorema 1, $\int_0^5 x^2 dx$ existe, tenemos

$$\int_0^5 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{125}{6} (1) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{125}{6} (1) (1) (2) = \frac{125}{3},$$

que por supuesto, es el mismo valor que hallamos en el ejemplo 1.

Cuando sabemos que $\int_a^b F(x) dx$ existe, hemos mostrado dos modos de seleccionar un conjunto de particiones $\{P_n\}$ y un conjunto de aumentos $\{T_n\}$ tales que la suma $S(F; P_n; T_n)$ sea el término general del rango de una sucesión para la cual podemos escribir

$$\int_a^b F(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S(F; P_n; T_n).$$

Hay, por supuesto, un número infinito de elecciones de $\{P_n\}$ y $\{T_n\}$ que darán el mismo resultado.

* Por medio de (13) de la Sec. 5.2.

Ejemplo 3. Calcule $\int_0^a \frac{x^3}{a^3} dx$.

Solución. Puesto que sabemos por el Teorema 1, que la integral existe, podemos, como en los ejemplos previos, escoger P_n de modo que divida al intervalo $[0; a]$ en n subintervalos iguales de longitud a/n ; es decir que P_n queda determinada por el conjunto de $(n+1)$ números

$$\left\{ 0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \frac{3a}{n}, \dots, (n-1) \frac{a}{n}, n \frac{a}{n} \right\}.$$

Como aumento T_n de P_n , escogemos para t_i el punto medio del intervalo $[x_i; x_{i+1}]$; esto es que

$$T_n = \left\{ \frac{a}{2n}, \frac{3a}{2n}, \frac{5a}{2n}, \dots, \frac{(2n-1)a}{2n} \right\}.$$

Para esta selección de P_n y T_n y para $F(x) = x^3/a^3$, tenemos que

$$\begin{aligned} S(F; P_n; T_n) &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{(2i-1)a}{2n} \right]^3 \cdot \frac{a}{n} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{(2i-1)^3 a^4}{(2n)^3 n} = \frac{a^4}{8n^4} \sum_{i=1}^n (2i-1)^3. \end{aligned}$$

Según el ejercicio 22 de la Sec. 5.2 podemos escribir

$$S(F; P_n; T_n) = \frac{a}{8n^4} (2n^4 - n^4) = a \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8n^3} \right).$$

Así que

$$\int_0^a \frac{x^3}{a^3} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} a \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8n^3} \right) = \frac{a}{4}.$$

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios siguientes note que, según el teorema 1, la integral existe. Calcule cada integral en dos formas: primero escogiendo una partición del intervalo en subintervalos iguales y seleccionando los puntos extremos izquierdos de los subintervalos como el aumento (como en el ejemplo 1); segundo, escogiendo los puntos extremos derechos de los subintervalos como el aumento (como en el ejemplo 2).

1. $\int_0^1 (1 + 2x^2) dx$.

2. $\int_0^2 x^3 dx$.

3. $\int_2^5 x^3 dx$.

4. $\int_0^2 x^4 dx$.

5. $\int_1^3 x^4 dx$.

6. $\int_0^a \frac{x^4}{a^4} dx$.

5.5 El teorema fundamental del cálculo. En la sección precedente vimos que el cálculo de $\int_a^b F(x) dx$ directamente de la definición, aun para una función F muy sencilla es tedioso. Para la mayoría de las funciones el cálculo de

integrales definidas según el método de los ejemplos 1, 2 y 3 de la Sec. 5.4 es prácticamente imposible mediante operaciones manuales. En esta sección enunciaremos el teorema comúnmente llamado Teorema Fundamental del Cálculo. Este teorema nos muestra que calcular una integral definida de una función continua F es equivalente a encontrar una antiderivada de $F(x)$. Este es uno de los más importantes y útiles resultados de las matemáticas.

Teorema 2. El teorema fundamental del cálculo. Sea F una función continua sobre $[a; b]$. Si G es cualquier antiderivada de F , sobre $[a; b]$, es decir, si $G'(x) = F(x)$ cuando $x \in [a; b]$, entonces

$$\int_a^b F(x) dx = G(b) - G(a).$$

Una demostración de este teorema aparece en la Sec. 5.6.

Para ilustrar el uso del teorema 2, consideremos el cálculo de $\int_0^5 x^2 dx$. Aquí $F(x) = x^2$ y F es continua sobre $[0; 5]$. Sabemos que $x^3/3$ es una antiderivada de x^2 , esto es que podemos hacer $G(x) = x^3/3$ y usar el teorema 2 para calcular

$$\int_0^5 x^2 dx = G(5) - G(0) = \frac{(5)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3} = \frac{125}{3}.$$

Este valor es el que encontramos para $\int_0^5 x^2 dx$ en los ejemplos 1 y 2 de la Sec. 5.4.

A menudo se nos presentará la expresión $G(b) - G(a)$, la que expresaremos mediante el símbolo $G(x) \Big|_a^b$; esto es:

$$G(x) \Big|_a^b = G(b) - G(a).$$

Si $G(x)$ es una suma de dos o más términos, usaremos los símbolos $[G(x)]_a^b$ para representar la expresión $G(b) - G(a)$. Por ejemplo:

$$\left[\sin x \right]_{-\pi}^{\pi/6} = \sin \frac{\pi}{6} - \sin (-\pi) = \frac{1}{2};$$

$$\left[x^2 - 2x \right]_1^3 = [(3)^2 - 2(3)] - [(1)^2 - 2(1)] = 4.$$

Si empleamos esta notación, la conclusión del teorema fundamental se puede escribir en la forma

$$\int_a^b F(x) dx = [G(x)]_a^b$$

siendo $G'(x) = F(x)$ para $x \in [a; b]$.

En el Teorema Fundamental, la función G es *cualquiera* antiderivada de F y es costumbre usar la más sencilla que podamos hallar. Por ejemplo si $F(x) = x$, sabemos que cada una de las expresiones $x^2/2$, $(x^2/2) + 9$, $(x^2/2) - 63$ es una

antiderivada de $F(x)$ pero con seguridad que para calcular $\int_1^2 x dx$ escogeremos

$$G(x) = x^2/2.$$

Naturalmente que podíamos haber seleccionado igualmente $G(x) = (x^2/2) + 9$ o $G(x) = (x^2/2) - 63$. Para cada una de estas selecciones obtendríamos el mismo valor para $\int_1^2 x dx$ ya que

$$\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \left[\frac{x^2}{2} + 9\right]_1^2 = \left[\frac{x^2}{2} - 63\right]_1^2 = \frac{3}{2}.$$

Ejemplo 1. Use el teorema 2 para evaluar cada una de las siguientes integrales:

$$(a) \int_{-2}^2 (x^2 - 3x + 2) dx; \quad (b) \int_0^{\pi/2} \sin x dx.$$

Solución. (a) Notamos que

$$D_x \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right) = x^2 - 3x + 2,$$

así pues

$$G(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x$$

es una antiderivada de $x^2 - 3x + 2$. Según el teorema 2 tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 (x^2 - 3x + 2) dx &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^2 \\ &= \left(\frac{8}{3} - \frac{12}{2} + 4 \right) - \left(-\frac{8}{3} - \frac{12}{2} - 4 \right) = \frac{40}{3}. \end{aligned}$$

(b) $G(x) = -\cos x$ es una antiderivada de $\sin x$, de modo que

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = \left(-\cos \frac{\pi}{2} \right) - (-\cos 0) = 1.$$

Al aplicar el teorema 2 para evaluar $\int_a^b F(x) dx$ buscamos una función G con la propiedad de que

$$G'(x) = F(x) \quad \text{para } x \in [a; b].$$

Esto significa que buscamos una función G tal que si $y = G(x)$, entonces

$$dy = F(x) dx \quad \text{para } x \in [a; b]. \quad (18)$$

Con frecuencia es útil pensar en determinar una antiderivada de $F(x)$ con vista a resolver la ecuación diferencial (18). Para hallar una solución de (18), y por tanto una antiderivada de $F(x)$, haremos uso frecuente de los tres hechos siguientes, que fueron obtenidos por vez primera en la Sec. 3.14.

$$\text{Si } dy = au^p du, \text{ entonces } y = \frac{a}{p+1} u^{p+1} + k, \quad p \neq -1; \quad (19)$$

$$\text{si } dy = a \sin u du, \text{ entonces } y = -a \cos u + k; \quad (20)$$

$$\text{si } dy = a \cos u du, \text{ entonces } y = a \sin u + k. \quad (21)$$

En estas proposiciones podemos pensar en u como la correspondiente $V(x)$, de x ante la función V . Como ejemplo del uso de (19):

$$\text{Si } dy = 2(x^2 + a^2)^{2/3} d(x^2 + a^2),$$

$$\text{entonces } y = \frac{2}{5/3} (x^2 + a^2)^{5/3} + k = \frac{6}{5} (x^2 + a^2)^{5/3} + k.$$

Para las integrales definidas que encontraremos en este capítulo el integrando se puede escribir de modo que la integral se pueda calcular mediante (19), (20) y (21) y las propiedades fundamentales de las integrales, expresadas en los teoremas 3 y 4 dados en la Sec. 5.7.

Ejemplo 2. Calcule $\int_1^2 x \sqrt{4-x^2} dx$.

Solución. Necesitamos determinar una antiderivada de $x\sqrt{4-x^2}$, o como ya hemos destacado, deseamos hallar una $y = G(x)$ tal que

$$dy = x \sqrt{4-x^2} dx.$$

Nótese que podemos escribir

$$dy = x \sqrt{4-x^2} dx = -\frac{1}{2} (-2x \sqrt{4-x^2}) dx = -\frac{1}{2} (4-x^2)^{1/2} d(4-x^2)$$

que es de la forma

$$dy = au^p du \quad \text{donde } u = 4-x^2.$$

De ahí que, según (19), tengamos que

$$y = \frac{-\frac{1}{2}}{3/2} (4-x^2)^{3/2} = -\frac{1}{3} (4-x^2)^{3/2}$$

sea una antiderivada de

$$\begin{aligned} \int_1^2 x \sqrt{4-x^2} dx &= -\frac{1}{3} (4-x^2)^{3/2} \Big|_1^2 \\ &= -\frac{1}{3} (4-4)^{3/2} - \left(-\frac{1}{3} (4-1)^{3/2} \right) \\ &= \frac{1}{3} (3)^{3/2} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3. Calcular las integrales

$$(a) \int_{-4}^4 (4-x)^{2/3} dx; \quad (b) \int_0^1 \frac{x}{(4-x^2)^2} dx;$$

$$(c) \int_0^{\pi/2} \cos(2x) dx; \quad (d) \int_0^1 x \sin x^2 dx.$$

Solución. Puesto que para cada una de las integrales la función dada por el integrando es continua sobre el intervalo de integración, podemos usar el Teorema Fundamental para calcularlas.

(a) Deseamos hallar una $y = G(x)$ tal que

$$dy = (4-x)^{2/3} dx.$$

Notamos que la expresión $4-x$ representa a las u de la expresión (19). Para poner $dy = (4-x)^{2/3} dx$ en la forma

$$dy = au^p du$$

notemos que $d(4-x) = (-1)(dx)$, por lo que podemos escribir

$$dy = (4-x)^{2/3} dx = -1(4-x)^{2/3}(-1) dx = -1(4-x)^{2/3} d(4-x).$$

Por tanto, según (19),

$$y = \frac{-1}{5/3} (4-x)^{5/3} = -\frac{3}{5} (4-x)^{5/3}$$

es una antiderivada de $(4-x)^{2/3}$ y

$$\int_{-4}^4 (4-x)^{2/3} dx = -\frac{3}{5} (4-x)^{5/3} \Big|_{-4}^4 = \frac{96}{5}.$$

(b) Para encontrar una $y = G(x)$ tal que

$$dy = \frac{x}{(4-x^2)^2} dx = x(4-x^2)^{-2} dx,$$

observemos que

$$x(4-x^2)^{-2} dx = -\frac{1}{2}(4-x^2)^{-2}(-2x) dx = -\frac{1}{2}(4-x^2)^{-2} d(4-x^2)$$

y de (19) se sigue que

$$y = \frac{-1}{-1} (4-x^2)^{-1} = \frac{1}{2(4-x^2)}.$$

Luego

$$\int_0^1 \frac{x}{(4-x^2)^2} dx = \int_0^1 -\frac{1}{2} (4-x^2)^{-2} d(4-x^2) = \frac{1}{2(4-x^2)} \Big|_0^1 = \frac{1}{24}.$$

(c) Para encontrar una $y = G(x)$ tal que

$$dy = \cos(2x) dx$$

hagamos

$$dy = \frac{1}{2} [\cos(2x)] 2 dx = \frac{1}{2} [\cos(2x)] d(2x).$$

Mediante (21) tenemos que

$$y = \frac{1}{2} \sin(2x),$$

y por tanto,

$$\int_0^{\pi/6} \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \sin(2x) \Big|_0^{\pi/6} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \sin 0 = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$(d) \int_0^1 x \sin x^2 dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \sin x^2 d(x^2)$$

$$= -\frac{1}{2} \cos x^2 \Big|_0^1 \quad [\text{mediante (20)}]$$

$$= -\frac{1}{2} \cos 1 + \frac{1}{2} \cos 0 = \frac{1}{2}(1 - \cos 1).$$

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 14, compruebe que la integral satisface las condiciones del Teorema Fundamental y use dicho teorema para calcular la integral.

$$1. \int_0^2 x^{1/3} dx.$$

$$2. \int_1^3 x^{-2} dx.$$

$$3. \int_{-2}^0 (x+2)^5 dx.$$

$$4. \int_0^{\sqrt{3}} u \sqrt{u^2+1} du.$$

$$5. \int_{-1}^0 \frac{dy}{(1-y)^2}.$$

$$6. \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x dx.$$

Sugerión: Observe que $\cos^2 x \sin x dx$ se puede escribir en la forma $au^p du$, donde $u = \cos x$.

$$7. \int_{-\pi/4}^{\pi/2} \sin^3 x \cos x dx.$$

$$8. \int_0^2 (2x^2 - 3x + 2)^{3/2} \left(x - \frac{3}{4}\right) dx.$$

$$9. \int_0^{\pi/4} \sin 2x dx.$$

$$10. \int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos x^2 dx.$$

$$11. \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$$

$$12. \int_1^3 u(u^2+2) du.$$

$$13. \int_1^{\sqrt{2}} x(2-x^2)^2 dx.$$

$$14. \int_2^4 (u^2-u)^{1/2} \left(u - \frac{1}{2}\right) du.$$

Evalúe:

$$15. \int_1^2 x dx.$$

$$16. \int_2^3 ux du.$$

$$17. D_x \int_1^2 (t^2 - 2t) dt.$$

$$18. \int_0^{\pi/4} \left[D_x \left(\frac{x}{2} - \frac{\cos 2x}{4} \right) \right] dx.$$

$$19. \int_{\pi/6}^{\pi/3} [D_x(\sin^2 x)] dx.$$

$$20. D_x \left(\int_1^x x^2 u du \right).$$

5.6 Demostración del Teorema Fundamental. En esta sección daremos una demostración del teorema 2; una demostración alternativa se da en la sección 5.7.

Deseamos demostrar que:

Si F es continua sobre $[a; b]$ y si G es una función tal que $G'(x) = F(x)$ para $x \in [a; b]$, entonces

$$\int_a^b F(x) dx = G(b) - G(a).$$

Demostración. Sea P_n cualquier partición de $[a; b]$ en subintervalos $[x_0; x_1]$, $[x_1; x_2]$, ..., $[x_{n-1}; x_n]$. Dado que por hipótesis G es continua y derivable sobre $[a; b]$ es entonces continua y derivable sobre cada subintervalo $[x_{i-1}; x_i]$ de P_n . Del Teorema del Valor Medio para Derivadas (Sec. 3.10) sabemos que existe un número $t_i \in [x_{i-1}; x_i]$ para el cual

$$G(x_i) - G(x_{i-1}) = G'(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$G(x_i) - G(x_{i-1}) = F(t_i) \Delta x_i \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (22)$$

Por tanto, si para cualquier partición P_n escogemos como aumento T_n^* formado por el conjunto $\{t_1, t_2, t_3, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots, t_n\}$ para el cual se cumpla (22), tendremos que

$$\begin{aligned} S(F; P_n; T_n^*) &= \sum_{i=1}^n F(t_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n G(x_i) - G(x_{i-1}) \\ &= G(x_n) - G(x_0) = G(b) - G(a). \end{aligned} \quad (23)$$

Puesto que F es continua sobre $[a; b]$, del Teorema 1 sabemos que $\int_a^b F(x) dx$ existe: de modo que dada cualquier $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\left| S(F; P_n; T_n) - \int_a^b F(x) dx \right| < \varepsilon \quad (24)$$

para todas las particiones P_n y los aumentos T_n con $N_P < \delta$. Escogamos ahora una partición P_n de $[a; b]$ de forma que $N_P < \delta$ y como aumento T_n de P_n el aumento T_n^* para la cual se cumplan (22) y (23). Para esta selección de P_n y de T_n (24) se debe cumplir y ya que

$$S(F; P_n; T_n) = S(F; P_n; T_n^*) = G(b) - G(a),$$

tenemos que

$$\left| [G(b) - G(a)] - \int_a^b F(x) dx \right| < \varepsilon$$

para cualquier $\varepsilon > 0$; por tanto,

$$G(b) - G(a) = \int_a^b F(x) dx,$$

como queríamos demostrar. ■

5.7 Propiedades de las integrales definidas. La integral definida posee importantes propiedades que la convierten en una poderosa herramienta para el desarrollo de las matemáticas y para sus aplicaciones a la física y las ciencias sociales. Propondremos en esta sección algunas de las propiedades fundamentales de las integrales definidas. Los teoremas 3, 4 y 7 son los resultados básicos para las aplicaciones de las integrales que hemos de considerar.

Teorema 3. Si F y G son dos funciones integrables sobre $[a; b]$, entonces

$$\int_a^b [F(x) + G(x)] dx = \int_a^b F(x) dx + \int_a^b G(x) dx.$$

Demostración. Sabemos que F y G son integrales sobre $[a; b]$. Sea una $\varepsilon > 0$ dada; entonces existe una $\delta_1 > 0$ tal que

$$\left| S(F; P_n; T_n) - \int_a^b F(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todas las particiones P_n y aumentos T_n con $N_P < \delta_1$, y existe una $\delta_2 > 0$ tal que

$$\left| S(G; P_n; T_n) - \int_a^b G(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todas las P_n y T_n con $N_P < \delta_2$.

Ahora bien

$$\begin{aligned} S(F + G; T_n; P_n) &= \sum_{i=1}^n [F(t_i) + G(t_i)] \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^n F(t_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n G(t_i) \Delta x_i \\ &= S(F; P_n; T_n) + S(G; P_n; T_n). \end{aligned}$$

Por tanto, si hacemos δ igual a la menor de δ_1 y δ_2 , entonces

$$\begin{aligned} &\left| S(F + G; P_n; T_n) - \left(\int_a^b F(x) dx + \int_a^b G(x) dx \right) \right| \\ &= \left| S(F; P_n; T_n) - \int_a^b F(x) dx + S(G; P_n; T_n) - \int_a^b G(x) dx \right| \\ &\leq \left| S(F; P_n; T_n) - \int_a^b F(x) dx \right| + \left| S(G; P_n; T_n) - \int_a^b G(x) dx \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

para toda P_n y T_n con $N_P < \delta$. En consecuencia, de la definición de integral definida resulta que

$$\int_a^b F(x) dx + \int_a^b G(x) dx = \int_a^b [F(x) + G(x)] dx. \quad \blacksquare$$

Teorema 4. Si F es integrable sobre $[a; b]$ y si k es un número real, entonces

$$\int_a^b kF(x) dx = k \int_a^b F(x) dx.$$

Se le pide al estudiante una demostración del teorema 4 en el ejercicio 8 al final de esta sección.

Ejemplo 1. Calcule $\int_0^{\pi/2} (12x^2 + 4 \cos x) dx$.

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (12x^2 + 4 \cos x) dx &= \int_0^{\pi/2} 12x^2 dx + \int_0^{\pi/2} 4 \cos x dx, \text{ según el teorema 3;} \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} 3x^2 dx + 4 \int_0^{\pi/2} \cos x dx, \text{ según el teorema 4;} \\ &= 4x^3 \Big|_0^{\pi/2} + 4 \sin x \Big|_0^{\pi/2} \quad \text{según el teorema 2;} \\ &= 4 \frac{\pi^3}{8} + 4 \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^3}{2} + 4. \end{aligned}$$

Teorema 5. Si F es integrable sobre $[a; b]$ y si $F(x) \geq 0$ para $x \in [a; b]$, entonces

$$\int_a^b F(x) dx \geq 0.$$

Demostración. Dado que $F(x) \geq 0$ para $x \in [a; b]$, $S(F; P_n; T_n) \geq 0$.

Supóngase que $\int_a^b F(x) dx$ fuera negativa; entonces $\int_a^b F(x) dx = I < 0$, y $|S(F; P_n; T_n) - I| = S(F; P_n; T_n) - I \geq |I| > 0$ para todas las particiones P_n y

aumentos T_n . Pero esto es imposible ya que si seleccionamos ϵ de forma que $0 < \epsilon < |I|$ entonces existe una $\delta > 0$ tal que $|S(F; P_n; T_n) - I| < \epsilon < |I|$ para toda P_n y toda T_n cuya $N_r < \delta$. De donde $\int_a^b (F(x) dx$ no puede ser negativa e

$$\int_a^b F(x) dx \geq 0.$$

Teorema 6. Si F y G son integrables sobre $[a; b]$ y si $F(x) \geq G(x)$ para $x \in [a; b]$, entonces

$$\int_a^b F(x) dx \geq \int_a^b G(x) dx.$$

Se le pide al estudiante una demostración de este teorema en el ejercicio 10, al final de esta sección.

Teorema 7. Si F es integrable sobre $[a; c]$ y si b es un número tal que $a < b < c$, entonces

$$\int_a^c F(x) dx = \int_a^b F(x) dx + \int_b^c F(x) dx.$$

La demostración de este Teorema comprende consideraciones sobre el comportamiento de las sumas $S(F; P_n; T_n)$ que no tienen cabida en un primer curso de cálculo y por tanto omitiremos la demostración. Se puede encontrar en: "Real Variables" de Olmsted, p. 135.

La definición (15) de la Sec. 5.4 se puede usar, junto con el teorema 7, para demostrar que

$$\int_a^b F(x) dx + \int_b^c F(x) dx = \int_a^c F(x) dx \quad (25)$$

independientemente del orden de los números a , b , y c y con la única condición de que F sea integrable sobre un intervalo cerrado que contenga a los números a , b y c .

Ejemplo 2. Si $c < a < b$ y si F es integrable sobre $[c; b]$ demuestre que la igualdad (25) se cumple.

Solución. Para $c < a < b$, tendremos, según el teorema 7 que

$$\int_c^a F(x) dx + \int_a^b F(x) dx = \int_c^b F(x) dx.$$

Según la definición (15) de la Sec. 5.4 esto se puede poner así:

$$-\int_a^c F(x) dx + \int_a^b F(x) dx = -\int_b^c F(x) dx$$

o bien

$$\int_a^b F(x) dx + \int_b^c F(x) dx = \int_a^c F(x) dx.$$

Teorema 8. Si F es continua sobre $[a; b]$ y si r y s son números en $[a; b]$ tales que $F(r)$ es el máximo de $F(x)$ y $F(s)$ es el mínimo de $F(x)$ para $x \in [a; b]$, entonces

$$F(s)(b-a) \leq \int_a^b F(x) dx \leq F(r)(b-a).$$

Demostración. Supuesto que F es continua sobre $[a; b]$, el Teorema 1 nos asegura que $\int_a^b F(x) dx$ existe.

Considérese $S(F; P_n; T_n) = \sum_{i=1}^n F(t_i) \Delta x_i$. Como $F(t_i) \leq F(r)$ para $i = 1, 2, 3, \dots, n$, tenemos que

$$\begin{aligned} S(F; P_n; T_n) &\leq \sum_{i=1}^n F(r) \Delta x_i \\ &\leq F(r) \sum_{i=1}^n \Delta x_i. \end{aligned}$$

Finalmente, ya que

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i = (x_1 - a) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + (b - x_{n-1}) = b - a,$$

tenemos que

$$S(F; P_n; T_n) \leq F(r)(b-a).$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} S(F; P_n; T_n) &\geq \sum_{i=1}^n F(s) \Delta x_i \\ &\geq F(s)(b-a). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$F(s)(b-a) \leq S(F; P_n; T_n) \leq F(r)(b-a)$$

para todas las particiones P_n y aumentos T_n . De estas desigualdades y de la definición de integral definida, se sigue que

$$F(s)(b-a) \leq \int_a^b F(x) dx \leq F(r)(b-a).$$

Teorema 9. Si F es continua sobre $[a; b]$ y si G es la función cuyo dominio sea $[a; b]$ y que esté definida mediante $G(u) = \int_a^u F(x) dx$ para $u \in [a; b]$, entonces

$$G'(u) = F(u).$$

Demostración. Deseamos calcular el valor de

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(u+h) - G(u)}{h}.$$

Supongamos que se escoge h de tal modo que $(u+h) \in [a; b]$. Entonces

$$G(u+h) = \int_a^{u+h} F(x) dx$$

y

$$G(u+h) - G(u) = \int_a^{u+h} F(x) dx - \int_a^u F(x) dx.$$

Según la igualdad (25) escribiremos

$$G(u+h) - G(u) = \int_u^{u+h} F(x) dx,$$

y

$$\frac{G(u+h) - G(u)}{h} = \frac{\int_u^{u+h} F(x) dx}{h}$$

Empero, si $F(r)$ y $F(s)$ son los valores máximo y mínimo de $F(x)$ en el intervalo cerrado $[u; u+h]$, tendremos que según el teorema 8,

$$F(s)h \leq \int_u^{u+h} F(x) dx \leq F(r)h,$$

o

$$F(s) \leq \frac{\int_u^{u+h} F(x) dx}{h} \leq F(r). \quad (26)$$

Sabemos que F es continua en u , así pues dada $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que

$$F(u) - F(s) \leq \varepsilon \quad \text{y} \quad F(r) - F(u) \leq \varepsilon$$

o

$$F(s) \geq F(u) - \varepsilon \quad \text{y} \quad F(r) \leq F(u) + \varepsilon$$

cuando $|h| < \delta$.

De estas igualdades y de (26) se sigue que

$$F(u) - \varepsilon \leq \frac{\int_u^{u+h} F(x) dx}{h} \leq F(u) + \varepsilon$$

o

$$\left| \frac{\int_u^{u+h} F(x) dx}{h} - F(u) \right| < \varepsilon$$

cuando $|h| < \delta$. Es decir que

$$G'(u) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(u+h) - G(u)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_u^{u+h} F(x) dx}{h} = F(u),$$

lo cual completa la demostración.

Este teorema indica que una función F continua sobre un intervalo cerrado $[a; b]$ tiene una antiderivada en el intervalo. Este resultado que al igual que el Teorema 2, exhibe una conexión entre una integral definida y una derivada es tan importante que a veces es llamado Teorema Fundamental del Cálculo; sin embargo nosotros reservaremos ese nombre para el teorema 2 de la Sec. 5.5.

El teorema final de esta sección generaliza el tipo de suma que puede conducirnos a las integrales definidas. Este teorema* será particularmente útil en el capítulo 8, en las secciones referentes a la longitud de una curva y al área de una superficie de revolución.

Teorema 10. Sean G_1 y G_2 dos funciones continuas sobre $[a; b]$; sea P_n una partición de $[a; b]$ determinada por el conjunto $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n\}$;

* Para una demostración de este Teorema véase Olmsted, *Real Variables*, p. 340.

y sean $T_n = \{t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n\}$ y $U = \{u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_n\}$ dos aumentos de P_n . Si se nos da cualquier $\varepsilon > 0$, entonces existe una $\delta > 0$ con la propiedad de que para todas las particiones P_n y aumentos T_n y U_n para las que $N_P < \delta$ resulta cierto que:

- (i) $\left| \sum_{i=1}^n [G_1(t_i) + G_2(u_i)](x_i - x_{i-1}) - \int_a^b [G_1(x) + G_2(x)] dx \right| < \varepsilon$
- (ii) $\left| \sum_{i=1}^n [G_1(t_i) G_2(u_i)](x_i - x_{i-1}) - \int_a^b [G_1(x) G_2(x)] dx \right| < \varepsilon$
- (iii) $\left| \sum_{i=1}^n \sqrt{G_1(t_i) + G_2(u_i)}(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b \sqrt{G_1(x) + G_2(x)} dx \right| < \varepsilon.$

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 6 use los teoremas 3 y 4 y el teorema Fundamental para calcular la integral.

1. $\int_1^2 \left[x\sqrt{x^2+4} + \frac{1}{(x+2)^2} \right] dx.$
2. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} (\sin 3x + \cos 6x) dx.$
3. $\int_1^2 4x(\cos x^2 + 2) dx.$
4. $\int_1^2 \frac{u^3 + 6u}{u} du.$
5. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{u^{1/2} + u^{3/2}}{u} du.$
6. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sec^2 x dx.$

Sugestión: Use la identidad $\sec^2 x = \frac{1}{1 - \cos 2x}$

7. Demuestre que si F tiene dominio $[a; b]$ y si k es un número real, entonces $S(kF; P_n; T_n) = kS(F; P_n; T_n)$.

8. Use el resultado del ejercicio 7 para demostrar el teorema 4.

9. Mediante los teoremas 3 y 4 demuestre que si F y G son integrables sobre $[a; b]$, entonces

$$\int_a^b [F(x) - G(x)] dx = \int_a^b F(x) dx - \int_a^b G(x) dx.$$

10. Use el ejercicio 9 y el teorema 5 para demostrar el teorema 6.

11. Si $b < a < c$ y si F es integrable sobre un intervalo cerrado que contenga a b , a y c , demuestre que

$$\int_a^b F(x) dx + \int_b^c F(x) dx = \int_a^c F(x) dx.$$

12. Use el Teorema Fundamental para demostrar que si F y G son continuas sobre $[a; b]$ entonces

$$\int_a^b [F(x) + G(x)] dx = \int_a^b F(x) dx + \int_a^b G(x) dx.$$

Sugestión. Sea $H'_1(x) = F(x) + G(x)$, $H'_2(x) = F(x)$, $H'_3(x) = G(x)$. Entonces $H'_1(x) = H'_2(x) + H'_3(x)$ y $H_1(x) = H_2(x) + H_3(x) + k$. Use estos resultados y el Teorema Fundamental para llegar a la igualdad deseada.

5.8 Áreas. La integral definida es una herramienta poderosa para las ciencias físicas y sociales porque muchas cantidades de interés en dichas ciencias

se pueden definir mediante el tipo de suma que se presenta en la definición de integral definida. En esta sección y en las tres siguientes definiremos algunas cantidades geométricas y físicas y veremos cómo se usan las integrales definidas para encontrar los valores de esas cantidades.

Indicábamos en la Sec. 5.1 que al tratar de definir el "área" de una región plana R , nos podría conducir a considerar sumas de tipo especial. Regresaremos ahora a ese "problema del área" para algunos tipos específicos de regiones.

Supóngase que F es una función cuyo dominio es el intervalo cerrado $[a; b]$ y que tiene la propiedad de que $F(x) \geq 0$ para $x \in [a; b]$. Sea R la región plana limitada por las gráficas de las cuatro ecuaciones:

$$y = F(x), \quad y = 0, \quad x = a, \quad x = b.$$

(Véase la Fig. 5.8). ¿Qué convendremos en llamar "área" de R ? Supongamos que (por definición) el área de un rectángulo es el producto de su longitud por su ancho y con este supuesto, empezamos por construir un conjunto de rectángulos que tengan la propiedad de que la suma de sus áreas sea una aproximación al "área" de R .

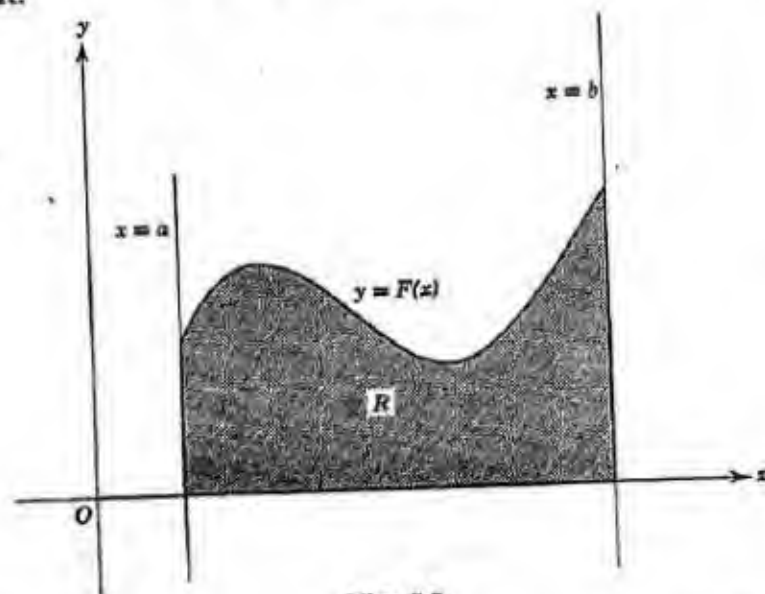


Fig. 5.8

Sea P_n una partición de $[a; b]$ en n subintervalos determinados por medio del conjunto

$$\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

y como de costumbre, hágase

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Sea

$$T_n = \{t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_{n-1}, t_n\}$$

un aumento de P_n y constrúyanse los n rectángulos cuyas bases sean los n intervalos de la partición P_n y cuyas alturas sean

$$F(t_1), F(t_2), \dots, F(t_i), \dots, F(t_{n-1}), F(t_n).$$

(Tal construcción, con $n = 6$, se muestra en la Fig. 5.9). El área del i -ésimo rectángulo i será

$$F(t_i) \Delta x_i,$$

y la suma

$$\sum_{i=1}^n F(t_i) \Delta x_i \quad (27)$$

de las áreas de los n rectángulos será una aproximación al "área" de R . La suma (27) es comúnmente llamada *suma de aproximación* para el área de la región R . Si se aumenta el número de subintervalos y se decrece la longitud de cada subintervalo de la partición P_n , se obtendrá una nueva suma que será una mayor aproximación al "área" de R y formularemos la siguiente definición:

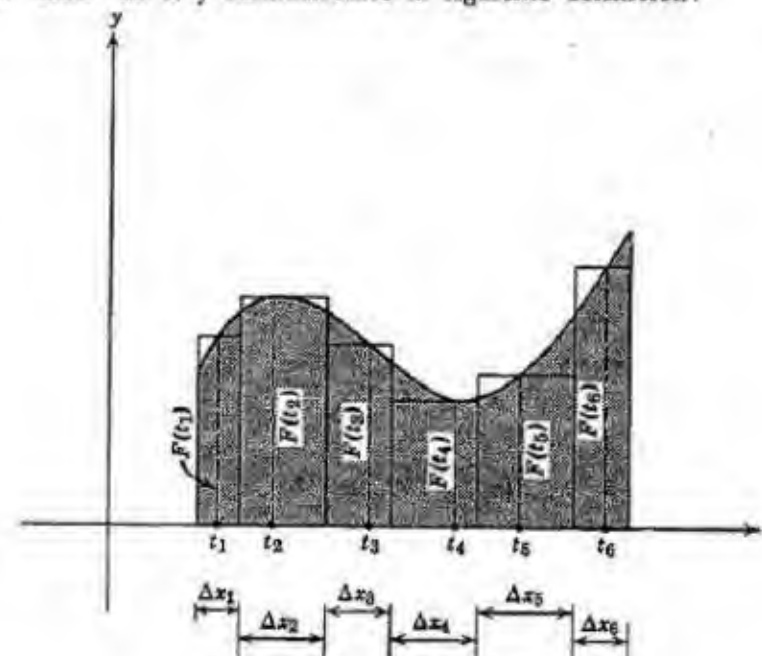


Fig. 5.9

Si $F(x) \geq 0$ para $x \in [a; b]$ y si existe un número A tal que dada una $\epsilon > 0$ exista una $\delta > 0$ para la cual

$$\left| \sum_{i=1}^n F(t_i) \Delta x_i - A \right| < \epsilon$$

para toda partición P_n de $[a; b]$ y todo aumento de P_n en que $\Delta x_i < \delta$, entonces este número A es el *área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones*

$$y = F(x), \quad y = 0, \quad x = a, \quad x = b.$$

Comparando esta definición con la de integral definida propuesta en la Sec. 5.4 vemos que si el área A de la región R queda definida en esa forma y si A existe, entonces

$$A = \int_a^b F(x) dx. \quad (28)$$

En el desarrollo dado, la igualdad (28) es una consecuencia de las definiciones del área de R y de la integral definida $\int_a^b F(x) dx$. Con frecuencia, la igualdad (28) se considera como *definición* del área A de la región R y entonces la definición de área que hemos dado será una consecuencia de esta igualdad y de la definición de $\int_a^b F(x) dx$.

Nótese que hemos definido el área de un tipo particular de región, precisamente una región limitada *arriba* por la gráfica de $y = F(x)$, *abajo* por el eje X , a la izquierda por la gráfica de $x = a$ y a la derecha por la gráfica de $x = b$ (suponiendo que el eje X es el eje horizontal). En consecuencia, la ecuación (28) solamente se usará para calcular el área de este tipo de regiones.

Podemos utilizar el Teorema 1 para tener una condición suficiente para la existencia del área de una región R del tipo descrito. Ya que según el Teorema 1, $\int_a^b F(x) dx$ existirá si F es continua sobre $[a; b]$, entonces si F es continua sobre $[a; b]$, existirá el área de la región R limitada por las gráficas de $y = F(x)$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$.

Ejemplo 1. Calcule el área de la región R limitada arriba por la gráfica de $y = 4x - x^2$, abajo por el eje X y a la izquierda por la gráfica de $x = 1$.

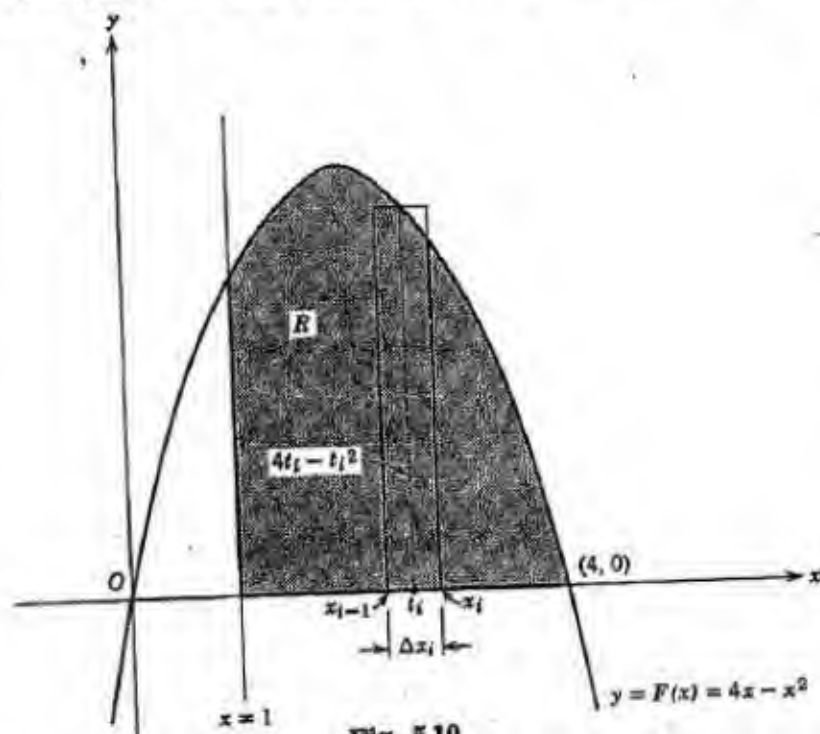


Fig. 5.10

Solución. Debemos determinar la porción de la gráfica de $y = 4x - x^2$, que quede a la derecha de la gráfica de $x = 1$ y arriba del eje X . Notamos que $\{x \mid 4x - x^2 = 0\} = \{0, 4\}$

de modo que la gráfica de $y = 4x - x^2$ cruza al eje X en los puntos $(0, 0)$ y $(4, 0)$. La región R se muestra en la Fig. 5.10 y podemos ver que es del tipo cuya área hemos definido. La suma de aproximación (27) para el área de R , tiene la forma

$$\sum_{i=1}^n (4t_i - t_i^2) \Delta x_i$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $t_i \in [x_{i-1}; x_i]$. El i -ésimo rectángulo de la aproximación se muestra en la Fig. 5.10. De la definición de área y la igualdad (28) tenemos que

$$A = \int_1^4 (4x - x^2) dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_1^4 = \frac{32}{3} \text{ unidades cuadradas.}$$

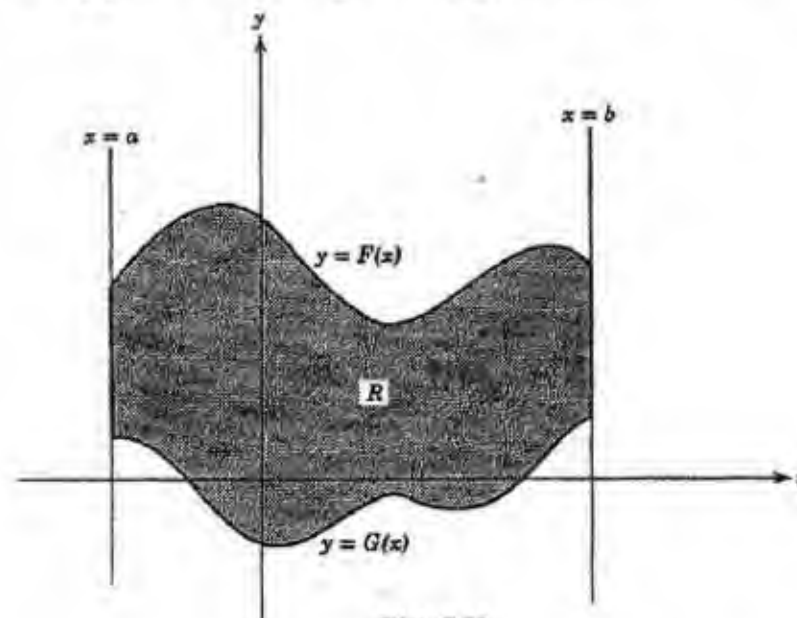


Fig. 5.11

Consideremos dos funciones F y G , cuyos dominios sean el intervalo $[a; b]$. Supóngase que

$$F(x) \geq G(x) \text{ para } x \in [a; b],$$

y sea R la región limitada por las gráficas de

$$y = F(x), \quad y = G(x), \quad x = a, \quad x = b.$$

(véase la Fig. 5.11). ¿Cuál va a ser el significado del "área" de R ? De nuevo construiremos un conjunto de rectángulos tales que la suma de sus áreas sea una aproximación al "área" de R .

Sea P_n una partición de $[a; b]$ en n subintervalos, determinados por el conjunto

$$\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

y como de costumbre, sea

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Sea

$$T_n = \{t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots, t_{n-1}, t_n\}$$

un aumento de P_n y construyamos los n rectángulos cuyos anchos sean los n subintervalos de la partición P_n y cuyas alturas sean

$$F(t_1) - G(t_1), F(t_2) - G(t_2), \dots, F(t_i) - G(t_i), \dots, F(t_n) - G(t_n).$$

(Tal construcción, para $n = 6$, se muestra en la Fig. 5.12). El área del i -ésimo rectángulo es

$$[F(t_i) - G(t_i)] \Delta x_i.$$

La suma

$$\sum_{i=1}^n [F(t_i) - G(t_i)] \Delta x_i \quad (29)$$

es una aproximación al "área" de R y con frecuencia es llamada *suma de aproximación* para el área de R . Aumentando el número de subintervalos de la partición y decreciendo la longitud de cada uno de ellos, obtendremos una mejor aproximación al "área" de R y formaremos la siguiente definición.

Si $F(x) \geq G(x)$ para $x \in [a; b]$ y si existe un número A , tal que dada cualquier $\varepsilon > 0$ exista una $\delta > 0$ para la cual

$$\left| \sum_{i=1}^n [F(t_i) - G(t_i)] \Delta x_i - A \right| < \varepsilon$$

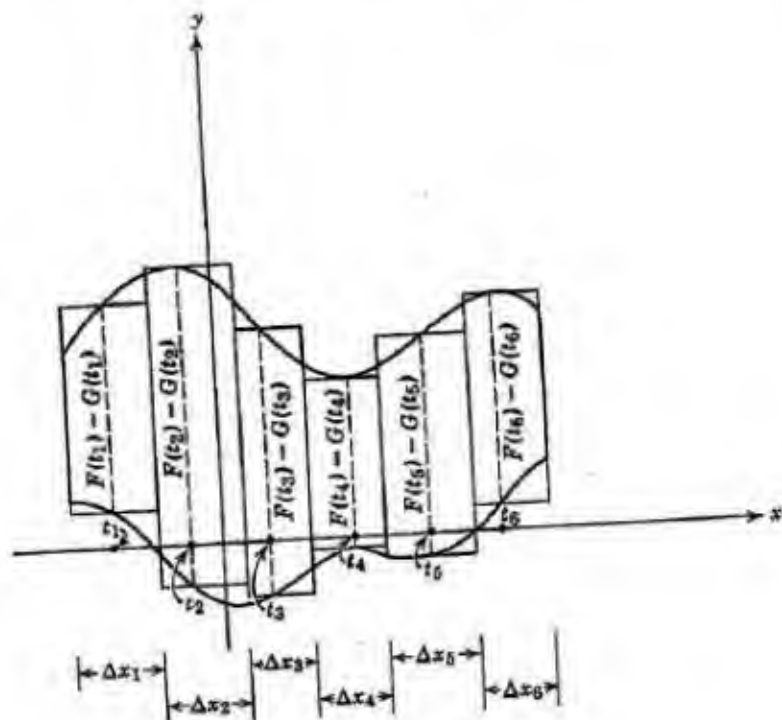


Fig. 5.12

para toda partición P_n de $[a; b]$ y todo aumento de P_n con $\mathcal{N}_P < \delta$, entonces dicho número A es el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones

$$y = F(x), \quad y = G(x), \quad x = a, \quad x = b.$$

Notemos que si H es la función definida por

$$H(x) = F(x) - G(x) \quad \text{para } x \in [a; b],$$

entonces

$$\sum_{i=1}^n [F(t_i) - G(t_i)] \Delta x_i = S[H; P_n; T_n].$$

Se sigue que si A existe

$$A = \int_a^b H(x) dx = \int_a^b [F(x) - G(x)] dx. \quad (30)$$

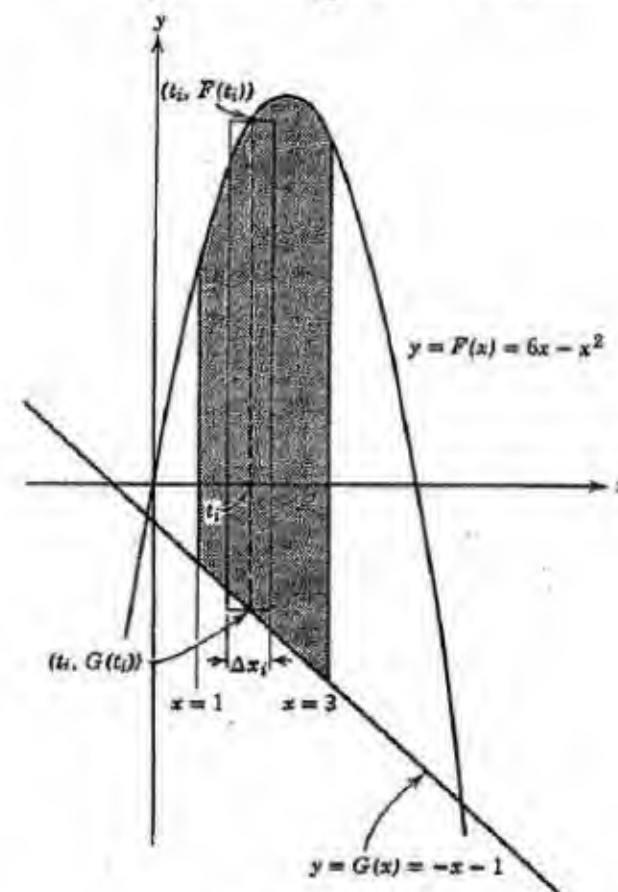


Fig. 5.13

Obsérvese que la igualdad (30) se debe usar para calcular el área de una región R sólo si la región es del tipo cuya área recién se ha definido. Esto es, (30) se aplica sólo al área de regiones limitadas arriba por la gráfica de $y = F(x)$, abajo por la gráfica de $y = G(x)$, a la izquierda por la gráfica de $x = a$ y a la derecha por la gráfica de $x = b$ (suponiendo que el eje X es el horizontal).

Del Teorema 1 de este capítulo y del Teorema 6(ii) de la Sec. 2.1, se sigue que si F y G son continuas sobre $[a; b]$, entonces el área de la región R existe.

Ejemplo 2. Halle el área de la región R limitada por las gráficas de las ecuaciones

$$y = 6x - x^2, \quad y + x + 1 = 0, \quad x = 1, \quad x = 3.$$

Solución. Al graficar las ecuaciones hallamos que R es la región que se muestra en la Fig. 5.13. Por tanto, R está limitada arriba por la gráfica de F , siendo $F(x) = 6x - x^2$, abajo por la gráfica de G siendo $G(x) = -x - 1$, a la izquierda por la gráfica de $x = 1$ y a la derecha por la gráfica de $x = 3$. La región es del tipo cuya área hemos definido y la suma de aproximación (29), para el área de R es de la forma

$$\sum_{i=1}^n [(6t_i - t_i^2) - (-t_i - 1)] \Delta x_i$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $t_i \in [x_{i-1}; x_i]$. El i -ésimo rectángulo de la aproximación se muestra en la Fig. 5.13. De la definición del área de R y de la igualdad (30), tenemos que

$$\begin{aligned} A &= \int_1^3 [(6x - x^2) - (-x - 1)] dx \\ &= \int_1^3 (7x - x^2 + 1) dx = \left[\frac{7}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} + x \right]_1^3 = \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3. Halle el área de la región R limitada por las gráficas de las ecuaciones

$$3x + 5y - 23 = 0, \quad 5x - 2y - 28 = 0, \quad 2x - 7y + 26 = 0.$$

Solución. Al graficar las ecuaciones hallamos que la región R es el interior del triángulo grande que se ve en la Fig. 5.14. Notamos que R no es de ninguno de los tipos estudiados, de modo que ni la igualdad (28) ni la (30) pueden usarse para determinar el área de R mediante una sola integral. Sin embargo, vemos que R se puede dividir en dos regiones R_1 y R_2 como se muestra en la Fig. 5.14, de tal forma que el área de cada una de esas regiones se pueda determinar por medio de (30).

La región R_1 está limitada arriba por la gráfica de

$$F = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{2x + 26}{7} \right\},$$

abajo por la gráfica de

$$G = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{-3x + 23}{5} \right\},$$

a la izquierda por la gráfica de $x = 1$ y a la derecha por la de $x = 6$.

Una suma de aproximación para el área de R_1 es

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{2t_i + 26}{7} - \frac{-3t_i + 23}{5} \right) \Delta x_i,$$

en la cual $t_i \in [x_{i-1}; x_i]$. El i -ésimo rectángulo de la aproximación se muestra en la Fig. 5.14. Por tanto, según (30)

$$\text{Área de } R_1 = \int_1^6 \left(\frac{2x + 26}{7} - \frac{-3x + 23}{5} \right) dx.$$

La región R_2 está limitada arriba por la gráfica de

$$F = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{2x + 26}{7} \right\}$$

abajo por la de

$$H = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{5x - 28}{2} \right\}$$

a la izquierda está la gráfica de $x = 6$ y a la derecha la de $x = 8$. Una suma

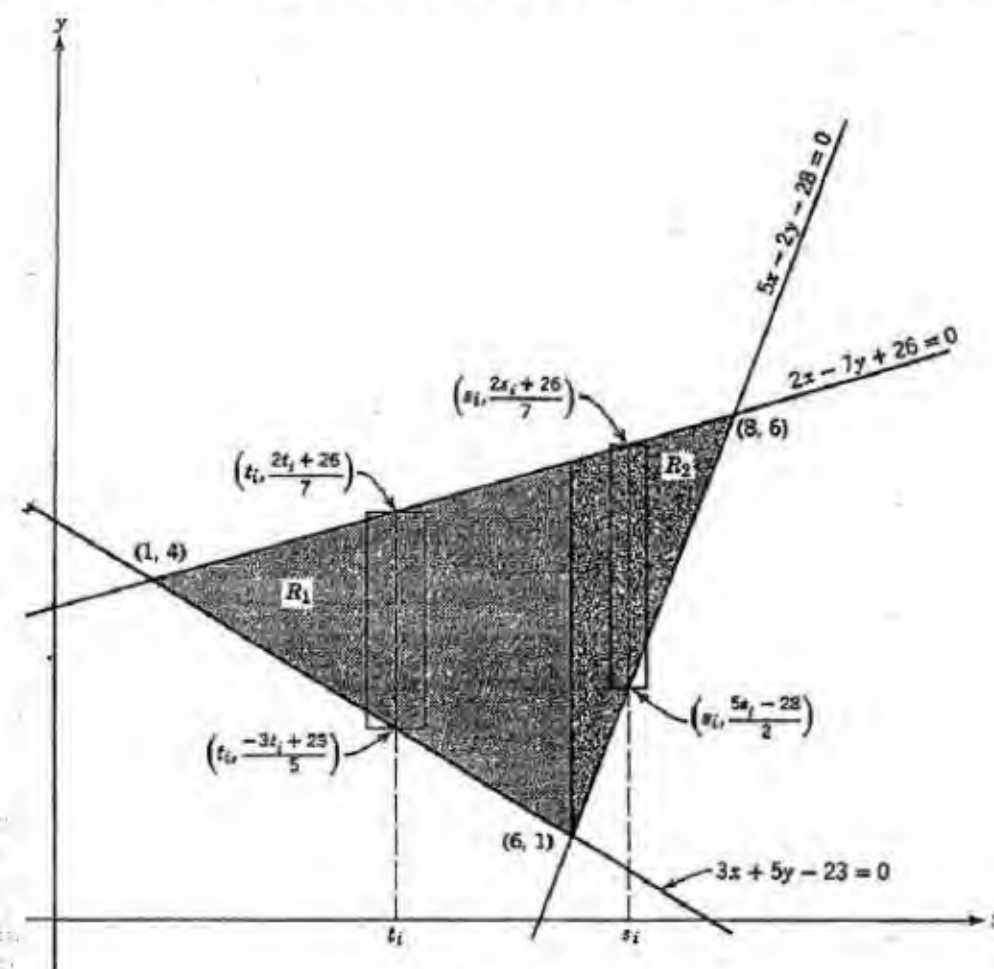


Fig. 5.14

de aproximación para el área de R_2 es

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{2s_i + 26}{7} - \frac{5s_i - 28}{2} \right) \Delta x_i,$$

donde $s_i \in [x_{i-1}; x_i]$. El i -ésimo rectángulo de la aproximación se muestra en la Fig. 5.14. Por tanto, según (30)

$$\text{Area de } R_2 = \int_0^2 \left(\frac{2x+26}{7} - \frac{5x-28}{2} \right) dx.$$

En consecuencia

$$\text{Area de } R = \int_1^0 \left(\frac{2x+26}{7} - \frac{-3x+23}{5} \right) dx + \int_0^2 \left(\frac{2x+26}{7} - \frac{5x-28}{2} \right) dx.$$

Usaremos los teoremas 3 y 7 para poner

$$\begin{aligned} \text{Area de } R &= \int_1^0 \left(\frac{2x+26}{7} \right) dx - \int_1^0 \left(\frac{-3x+23}{5} \right) dx - \int_0^2 \left(\frac{5x-28}{2} \right) dx \\ &= 35 - 25\frac{1}{2} - 7 = 3\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

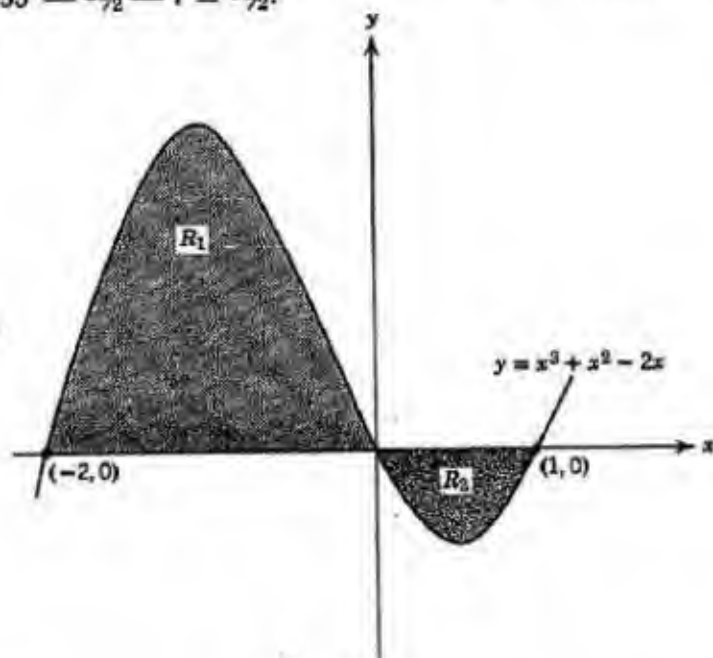


Fig. 5.15

Ejemplo 4. Halle el área de la región sombreada R de la Fig. 5.15.

Solución. La región sombreada está compuesta de dos partes, las regiones R_1 y R_2 , y

$$\text{Area de } R = \text{Area } R_1 + \text{Area } R_2.$$

La región R_1 está limitada arriba por la gráfica de $y = x^3 + x^2 - 2x$, abajo por la de $y = 0$, a la izquierda por la de $x = -2$ y a la derecha por la de $x = 0$. Por tanto, según (28)

$$\text{Area de } R_1 = \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx = \frac{8}{3}.$$

La región R_2 está limitada arriba por la gráfica $y = 0$, abajo por la de $y = x^3 + x^2 - 2x$, a la izquierda por la de $x = 0$ y a la derecha por la de $x = 1$.

Por tanto, según (30)

$$\begin{aligned} \text{Area } R_2 &= \int_0^1 [(0) - (x^3 + x^2 - 2x)] dx \\ &= \int_0^1 (-x^3 - x^2 + 2x) dx = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Así que

$$\text{Area } R = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = 10\frac{1}{12}.$$

Es de interés notar que en el ejemplo 4,

$$\begin{aligned} \text{Area } R_2 &= \int_0^1 -(x^3 + x^2 - 2x) dx \\ &= - \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx. \end{aligned}$$

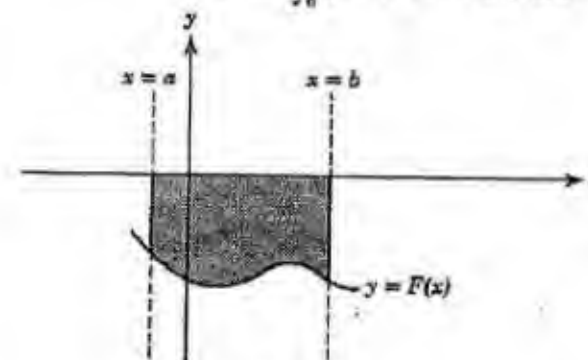


Fig. 5.16

Este es un caso especial del resultado general de que si $F(x) \leq 0$ para $x \in [a; b]$, entonces el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones

$$y = F(x), \quad y = 0, \quad x = a, \quad x = b$$

(Fig. 5.16), estará dada por medio de

$$A = \int_a^b [(0) - F(x)] dx = - \int_a^b F(x) dx.$$

EJERCICIOS

En los ejercicios del 1 al 18, determine el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas. En cada caso, dibuje una figura e indique claramente la región cuya área se pide. Dé una suma (o sumas) de aproximación para el área y muestre en la figura el i -ésimo rectángulo usado para la aproximación.

1. $y = x^2, y = 0, x = 2, x = 4$.
2. $y = x^2 - 2x - 3, y = 0$.
3. $y = x^2 - 9, y = 0, x = 1, x = 4$.
4. $y = 6x - x^2, y = 0$.
5. $x = y^2 - 4, x = 0$.
6. $y = x^2 - 2, y = 6 - x^2$.
7. $y = 9 - x^2, y = x + 7$.
8. $y^2 = 8x, x^2 = 8y$.
9. $y = 5x - x^2, y = x$.
10. $y = x^3 - 6x^2 + 9x, y = x$.
11. $y = x^3 - x^2 - 2x, y = 0$.
12. $y = x^3 - 12x, y = 4x$.
13. $y^2 = x, y = x^2$.
14. $y^2 = 4ax, x^2 = 4ay$.
15. $x = 6y - y^2, x = 0, y = 1, y = 4$.
16. $y^2 = 4x, y = 2x - 4$.
17. $y = x^3 - 8, y = 0, x = 0$.
18. $y = x^3 - x, y = x - x^2$.

19. Halle el área de la región limitada por la gráfica de $F = \{(x, y) \mid y = 2x^2 - 9x^2 + 12x - 3\}$, el eje X y las gráficas de $x = a$ y $x = b$, donde $F(a)$ es el máximo de $F(x)$ y $F(b)$ es el mínimo.

20. Halle el área de la región limitada por las gráficas de las funciones F y G donde $F = \{(x, y) \mid y^2 = x, y \geq 0\}$, $G = \{(x, y) \mid y^2 = 4x, y \geq 0\}$ y la línea $x = 4$.

En cada uno de los ejercicios del 21 al 28 halle el área de la región limitada por las gráficas de las funciones dadas. Dibuje en cada caso, una figura y muestre claramente la región cuya área se pide. Dé una suma (o sumas) de aproximación para el área e indique en la figura el i -ésimo rectángulo usado para cada aproximación.

21. $F = \{(x, y) \mid y = \sin x, x \in [0; \pi]\}$
 $G = \{(x, y) \mid y = 0\}$

22. $F = \{(x, y) \mid y = \sin x, x \in [0; \pi/2]\}$
 $G = \{(x, y) \mid y = 0\}$

23. $F = \{(x, y) \mid y = \sin x, x \in [0; 2\pi]\}$
 $G = \{(x, y) \mid y = 0\}$

24. $F = \{(x, y) \mid y = \sin x, x \in [0; 3\pi/2]\}$
 $G = \{(x, y) \mid y = 0\}$

25. $F = \{(x, y) \mid y = \cos x, x \in [0; \pi/2]\}$
 $G = \{(x, y) \mid y = 0\}$

26. $F = \{(x, y) \mid y = \sin x, x \in [0; 3\pi/2]\}$
 $G = \{(x, y) \mid y = \cos x, x \in [0; 3\pi/2]\}$

27. $F = \{(x, y) \mid y = \sin x, x \in [0; \pi]\}$
 $G = \{(x, y) \mid y = \sin 2x, x \in [0; \pi]\}$

28. $F = \{(x, y) \mid y = \cos x, x \in [\pi/4; 2\pi]\}$
 $G = \{(x, y) \mid y = \sin 2x, x \in [\pi/4; 2\pi]\}$
 $H = \{(x, y) \mid x = 2\pi\}$

29. Halle el área de la región limitada por las gráficas de $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Halle el área de la región limitada por las gráficas de $y = x^2 + x$, $y = x$, $x = 0$, $x = 2$. ¿Son áreas iguales? ¿Son la misma región?

30. La integral definida $\int_1^8 (x^2 - x) dx$ puede interpretarse como el área de muy diferentes regiones. Dibuje dos figuras que muestren dos regiones distintas cuyas áreas estén dadas por la misma integral.

31. Si $F = \{(x, y) \mid y = x\sqrt{4 - x^2}\}$, halle el dominio de F y los valores máximo y mínimo de $F(x)$. Dibuje la gráfica de F y determine el área de la región limitada por la gráfica de F y el eje X .

5.9 Volúmenes de sólidos de revolución. Consideraremos en esta sección el uso de las integrales definidas para determinar volúmenes de sólidos de un tipo particular.

Sea F una función cuyo dominio contenga al intervalo $[a; b]$. Si la región limitada por la gráfica de $y = F(x)$, el eje X y las gráficas de $x = a$ y $x = b$ gira alrededor del eje X , se genera un sólido. Este se llama *sólido de revolución*; el eje X es un eje de simetría de dicho sólido y una sección recta perpendicular al eje X es un círculo. La Fig. 5.17 ilustra un sólido de revolución. Antes de intentar encontrar el volumen de un sólido de revolución debemos definir lo que hemos de entender por "volumen" de este tipo de sólidos. Si procedemos como

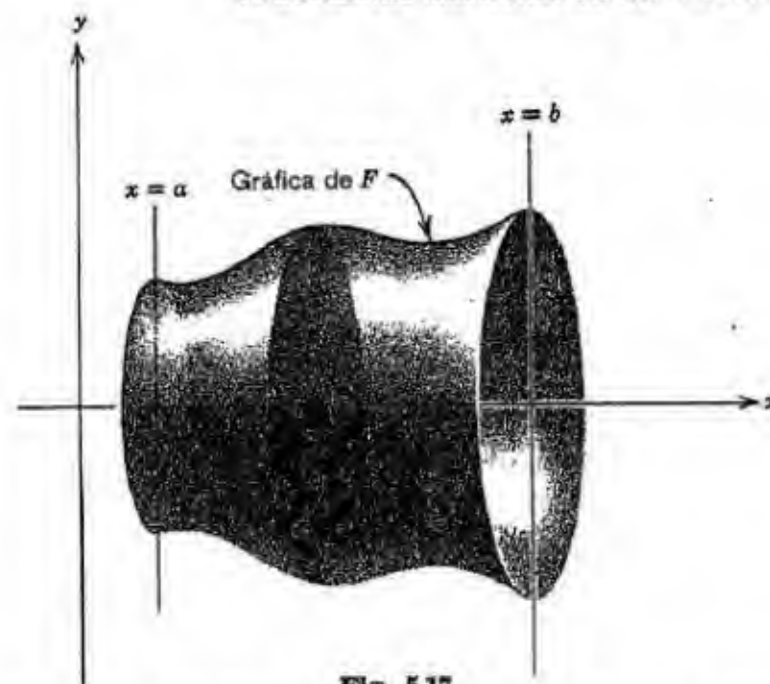


Fig. 5.17

hicimos en la Sec. 5.8 para las áreas, aproximaremos el "volumen" de un sólido de revolución por medio de una suma de volúmenes de sólidos más elementales —sólidos cuyo volumen ha sido ya definido. Consideremos discos circulares como nuestros sólidos elementales y supongamos que el volumen de un disco circular

(Fig. 5.18) es, por definición, el producto del área A de la base, por el espesor d .



Fig. 5.18

Deseamos construir un conjunto de discos circulares tal que la suma de los volúmenes de los discos sea una aproximación a la cantidad que llamaremos "volumen" del sólido de revolución y

procederemos como sigue: sea P_n una partición del intervalo $[a; b]$, determinada por el conjunto de números

$$\{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

en que

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

y sea

$$T_n = \{t_1, t_2, t_3, \dots, t_i, \dots, t_n\}$$

un aumento de P_n . Consideremos ahora los n discos circulares cuyos espesores son $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_i, \dots, \Delta x_n$ y cuyas bases tienen radios $F(t_1), F(t_2), \dots, F(t_i), \dots, F(t_n)$, respectivamente. El i -ésimo disco se muestra en la Fig. 5.19 y su volumen es $\pi[F(t_i)]^2 \Delta x_i$.

La suma

$$\sum_{i=1}^n \pi[F(t_i)]^2 \Delta x_i \quad (31)$$

de los volúmenes de los n discos constituye una aproximación al "volumen" del sólido de revolución. Dicha suma se llama usualmente *suma de aproximación* del volumen del sólido. Parece razonable suponer que en general, mientras más delgados sean los discos, mayor será la aproximación de la suma (31) al "volumen" del sólido. Por tanto formularemos la siguiente definición.

Si existe un número V tal que dada cualquier $\varepsilon > 0$ exista una $\delta > 0$ para la cual

$$\left| \sum_{i=1}^n \pi [F(t_i)]^2 \Delta x_i - V \right| < \varepsilon$$

para toda partición P_n de $[a; b]$ y todo aumento T_n de P_n y con $N_T < \delta$, este

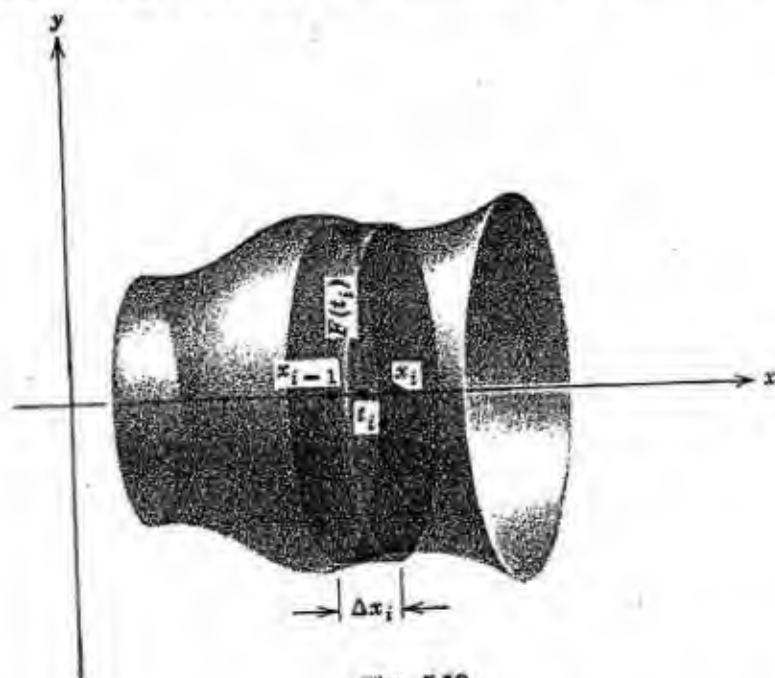


Fig. 5.19

número V es el volumen del sólido obtenido por revolución del área limitada por las gráficas de

$$y = F(x), \quad y = 0, \quad x = a, \quad x = b$$

alrededor del eje X .

Notamos que si H es la función dada por

$$H(x) = \pi [F(x)]^2 \text{ para } x \in [a; b],$$

entonces la suma de aproximación (31), usada en la definición del volumen del sólido de revolución, se puede escribir

$$\sum_{i=1}^n H(t_i) \Delta x_i$$

donde $t_i \in [x_{i-1}; x_i]$ y $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Por tanto, de la definición de la integral de H sobre $[a; b]$ y de la definición de V recién dada, resulta evidente que

$$V = \int_a^b H(x) dx = \int_a^b \pi [F(x)]^2 dx. \quad (32)$$

Como señalamos para el área en la Sec. 5.8, la igualdad (32) pudo haberse considerado como la definición de volumen del sólido de revolución y la definición propuesta sería entonces una consecuencia de (32) y de la definición de integral definida.

La identificación del volumen V con la integral $\int_a^b \pi [F(x)]^2 dx$ se hizo observando que la suma de aproximación (31) tenía la propiedad de que existía una función H para la cual cada término de la suma (31) tenía la forma

$$H(t_i) \Delta x_i$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $t_i \in [x_{i-1}; x_i]$, y el conjunto

$$\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

determinaba una partición P_n de $[a; b]$. Este tipo de identificación se tiene cada vez que usamos integrales definidas para calcular cantidades físicas o de otra índole, definidas por medio de sumas de aproximación.

Ejemplo 1. Halle el volumen del sólido generado cuando la región limitada por las gráficas de $y = x - \frac{1}{4}x^2$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = 3$ gira alrededor del eje X .

Solución. Para este sólido, mostrado en la Fig. 5.20, la suma de aproximación (31) tiene la forma

$$\sum_{i=1}^n \pi \left(t_i - \frac{t_i^2}{4} \right)^2 \Delta x_i.$$

El i -ésimo disco cuyo volumen es $\pi \left(t_i - \frac{t_i^2}{4} \right)^2 \Delta x_i$ se señala en la Fig. 5.20.

De la igualdad (32) se sigue que

$$\begin{aligned} V &= \int_1^3 \pi \left(x - \frac{x^2}{4} \right)^2 dx = \frac{\pi}{16} \int_1^3 (16x^2 - 8x^3 + x^4) dx \\ &= \frac{\pi}{16} \left[\frac{16}{3} x^3 - 2x^4 + \frac{1}{5} x^5 \right]_1^3 = \pi \left(\frac{203}{120} \right) \text{ unidades cúbicas.} \end{aligned}$$

Supóngase que se desea determinar el volumen del sólido de revolución formado al girar alrededor del eje X , la región R limitada por las parábolas cuyas ecuaciones son

$$2(x-4)^2 = 9(y-1) \quad (33)$$

$$(x-4)^2 = -9(y-4) \quad (34)$$

y las líneas cuyas ecuaciones son $x = 2$ y $x = 6$. La parábola con ecuación (33) tiene su vértice en $(4, 1)$ y su eje sobre la línea cuya ecuación es $x = 4$ y se abre hacia arriba. La parábola con ecuación (34) tiene su vértice en $(4, 4)$ y su eje sobre la línea cuya ecuación es $x = 4$ y se abre hacia abajo. Los puntos de intersección de las parábolas son $(1, 3)$ y $(7, 3)$. Las gráficas de (33) y (34), la región que va a girar alrededor del eje X y el sólido así generado se mues-

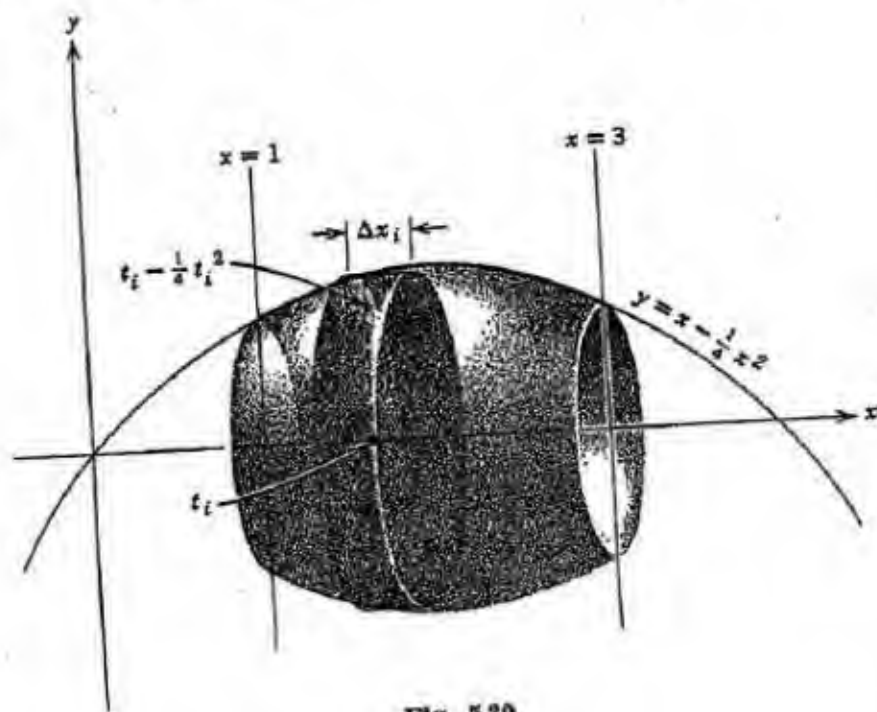


Fig. 5.20

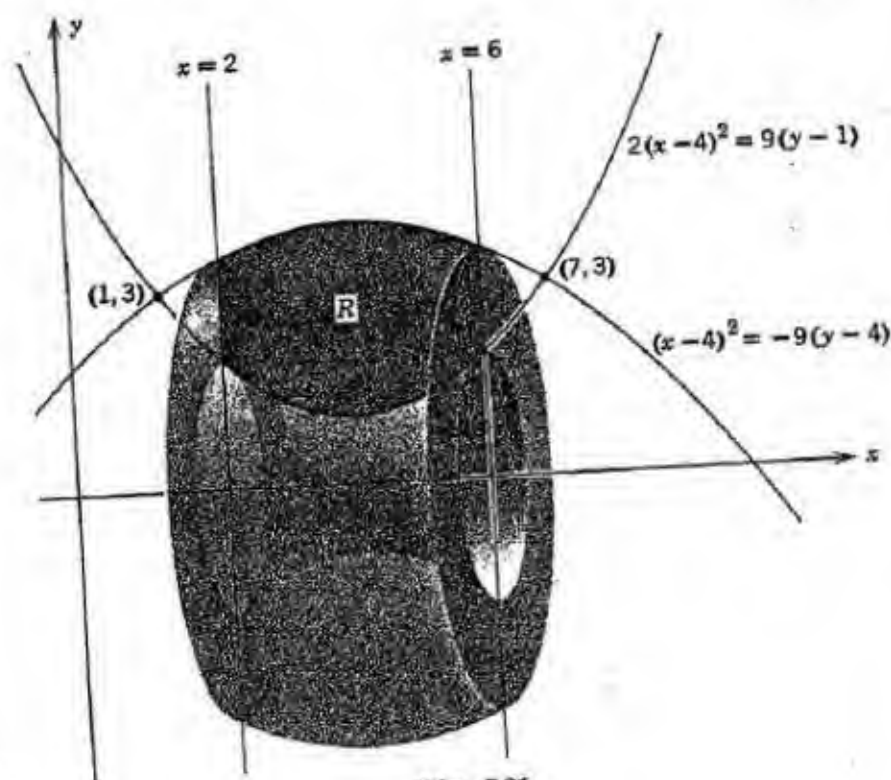


Fig. 5.21

tran en la Fig. 5.21. En ellas los sólidos elementales usados para obtener una suma de aproximación del volumen del sólido de revolución serán arandelas circulares más bien que discos. El volumen de una de tales arandelas, expuesta en la Fig. 5.22, es el producto del área A de la base por el espesor d .

El área A se dará mediante $\pi(r_2)^2 - \pi(r_1)^2 = \pi(r_2^2 - r_1^2)$; y el volumen de la arandela por $\pi(r_2^2 - r_1^2)d$.

Para construir un conjunto de arandelas circulares tal que la suma de los volúmenes de dichos sólidos elementales sea una aproximación al volumen del

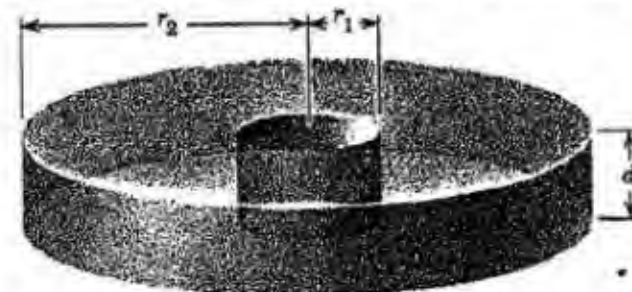


Fig. 5.22

sólido de revolución que se ve en la Fig. 5.21, procederemos como sigue: sea P_n una partición del intervalo $[2; 6]$ determinada por el conjunto de números

$$\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

(donde $x_0 = 2, x_n = 6$) con

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

y sea

$$T_n = \{t_1, t_2, t_3, \dots, t_i, \dots, t_n\}$$

un aumento de P_n . Consideremos ahora las n arandelas. De ellas la i -ésima tendrá un espesor Δx_i , radio interior igual a la coordenada y del punto de la gráfica de $2(x-4)^2 = 9(y-1)$ [ó $y = \frac{2}{9}(x-4)^2 + 1$], cuya coordenada x sea t_i , y radio exterior igual a la coordenada y del punto de la gráfica de $(x-4)^2 = -9(y-4)$ [ó $y = 4 - \frac{1}{9}(x-4)^2$], cuya coordenada x sea t_i . La i -ésima arandela se muestra en la Fig. 5.23. El radio interior es $\frac{2}{9}(t_i-4)^2 + 1$ y el radio exterior es $4 - \frac{1}{9}(t_i-4)^2$ y por tanto el volumen del i -ésimo elemento sólido es

$$\pi[(4 - \frac{1}{9}(t_i-4)^2)^2 - (\frac{2}{9}(t_i-4)^2 + 1)^2] \Delta x_i.$$

La suma de aproximación para el volumen del sólido de revolución es

$$\sum_{i=1}^n \pi[(4 - \frac{1}{9}(t_i-4)^2)^2 - (\frac{2}{9}(t_i-4)^2 + 1)^2] \Delta x_i \quad (35)$$

y al igual que en la definición de la página 258, el volumen del sólido de revolución será el número V (si existe) tal que la diferencia numérica entre V y la suma (35) se pueda hacer más pequeña que cualquier $\epsilon > 0$ con sólo hacer la norma de P_n suficientemente pequeña.

El volumen V se puede identificar con una integral. Nótese que si H es la función para la cual

$$H(x) = \pi \left[\left(4 - \frac{1}{9}(x-4)^2 \right)^2 - \left(\frac{2}{9}(x-4)^2 + 1 \right)^2 \right]$$

para $x \in [2; 6]$, entonces cada término de la suma (35) tiene la forma

$$H(t_i) \Delta x_i$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $t_i \in [x_{i-1}; x_i]$ y el conjunto

$$\{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

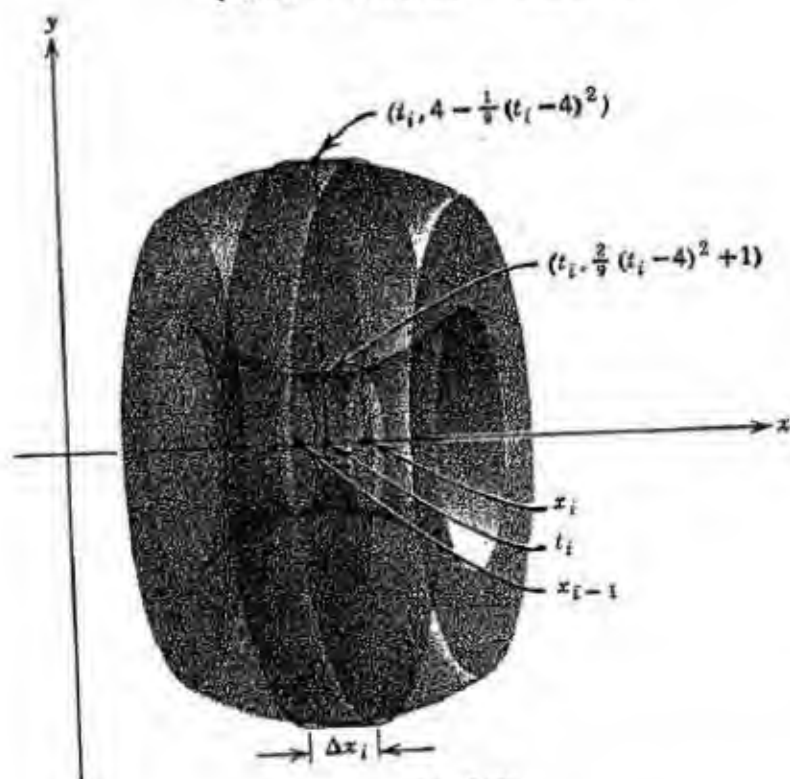


Fig. 5.23

determina una partición de $[2; 6]$. De aquí que la suma (35) sea la usada en la definición de la integral $\int_2^6 H(x) dx$ y por tanto tenemos que

$$\begin{aligned} V &= \int_2^6 H(x) dx \\ &= \int_2^6 \pi \left[\left(4 - \frac{1}{9}(x-4)^2 \right)^2 - \left(\frac{2}{9}(x-4)^2 + 1 \right)^2 \right] dx \\ &= \int_2^6 \pi \left[15 - \frac{4}{3}(x-4)^2 - \frac{1}{27}(x-4)^4 \right] dx \\ &= \pi \left[15x - \frac{4}{9}(x-4)^3 - \frac{1}{135}(x-4)^5 \right]_2^6 \\ &= \pi \left(\frac{1016}{135} \right) \text{ unidades cúbicas.} \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Formule una integral que se pueda usar para hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje X la región limitada por un círculo con centro a 6 unidades del eje X y radio igual a 2. (El sólido así generado se llama *toro*).

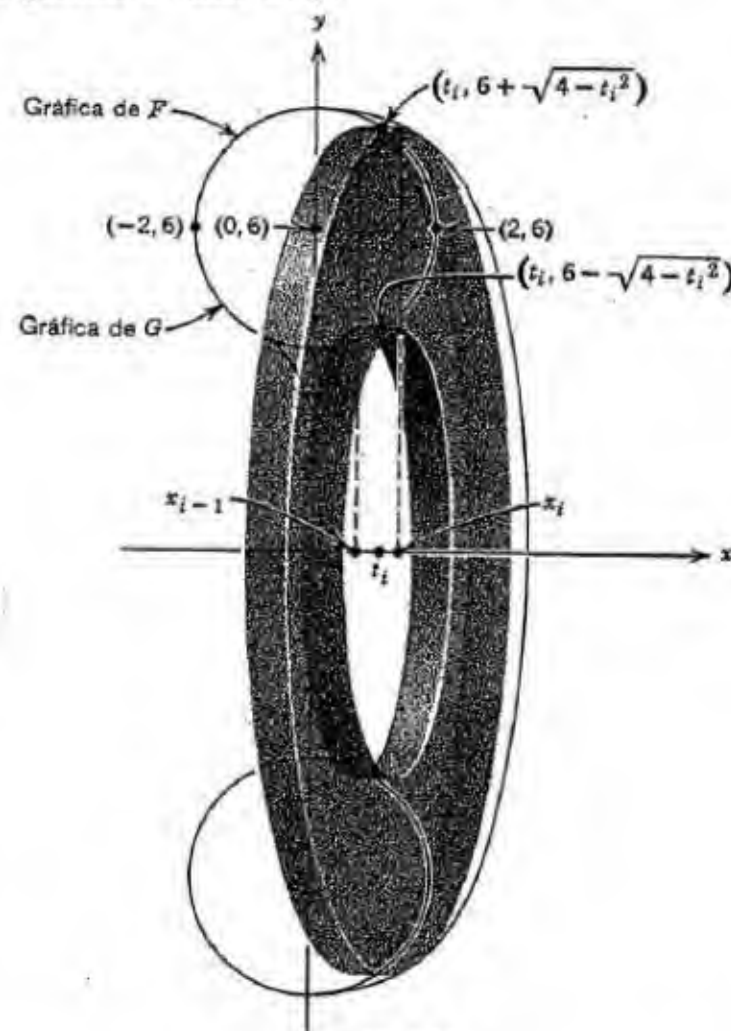


Fig. 5.24

Solución. Coloquemos el círculo con centro en $(0, 6)$ como en la Fig. 5.24 de modo que el círculo sea la gráfica de la ecuación

$$x^2 + (y-6)^2 = 4.$$

La región R que va a girar alrededor del eje X está limitada por las gráficas de dos funciones, F y G , siendo

$$F = \{(x, y) \mid x^2 + (y-6)^2 = 4, y \geq 6\}$$

tal que $F(x) = 6 + \sqrt{4-x^2}$, y

$$G = \{(x, y) \mid x^2 + (y-6)^2 = 4, y \leq 6\}$$

tal que $G(x) = 6 - \sqrt{4-x^2}$.

Los sólidos elementales usados para obtener una suma de aproximación del volumen requerido son arandelas circulares y la i -ésima de ellas aparece en la Fig. 5.24. El volumen de la i -ésima arandela es

$$\pi[(6 + \sqrt{4 - t_i^2})^2 - (6 - \sqrt{4 - t_i^2})^2] \Delta x_i,$$

y la suma de aproximación del volumen del toro es

$$\sum_{i=1}^n \pi[(6 + \sqrt{4 - t_i^2})^2 - (6 - \sqrt{4 - t_i^2})^2] \Delta x_i$$

ó

$$\sum_{i=1}^n 24\pi\sqrt{4 - t_i^2} \Delta x_i,$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $t_i \in [x_{i-1}; x_i]$, y el conjunto $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ determina una partición de $[-2; 2]$. Vemos que

$$V = \int_{-2}^2 24\pi\sqrt{4 - x^2} dx.$$

Calcular esta integral por medio del Teorema Fundamental requiere la determinación de una antiderivada de $24\pi\sqrt{4 - x^2}$; se da un método para efectuarlo en la Sec. 7.4.

Ejemplo 3. La región R limitada por las gráficas de las ecuaciones $y^2 = 4x$ y $x^2 = 4y$ gira alrededor del eje Y . Determine el volumen del sólido de revolución así generado.

Solución. Dibujemos las gráficas de ambas ecuaciones y determinemos los puntos de intersección de las gráficas. Los resultados se tienen en la Fig. 5.25. Para obtener una suma de aproximación de volúmenes de sólidos elementales (arandelas circulares en este caso) construiremos una partición del intervalo $[0; 4]$ (sobre el eje Y) mediante los números

$$\{y_0, y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_i, \dots, y_{n-1}, y_n\}$$

y hacemos $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$. Entonces, si

$$T_n = \{t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n\}$$

es un aumento de la partición, construiremos n arandelas, en las que la i -ésima tiene un espesor Δy_i , radio interior igual a la coordenada x del punto de la gráfica de $y^2 = 4x$ cuya coordenada y sea t_i , y radio exterior igual a la coordenada x del punto de la gráfica de $x^2 = 4y$, en el primer cuadrante y cuya coordenada y sea t_i . El i -ésimo sólido elemental se muestra en la Fig. 5.25 y su volumen es

$$\left[\pi(\sqrt{4t_i})^2 - \pi\left(\frac{t_i^2}{4}\right)^2 \right] \Delta y_i.$$

La suma de la aproximación para el volumen del sólido de revolución es

$$\sum_{i=1}^n \left[\pi(\sqrt{4t_i})^2 - \pi\left(\frac{t_i^2}{4}\right)^2 \right] \Delta y_i$$

ó

$$\sum_{i=1}^n \pi \left(4t_i - \frac{t_i^4}{16} \right) \Delta y_i$$

(36)

donde $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $t_i \in [y_{i-1}; y_i]$, y $\{y_0, y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_i, \dots, y_{n-1}, y_n\}$ de-

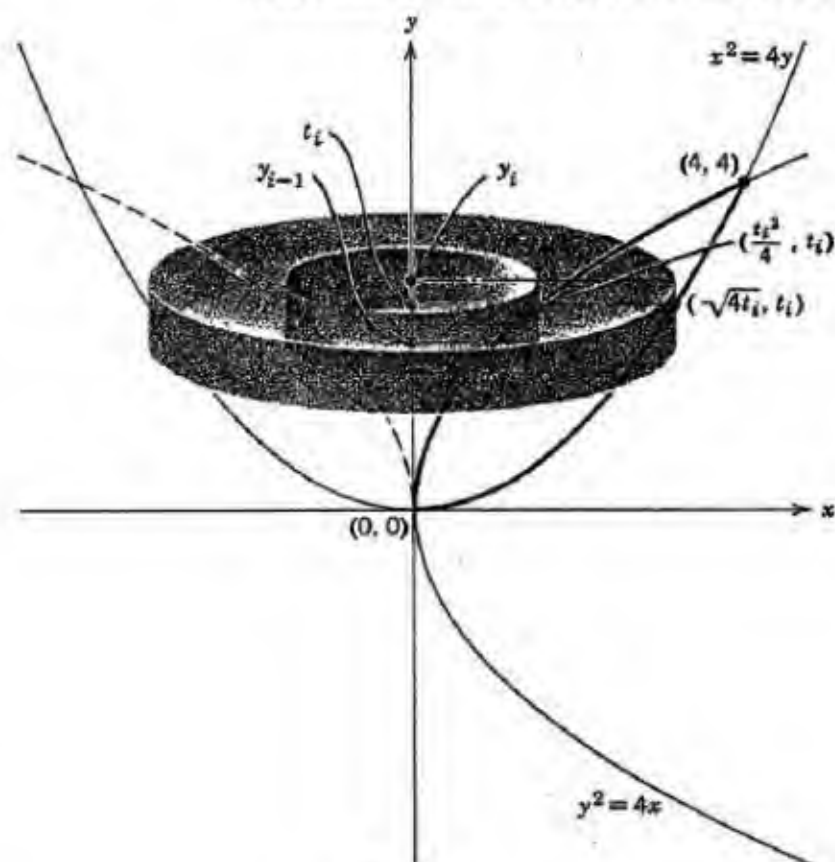


Fig. 5.25

termina una partición del intervalo $[0; 4]$. Observemos que si H es la función dada por

$$H(y) = \pi \left(4y - \frac{y^4}{16} \right) \text{ para } y \in [0; 4],$$

entonces la suma (36) es de la forma

$$\sum_{i=1}^n H(t_i) \Delta y_i,$$

que es la usada en la definición de

$$\int_0^4 H(y) dy.$$

Por tanto, si V es el volumen del sólido de revolución, podemos hacer la identificación

$$V = \int_0^4 H(y) dy = \int_0^4 \pi \left(4y - \frac{y^4}{16} \right) dy,$$

y encontraremos que

$$V = \pi \left[2y^2 - \frac{y^5}{80} \right]_0^4 = \frac{96}{5} \pi \text{ unidades cúbicas}$$

EJERCICIOS

1. Halle el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor del eje X la región que se halla en el primer cuadrante y que está limitada por las gráficas de $y^2 = x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$.

2. Sea R la región limitada por las gráficas de $3x + 2y = 6$, $x = 0$, $y = 0$.

(a) Halle el volumen del sólido que se obtiene cuando R gira alrededor del eje X .

(b) Halle el volumen del sólido que se obtiene cuando R gira alrededor del eje Y .

3. Obtenga la fórmula del volumen de un cono circular recto de altura h y base de radio r , considerando al cono como un sólido de revolución.

En los ejercicios del 4 al 10 halle el volumen del sólido generado al girar la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas, alrededor del eje indicado. En cada ejercicio dibuje una figura que indique la región que gira alrededor del eje y haga un esquema del sólido generado.

4. $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$; alrededor del eje X .

5. $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$; alrededor del eje Y .

6. $y = 6x - x^3$, $y = 0$; alrededor del eje X .

7. $y = 6x - x^3$, $y = 0$; alrededor del eje Y .

Sugestión: Demuestre que la región que gira alrededor del eje Y está limitada a la derecha por la gráfica de $x = 3 + \sqrt{9 - y}$ y a la izquierda, por la de $x = 3 - \sqrt{9 - y}$.

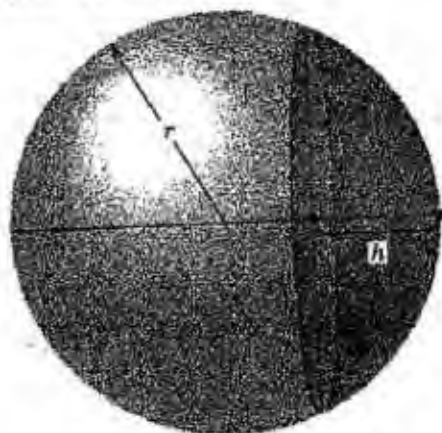


Fig. 5.26

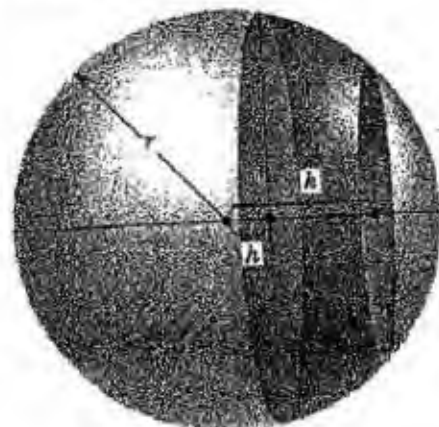


Fig. 5.27

8. $y = 1/x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$; alrededor del eje X .

9. $y = (x - 1)^2$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$; alrededor del eje X .

10. $x^2 + y - 2 = 0$, $y = 0$; alrededor del eje Y .

11. El interior del triángulo cuyos vértices son $(1, 2)$, $(4, 5)$, y $(9, 0)$ gira alrededor del eje X . Dibuje una figura que muestre la región triangular y halle el volumen del sólido de revolución generado. Sugestión: El volumen se debe expresar como la suma de dos integrales sobre intervalos diferentes.

12. Obtenga la fórmula del volumen de una esfera de radio r , considerándola como un sólido de revolución.

13. El interior de la elipse cuya ecuación es $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, $a > b$, gira alrededor del eje X . Halle el volumen del sólido generado. (Este sólido se llama *esferoide alargado*).

14. Halle el volumen del sólido generado cuando el interior de la elipse del ejercicio 13 gira alrededor del eje Y . (Este sólido se llama *esferoide achatado*.)

15. Halle el volumen de un casquete esférico de altura h , de una esfera de radio r . Vea la Fig. 5.26.

16. Halle el volumen de la porción de una esfera de radio r , que queda entre dos planos perpendiculares a un diámetro y a distancias h y k del centro de la esfera, si $0 < h < k < r$. Vea la Fig. 5.27.

5.10 Trabajo. Uno de los conceptos básicos en mecánica es el del *trabajo* realizado cuando una fuerza f produce el movimiento de un objeto una distancia d , en la dirección de la fuerza sobre una trayectoria recta. Si la fuerza f es *constante* durante el desplazamiento, el trabajo W hecho por la fuerza queda definido mediante

$$W = fd.$$

Sin embargo, si la fuerza f no es constante durante el desplazamiento del objeto a través de la distancia d , el trabajo no se puede expresar en forma tan simple.

Consideremos una partícula P que se desplaza sobre la línea coordenada, desde el punto de coordenada a hasta el de coordenada b por medio de una fuerza $f = F(x)$, $x \in [a; b]$, de donde F es una función cuyo dominio contiene al intervalo $[a; b]$. En otras palabras, $F(x)$ es la fuerza aplicada a la partícula P cuando se encuentra en el punto cuya coordenada es x . ¿Cómo hemos de definir el "trabajo" realizado en esta situación? Procederemos como para las áreas de regiones planas y para volúmenes de sólidos de revolución. Trataremos de construir una suma que dé una aproximación a la cantidad que deseamos llamar "trabajo"

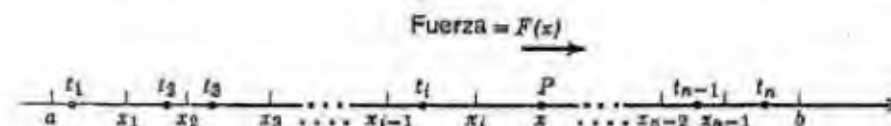


Fig. 5.28

suma que tenga la propiedad de que podamos producir una aproximación "más cercana" al "trabajo", aumentando el número de términos en la suma de aproximación mientras decrezca la magnitud de cada término.

Puesto que la fuerza opera sobre el intervalo $[a; b]$, formemos una partición P_n de este intervalo mediante el conjunto de números

$$\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ para $i = 1, 2, 3, \dots, n$ y seleccionemos un aumento

$$T_n = \{t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n\}$$

como se muestra en la Fig. 5.28.

Cuando la partícula se mueve de x_{i-1} a x_i , el trabajo realizado es *aproximadamente* igual al producto

$$F(t_i) \Delta x_i,$$

y a menor longitud Δx_i del subintervalo $[x_{i-1}; x_i]$ mayor será la aproximación. Podemos tomar la suma

$$\sum_{i=1}^n F(t_i) \Delta x_i \quad (37)$$

como una suma de aproximación para la cantidad que deseamos llamar "trabajo" W realizado al moverse la partícula de a a b . La suma (37) puede convertirse en mejor aproximación de W si disminuimos la longitud de los subintervalos de la partición lo que permite que formulemos la siguiente definición: Si existe un número W tal que dado cualquier $\varepsilon > 0$ exista un número $\delta > 0$ para el cual

$$\left| W - \sum_{i=1}^n F(t_i) \Delta x_i \right| < \varepsilon$$

para toda partición P_n de $[a; b]$ y todo aumento T_n con $N_P < \delta$, entonces W es el trabajo realizado por la fuerza $f = F(x)$ al mover una partícula de a a b , a lo largo de la línea coordenada.

Comparando esta definición del trabajo W con la de integral definida vemos que si W existe,

$$W = \int_a^b F(x) dx \quad (38)$$

siendo $F(x)$ la fuerza aplicada a la partícula cuando ésta se encuentra en el punto cuya coordenada es x .

Si la unidad de fuerza es el kilogramo, y si la unidad de distancia es un metro, entonces la unidad de trabajo es el **kilográmetro**. Otras unidades como la libra-pie, el gramo-centímetro, etc., pueden usarse como unidades de trabajo; nosotros usaremos casi únicamente el kilográmetro.

Un ejemplo simple del trabajo realizado por una fuerza no constante nos lo proporciona el alargamiento o la compresión de un resorte helicoidal. La ley de Hooke afirma que la fuerza necesaria para estirar un resorte helicoidal, varía directamente con (es proporcional a) la elongación del resorte; la fuerza $F(x)$ necesaria para producir una elongación de x unidades está dada por la expresión $F(x) = kx$. Para un resorte en particular, la constante k puede ya estar dada o debe ser calculada a partir de los datos.

Ejemplo 1. La longitud natural de un resorte es 20 cms. Dicho resorte se estira hasta una longitud de 22 cms. mediante una fuerza de 20 kgs. Halle el trabajo realizado al estirar el resorte desde 24 hasta 28 cms. de longitud.

Solución. Como hemos considerado el kilográmetro como unidad de trabajo, debemos usar mts. para medir las longitudes del resorte. Sabemos que la fuerza $F(x)$ requerida para producir un alargamiento de x mts. está dada por.

$$F(x) = kx.$$

Determinaremos el valor de k si notamos que $F(0.02) = 20$ y

$$20 = k(0.02), \quad k = 1000 \text{ kgms. por metro}$$

De donde, mientras x no exceda el límite elástico del resorte

$$F(x) = 1000x.$$

Deseamos calcular el trabajo realizado por esta fuerza si aumenta la extensión del resorte de 4 a 8 cms. = 0.08 mts. Por tanto, de acuerdo con la igualdad (38), el trabajo realizado queda dado por

$$W = \int_{0.04}^{0.08} 1000x dx = 500x^2 \Big|_{0.04}^{0.08} = 2.4 \text{ kgms.}$$

Otro problema acerca de trabajo y al cual se le pueden aplicar los métodos de integración es la determinación del trabajo realizado al bombear agua (u otro líquido) de un tanque. El principio físico que usamos en este problema es el que afirma que si un objeto se eleva una distancia vertical h , el trabajo realizado es el producto del peso del objeto, por la distancia h ; si un cuerpo que pese 6 kgs se eleva 5 mts, el trabajo realizado será $6 \cdot 5 = 30$ kgms.

Supóngase que se tiene un tanque, tal como el de la Fig. 5.29, que contiene agua hasta una profundidad de k mts. Deseamos calcular el trabajo W realizado al bombear el agua a la parte superior del tanque. Procederemos, como en las anteriores aplicaciones de la integración, escribiendo una suma de aproximación para el trabajo realizado. Veremos como esto nos conduce de un modo natural, a una definición del trabajo realizado que nos permitirá usar la integral definida para calcular este trabajo.

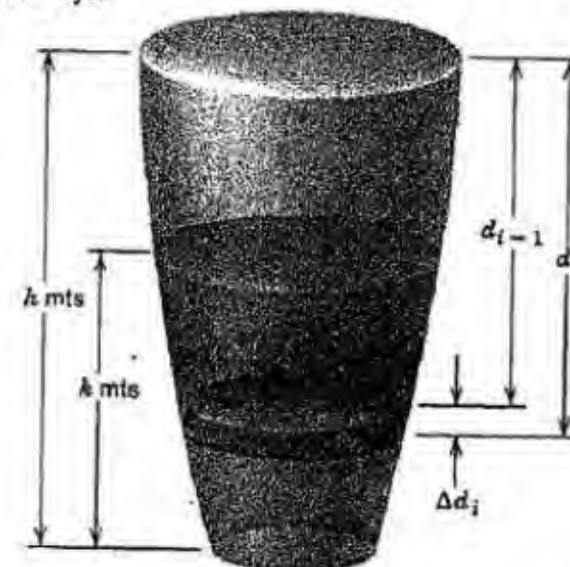


Fig. 5.29

Considérese el sólido de altura k mts. que está lleno de agua. Como primer paso, aproximemos este sólido por medio de un conjunto de sólidos elementales. En este caso, los sólidos elementales usados serán naturalmente, un conjunto de n cilindros (no necesariamente circulares); el i -ésimo cilindro aparece mostrado en la Fig. 5.29. Si el área de la base del i -ésimo sólido elemental es A_i , su volumen será $A_i \Delta d_i$. Puesto que el agua pesa (aproximadamente) 1000 kgs. por m^3 , el peso del agua en el i -ésimo sólido elemental es $1000 A_i \Delta d_i$. La cantidad de trabajo realizado para elevar este sólido elemental lleno de agua, hasta la parte superior del tanque es aproximadamente,

$$(1000 A_i \Delta d_i) d_i \quad (39)$$

y la suma

$$\sum_{i=1}^n (1000 A_i \Delta d_i) d_i \quad (40)$$

es una suma de aproximación para el trabajo realizado para vaciar el tanque. La cantidad (39) se puede convertir en una mejor aproximación (al trabajo realizado para elevar el i -ésimo sólido elemental), haciendo más pequeño el espesor Δd_i del cilindro. De forma similar, a menor Δd_i mayor aproximación de la suma (40) al valor del trabajo total realizado al bombear el agua hasta la parte superior del tanque.

Formularemos la siguiente definición. Si existe un número W tal que dada cualquier $\epsilon > 0$ haya un número $\delta > 0$ para el cual

$$\left| W - \sum_{i=1}^n (1000 A_i \Delta d_i) d_i \right| < \epsilon$$

cuando $\Delta d_i < \delta$ para $i = 1, 2, 3, \dots, n$, entonces W es el trabajo realizado al bombear el agua hasta la parte superior del tanque.

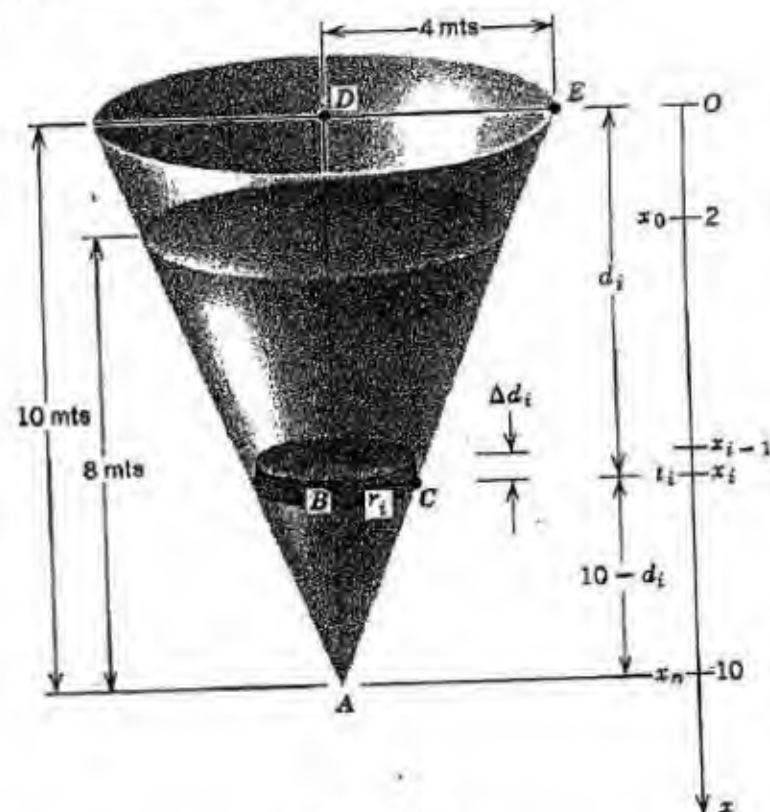


Fig. 5.30

El hallar una integral definida cuyo valor sea W , dependerá de hallar una función F cuyo dominio contenga un intervalo S de longitud k , tal que

$$F(t_i) = 1000 A_i d_i$$

para $t_i \in S$ y que sea integrable sobre S . Como se debe proceder en casos específicos se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2. Un tanque tiene forma de cono circular recto con el vértice hacia abajo y el eje vertical. El radio de la base del cono es 4 mts. y su altura es 10 mts. Si el tanque está lleno de agua hasta una profundidad de 8 mts. calcule el trabajo necesario para bombear el agua hasta la parte superior del tanque.

Solución. El tanque se muestra en la Fig. 5.30. Aproximemos el cono lleno de agua mediante un conjunto de n sólidos elementales en forma de discos; el i -ésimo sólido elemental está mostrado en la figura. El trabajo requerido para elevar el i -ésimo sólido elemental hasta la parte superior del tanque es aproximadamente

$$(1000 A_i \Delta d_i) d_i$$

donde A_i es el área de la base del i -ésimo disco. Si r_i es el radio de la base del disco, entonces

$$A_i = \pi r_i^2$$

y la cantidad aproximada de trabajo realizado para elevar el disco hasta la parte superior del tanque es

$$(1000 \pi r_i^2 \Delta d_i) d_i, \quad (41)$$

y

$$\sum_{i=1}^n (1000 \pi r_i^2 \Delta d_i) d_i \quad (42)$$

es la suma de aproximación para el trabajo W necesario para bombear el agua hasta la parte superior del tanque.

Para poder expresar el i -ésimo término (41) de la suma de aproximación en la forma

$$F(t_i) \Delta x_i, \quad (43)$$

debemos tener una línea coordenada sobre la cual se pueda graficar el dominio de F . La Fig. 5.30 muestra una posible posición para la línea coordenada; allí el origen se toma al nivel superior del tanque y el eje coordenado se dirige hacia abajo, paralelo al eje del tanque. Una vez hecho esto, cada sólido elemental usado para obtener la suma de aproximación determina un subintervalo del intervalo cerrado $[2; 10]$ sobre el eje X ; la base superior del i -ésimo disco determina un punto x_{i-1} en el eje, y la base inferior de dicho disco determina un punto x_i en el mismo eje. El conjunto de números $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ así determinado generará una partición P_n del intervalo $[2; 10]$. Si escogemos un aumento

$$T_n = \{t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n\}$$

de P_n , haciendo

$$t_i = x_i \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

veremos que

$$d_i = t_i, \quad \Delta d_i = x_i - x_{i-1} = \Delta x_i,$$

y la suma de aproximación (42) se puede escribir

$$\sum_{i=1}^n 1000\pi r_i^2 t_i \Delta x_i.$$

El i -ésimo término de esta suma no está aún en la forma (43) pero podremos llevarlo a ella si podemos expresar r_i en términos de t_i . Nótese que el triángulo ABC es semejante al triángulo ADE , de modo que

$$\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD}.$$

Además $BC = r_i$, $AB = 10 - t_i$, $DE = 4$, y $AD = 10$, así que

$$\frac{r_i}{10 - t_i} = \frac{4}{10}.$$

y

$$r_i = \frac{2}{5}(10 - t_i).$$

Por tanto la suma de aproximación (42) se puede poner

$$\sum_{i=1}^n 1000\pi \left[\frac{2}{5}(10 - t_i) \right]^2 t_i \Delta x_i \quad (44)$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $t_i \in [x_{i-1}; x_i]$, y el conjunto $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ determina una partición del intervalo $[2; 10]$. El i -ésimo término de la suma (44) es de la forma

$$F(t_i) \Delta x_i$$

donde

$$F(x) = 1000\pi \left[\frac{2}{5}(10 - x) \right]^2 x. \quad (45)$$

El trabajo requerido para bombear el agua hasta la parte superior del tanque es el número W (si existe) tal que dado cualquier $\epsilon > 0$, exista un $\delta > 0$ para la cual

$$\left| W - \sum_{i=1}^n 1000\pi \left[\frac{2}{5}(10 - t_i) \right]^2 t_i \Delta x_i \right| < \epsilon$$

cuando $\Delta x_i < \delta$. La función F dada por (45) es continua sobre $[2; 10]$ y de ahí que sea integrable sobre dicho intervalo; la suma (44) tiene la forma

$$\sum_{i=1}^n F(t_i) \Delta x_i$$

siendo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $t_i \in [x_{i-1}; x_i]$. De donde, según la definición de integral definida, vemos que el número W si existe y

$$W = \int_2^{10} F(x) dx = \int_2^{10} 1000\pi \left[\frac{2}{5}(10 - x) \right]^2 x dx.$$

Evaluando la integral tenemos

$$W = \frac{327,680}{3} \pi \text{ kgms.}$$

La forma de la integral usada para calcular W depende de la forma en que seleccionemos la línea coordenada. Por ejemplo, supóngase que en este caso el

origen se haya escogido al nivel del vértice del cono y el eje se haya dirigido hacia arriba (véase la Fig. 5.31). Entonces el sólido elemental usado para obtener la suma de aproximación generaría una partición del intervalo $[0; 8]$, en que la base inferior del i -ésimo disco determinaría un punto x_{i-1} y la base superior, un punto x_i del intervalo $[0; 8]$. El aumento T_n quedaría dado haciendo

$$t_i = x_{i-1} \text{ para } i = 1, 2, \dots, n.$$

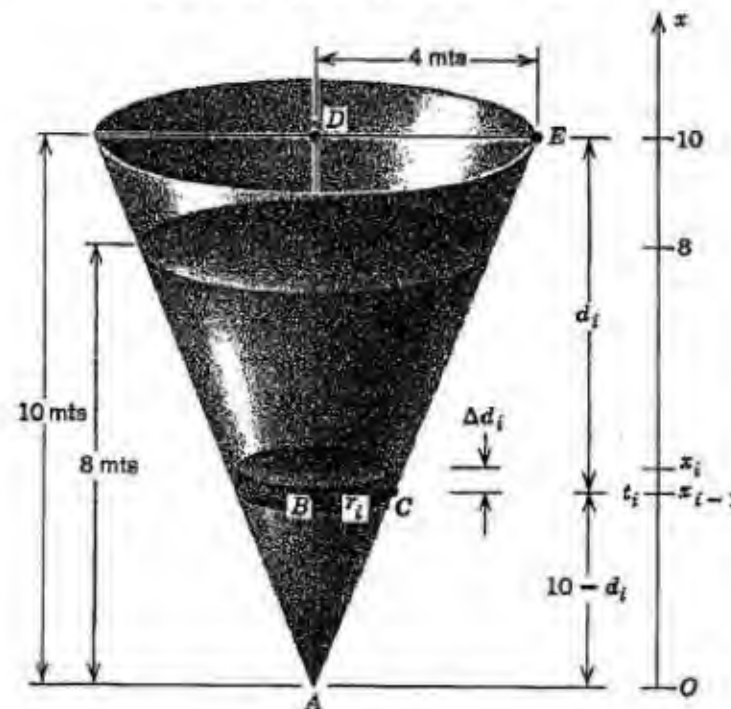


Fig. 5.31

y tendríamos

$$d_i = 10 - t_i, \quad \Delta d_i = x_i - x_{i-1} = \Delta x_i.$$

Además podemos expresar r_i en términos de t_i , observando que

$$\frac{r_i}{t_i} = \frac{4}{10}$$

y

$$r_i = \frac{2}{5} t_i$$

La suma de aproximación de W sería

$$\sum_{i=1}^n 1000\pi \left(\frac{2}{5} t_i \right)^2 (10 - t_i) \Delta x_i$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $t_i \in [x_{i-1}; x_i]$, y el conjunto $\{x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ generaría una partición de $[0; 8]$ y de aquí que

$$W = \int_0^8 1000\pi \left(\frac{2}{5} x \right)^2 (10 - x) dx.$$

El estudiante debe comprobar que el valor de W encontrado mediante esta integral concuerda con el valor encontrado en el ejemplo 2.

Ejemplo 3. Un tanque esférico subterráneo tiene un radio de 10 m. Si su parte superior se halla 9 m bajo la superficie del suelo y si el agua tiene una profundidad de 18 mts. dentro del tanque, halle el trabajo necesario para bombear el agua hasta el nivel de la superficie.

Solución. El tanque aparece en la Fig. 5.32. Aquí, los n sólidos elementales que usaremos para aproximar la parte de la esfera que está llena de agua son de nuevo, discos circulares; el i -ésimo disco se muestra en la figura. La cantidad aproximada de trabajo requerido para elevar el agua en el i -ésimo disco será

$$(1000\pi r_i^2 \Delta d_i) d_i,$$

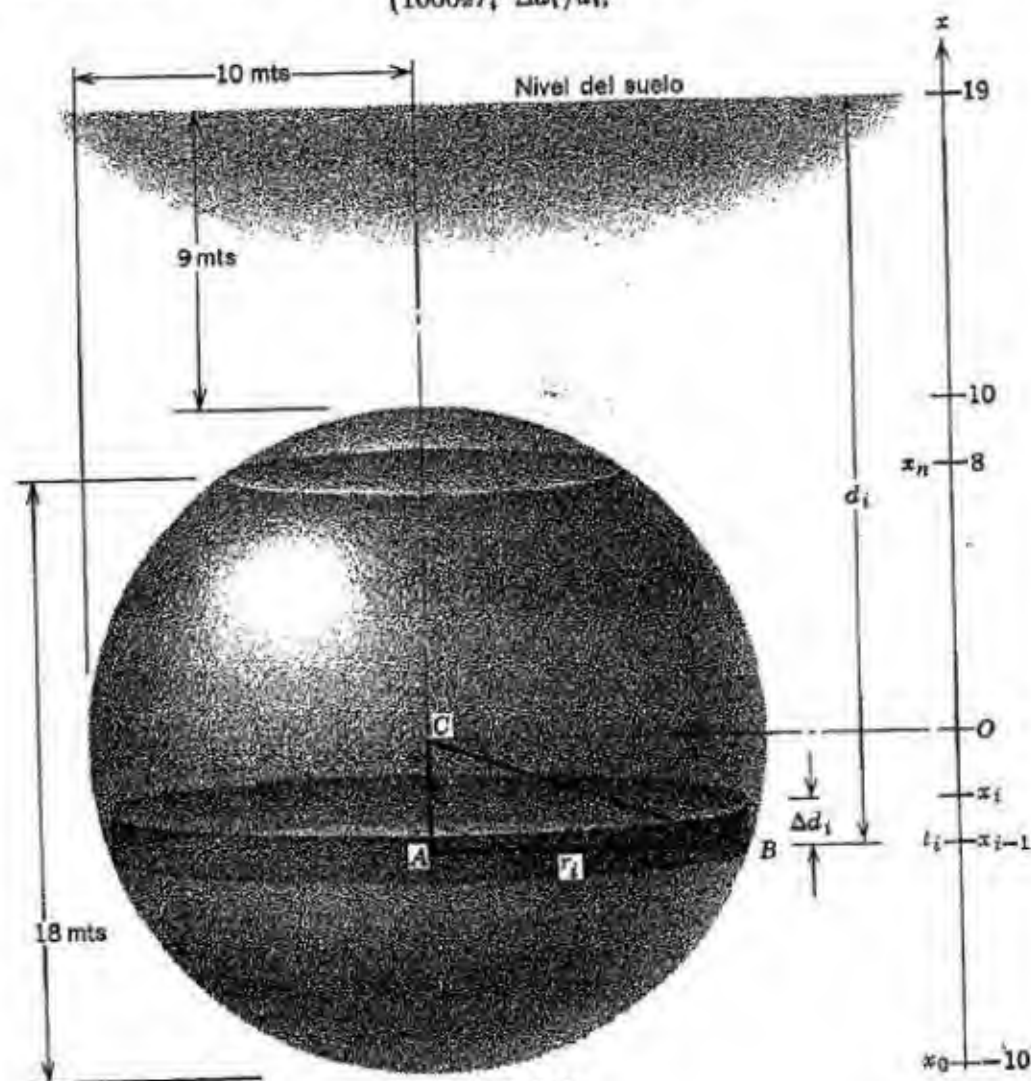


Fig. 5.32

y la suma de aproximación del trabajo total será

$$\sum_{i=1}^n (1000\pi r_i^2 \Delta d_i) d_i.$$

Coloquemos el eje coordenado como se señala, con el origen al nivel del centro del

tanque y con dirección positiva hacia arriba. La coordenada del punto del eje de nivel que corresponde al nivel superior del agua será 8 y la del nivel inferior será -10 . La base inferior del i -ésimo disco circular determinará un punto de coordenada x_{i-1} en el eje y la base superior determinará un punto de coordenada x_i . El conjunto de números así obtenidos, $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n\}$, generará una partición del intervalo $[-10; 8]$. Sea T_n el aumento de esta partición obtenida al hacer $t_i = x_{i-1}$.

Ahora bien $d_i = 19 - t_i$, $\Delta d_i = x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, y $r_i^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 = 10^2 - (t_i)^2$. De ahí que la suma de aproximación del trabajo total se puede escribir

$$\sum_{i=1}^n 1000\pi (100 - t_i^2) (19 - t_i) \Delta x_i, \quad (46)$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $t_i \in [x_{i-1}; x_i]$, y el conjunto $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ determina una partición del intervalo $[-10; 8]$. Notamos que si F es la función para la cual

$$F(x) = 1000\pi (100 - x^2) (19 - x), \quad x \in [-10; 8],$$

la suma de aproximación (46) se puede escribir

$$\sum_{i=1}^n F(t_i) \Delta x_i$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $t_i \in [x_{i-1}; x_i]$ y el conjunto $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ determina una partición de $[-10; 8]$. Puesto que la función F es continua y por eso integrable sobre $[-10; 8]$, sabemos que si existe el trabajo W para el cual (46) es la suma de aproximación y que

$$\begin{aligned} W &= \int_{-10}^8 1000\pi (100 - x^2) (19 - x) dx \\ &= 24,947,936\pi \text{ kgms.} \end{aligned}$$

Al resolver un problema de este tipo el estudiante debe dibujar primero la figura cuidadosamente. El sólido que contiene el agua que se va a bombear debe aproximarse por medio de un conjunto de sólidos elementales y el trabajo aproximado necesario para elevar el agua en el i -ésimo sólido elemental hasta el nivel deseado debe entonces calcularse. Mediante la selección adecuada de un eje coordenado, el trabajo puede expresarse en términos de una partición y un aumento de un intervalo cerrado sobre el eje y con ello encontrar una suma de aproximación para el trabajo total. Si se puede ver que el i -ésimo término de la suma de aproximación es de la forma

$$F(t_i) \Delta x_i$$

siendo F una función integrable sobre el intervalo, entonces el trabajo total existe y es igual a la integral de F sobre el intervalo apropiado.

Si deseamos encontrar el trabajo necesario para llenar un tanque, más bien que para vaciarlo, procederemos de igual forma, excepto que para cada sólido elemental calcularemos el trabajo aproximado requerido para subir el agua del

sólido elemental desde la bomba, hasta su posición final y con estas cantidades aproximadas de trabajo formaremos una suma de aproximación para el trabajo total.

EJERCICIOS

1. Una fuerza de 25 kgs. alarga un resorte 3 cms. Encuentre el trabajo requerido para alargar el resorte 2 cms. más.
 2. El largo natural de un resorte es 10 cms. Una fuerza de 90 kgs. lo alarga hasta llegar a 11 cms. Encuentre el trabajo requerido para alargarlo de 12 a 14 cms.
 3. Encuentre el trabajo efectuado al alargar un resorte 6 cms., sabiendo que se necesita una fuerza de 15 kgs. para alargarlo 1 cm.
 4. La longitud natural de un resorte es 8 cms. Un peso de 10 kgs. lo alarga 1 cm. Calcule el trabajo efectuado al estirar el resorte de 10 a 14 cms.
- En los ejercicios del 5 al 18 dibuje la figura correspondiente, indique el *i*-ésimo sólido elemental usado, exprese la cantidad aproximada de trabajo relacionada con el *i*-ésimo sólido elemental y dé una suma de aproximación para el trabajo total requerido. Indique claramente el eje coordenado usado.
5. Un tanque de forma cilíndrica circular de radio 8 m. y altura 20 m. se llena con agua. Encuentre el trabajo necesario para bombear el agua hasta llenar el tanque.
 6. Un tanque de forma cónica tiene una base de radio 10 mts. y una altura de 20 mts. Si el eje está vertical y el vértice hacia abajo, encuentre el trabajo necesario para bombear el agua que llena al tanque, hasta una altura de 15.00 mts. por sobre la parte superior del tanque.
 7. Un tanque hemisférico de 20 m. de radio está lleno de agua. Halle el trabajo requerido para bombear el agua hasta la parte superior del tanque.
 8. Calcule el trabajo efectuado para bombear el agua del tanque del ejercicio 7 hasta una altura de 10 m. sobre la parte superior del tanque.
 9. Si el tanque del ejercicio 7 está lleno hasta una profundidad de 18 m., encuentre el trabajo necesario para bombear el agua hasta la parte superior del tanque.
 10. Un tanque es un cono circular con su eje vertical, su vértice hacia abajo, base de radio 3 m. y altura 8 m. Calcule el trabajo requerido para llenar el tanque con agua que se bombea desde un punto a 30 m. abajo del vértice del tanque.
 11. Se construye un tanque hemisférico de radio 10 m. con un cilindro circular sobrepuesto de radio 10 m. y altura 20 m. Si el tanque está lleno de agua, calcule el trabajo necesario para bombear el agua hasta la parte superior del tanque.
 12. Se construye un tanque hemisférico de radio 10 m. con un cilindro circular sobrepuesto de radio 10 m. y altura 10 m. Si el tanque está lleno en un 50% de su capacidad, calcule el trabajo requerido para bombear el agua hasta la parte superior del tanque.
 13. Se construye un tanque cónico con base de radio r mts. y altura h mts. con un cilindro circular de radio r mts. y altura h mts., sobrepuesto. Calcule el trabajo requerido para llenar el tanque con agua que se bombea desde la base del tanque.
 14. Un recipiente de 8 m. de largo, cuya sección transversal vertical es un triángulo isósceles de base de 3 m. y altura de 2 m. está lleno de agua. Calcule

el trabajo requerido para bombear el agua desde el recipiente hasta una altura de 5 m. sobre la parte superior del recipiente.

15. Un tanque tiene forma cónica con eje vertical y vértice hacia arriba. El radio de la base del cono mide 5 m. y la altura es de 8 m. Si el tanque está lleno de agua calcule el trabajo necesario para bombear el agua hasta un punto a 10 mts. sobre la parte superior del tanque.

16. Un tanque hemisférico de radio de 5 m. está lleno de un líquido que pesa 60 kgs. por m^3 . Calcule el trabajo necesario para bombear el líquido hasta la parte superior del tanque.

17. Un tanque tiene la forma del sólido que se obtiene al girar una parábola sobre su eje. El tanque tiene 8 m. de profundidad y 16 m. de ancho en su parte superior y está lleno de un aceite que pesa 60 kgs. por m^3 . Calcule el trabajo requerido para bombear el aceite hasta la parte superior del tanque.

18. Un recipiente de 12 m. de largo y cuya sección transversal vertical es un semicírculo de radio de 2 m. está lleno de agua. Calcule el trabajo requerido para bombear el agua hasta la parte superior del recipiente.

5.11 Fuerza debida a la presión de flúidos. Otro tipo de problemas de física en los que conviene usar la integración es la determinación de la fuerza ejercida por un flúido sobre una pared vertical. Usaremos, además, algunos hechos básicos de la física.

1. La presión sobre un punto en el interior de un flúido en reposo es igual en todas direcciones.

2. La presión sobre un punto en el interior de un flúido es igual al peso de una columna del fluido que tenga sección transversal unitaria y altura igual a la profundidad a que esté el punto. Por tanto, si la densidad (peso de una unidad cúbica) del fluido es w , la presión p (fuerza por unidad de área) a una profundidad h unidades bajo la superficie, estará dada por

$$p = wh.$$

3. Si una placa de área A se sumerge en un flúido de densidad w con la superficie de la placa paralela a la superficie del flúido y a una profundidad de h unidades, entonces, ya que la presión es fuerza por unidad de área, la fuerza F sobre la placa estará dada por

$$F = pA = whA. \quad (47)$$

4. Si la profundidad se mide en metros, el área en metros cuadrados y la densidad en kilogramos por metro cúbico, la unidad de fuerza será el kilogramo.

5. La densidad del agua se considera generalmente como igual a 1000 kg/m^3 .

Deseamos considerar el problema de determinar la fuerza ejercida sobre un lado de una placa P , sumergida verticalmente en un flúido de densidad w . Al igual que en las tres secciones precedentes, debemos encarar primero el problema de *definir* la cantidad física cuyo valor deseamos determinar.

Sea la placa sumergida la representada en la Fig. 5.33. En esta representación colocamos un eje coordenado perpendicular a la superficie del flúido. La selección del origen y del sentido positivo del eje son arbitrarias; en la Fig. 5.33 colocamos el origen en la superficie del flúido y dirigimos el eje hacia abajo. Para que el problema se pueda manipular por los métodos matemáticos de que disponemos, suponemos que existe una función continua G , tal que el ancho de

la placa (perpendicular al eje) a una profundidad correspondiente a la coordenada x , quedará dado por $G(x)$.

Para obtener una suma de aproximación para la fuerza total sobre la placa, aproximaremos la superficie de la placa mediante un conjunto de n rectángulos. Un conjunto tal, para $n = 8$, aparece en la Fig. 5.34. Como se indica en la Fig.

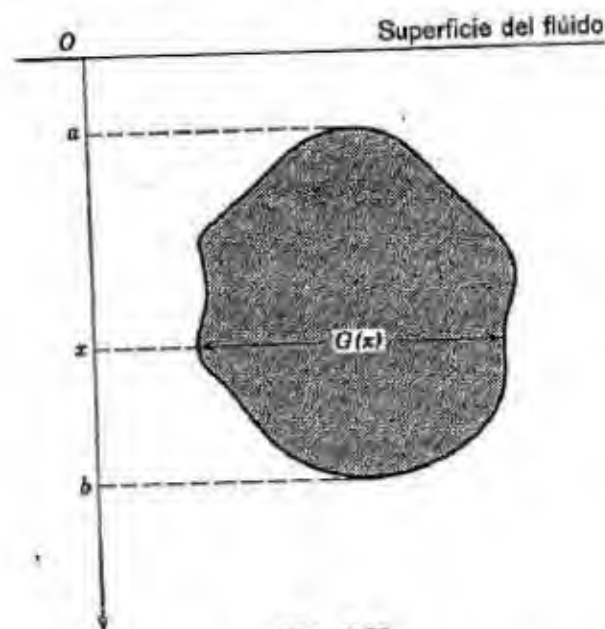


Fig. 5.33

5.34, este conjunto de n rectángulos determina una partición del intervalo $[a; b]$, donde a es la coordenada del nivel superior de la placa y b es la coordenada del nivel inferior. Sean los puntos extremos de los subintervalos de la partición los puntos

$$x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n = b$$

y hagamos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Considérese el i -ésimo rectángulo de aproximación mostrado en la Fig. 5.35. Si todos los puntos de este rectángulo estuvieran a una profundidad h_i , cuya coordenada es t_i , tendríamos, según (47), que la fuerza ejercida sobre este rectángulo sería

$$wt_i G(t_i) \Delta x_i \quad (48)$$

(ya que el área del rectángulo es $G(t_i) \Delta x_i$ y la profundidad es $h_i = t_i$). Por supuesto que no todos los puntos del i -ésimo rectángulo están a la misma profundidad, de modo que (48) es sólo una aproximación a la fuerza sobre el rectángulo; sin embargo, mientras menor sea el ancho Δx_i del rectángulo, mayor será la aproximación de (48) a la fuerza sobre el rectángulo. De todo esto, consideramos a

$$\sum_{i=1}^n wt_i G(t_i) \Delta x_i \quad (49)$$

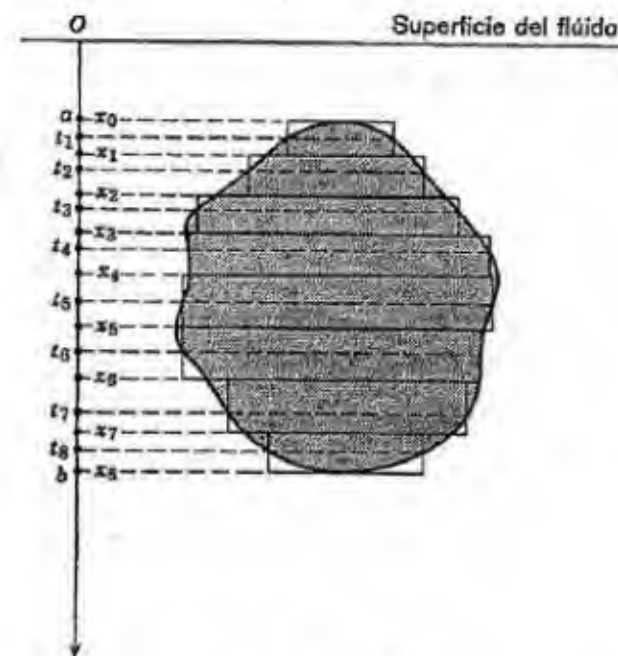


Fig. 5.34

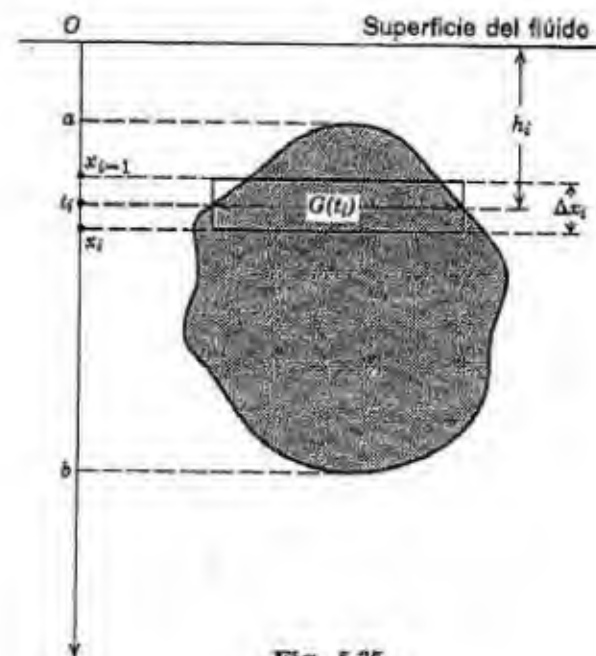


Fig. 5.35

como una suma de aproximación para la fuerza total sobre la placa; formularemos la siguiente definición: Si existe un número F para el que dado cualquier número $\epsilon > 0$, exista un número $\delta > 0$ tal que

$$\left| F - \sum_{i=1}^n w t_i G(t_i) \Delta x_i \right| < \epsilon$$

para cualquier selección de los rectángulos de aproximación con $\Delta x_i < \delta$, entonces F es la fuerza ejercida sobre un lado de la placa P , sumergida verticalmente en un fluido de densidad w .

Vemos que si H es la función definida por

$$H(x) = wxG(x), \quad x \in [a; b],$$

entonces (49) es la suma $S[H; P_n; T_n]$ usada en la definición de $\int_a^b H(x) dx$

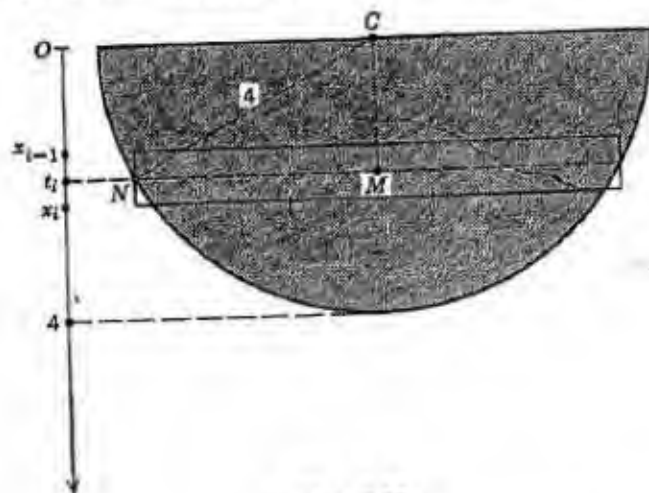


Fig. 5.36

y puesto que G es continua sobre $[a; b]$ por hipótesis, H será continua sobre $[a; b]$.

Por tanto, la integral $\int_a^b H(x) dx$ existe por lo que el número F existe y

$$F = \int_a^b H(x) dx = \int_a^b wxG(x) dx. \quad (50)$$

Al resolver problemas de este tipo el estudiante debe dibujar la figura correspondiente, situar un eje coordenado, hacer un esquema del i -ésimo rectángulo de aproximación y expresar la aproximación (48) y la suma de aproximación (49). De la suma de aproximación (49), el estudiante puede determinar la función H y formular la integral (50).

Ejemplo 1. Calcule la fuerza ejercida sobre el extremo semicircular de un recipiente que está lleno de agua si el semicírculo tiene un radio de 4 mts.

Solución. El extremo del recipiente aparece en la Fig. 5.36. Seleccionemos el origen del eje coordenado en la superficie del agua (parte superior del recipiente) y dirijamos el eje hacia abajo. Aproximemos el área del extremo del

recipiente mediante n rectángulos, el i -ésimo de los cuales aparece en la Fig. 5.36. Expresemos ahora la coordenada de la parte superior del i -ésimo rectángulo por x_{i-1} , la coordenada de la parte inferior por x_i y la coordenada del nivel en que el ancho del recipiente es igual a la longitud del i -ésimo rectángulo la expresaremos por t_i , donde $t_i \in [x_{i-1}; x_i]$. La longitud del i -ésimo rectángulo es $2\sqrt{NM}$, donde

$$\begin{aligned} NM^2 &= NC^2 - CM^2, \\ NM &= \sqrt{(4)^2 - (t_i)^2}. \end{aligned}$$

De donde la longitud del i -ésimo rectángulo será

$$2\sqrt{16 - t_i^2},$$

y puesto que su ancho es $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, su área será

$$2\sqrt{16 - t_i^2} \Delta x_i.$$

Podemos ahora expresar la fuerza *aproximada* sobre el i -ésimo rectángulo como

$$2(1000)(t_i\sqrt{16 - t_i^2} \Delta x_i)$$

y la suma de aproximación de la fuerza total al extremo del recipiente será

$$\sum_{i=1}^n 2(1000)t_i\sqrt{16 - t_i^2} \Delta x_i,$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $t_i \in [x_{i-1}; x_i]$, y el conjunto $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ determina una partición del intervalo $[0; 4]$. Puesto que la función H para la que

$$H(x) = 2(1000)x\sqrt{16 - x^2}$$

es continua sobre $[0; 4]$, la fuerza F queda dada por

$$\begin{aligned} F &= \int_0^4 H(x) dx = \int_0^4 2000x\sqrt{16 - x^2} dx \\ &= 2000 \left[-\frac{1}{3}(16 - x^2)^{3/2} \right]_0^4 = \frac{(2000)(64)}{3} = \frac{128000}{3} \text{ kgs.} = \frac{128}{3} \text{ tons.} \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Un dique con forma de segmento parabólico tiene 40 m. de ancho en su parte superior y 40 m. de profundidad. Calcule la fuerza sobre una cara del dique si el nivel del agua está en la parte superior del dique.

Solución. La Fig. 5.37 muestra una representación del dique. En este caso resulta conveniente situar el origen del eje coordenado en la parte inferior del dique y dirigir el eje hacia arriba como se ve en la figura. Se muestra en ella también el i -ésimo rectángulo de aproximación. Llamemos x_{i-1} a la coordenada de la parte inferior del rectángulo, x_i a la coordenada de la parte superior y t_i a la del nivel en que el ancho del dique es igual a la longitud del i -ésimo rectángulo, donde $t_i \in [x_{i-1}; x_i]$. La longitud del i -ésimo rectángulo es $2s_i$; deseamos encontrar una función G para la cual $s_i = G(t_i)$. Notamos que la pareja (t_i, s_i) puede considerarse como las coordenadas de un punto sobre una parábola con vértice en el origen, eje sobre el eje X y que pasa por el punto $(40, 20)$, (véase la Fig. 5.38).

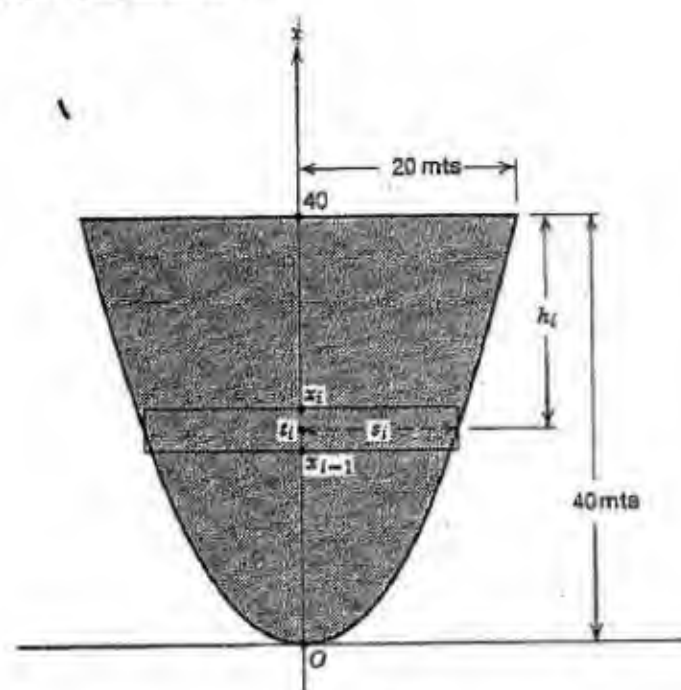


Fig. 5.37

Esta parábola es la gráfica de la ecuación $y^2 = kx$, donde k quedará determinada mediante la condición de que la parábola pase por $(40, 20)$. De esto resulta que

$$(20)^2 = k(40) \text{ y } k = 10,$$

de modo que la ecuación de la parábola es $y^2 = 10x$.

Por tanto, $s_i^2 = 10t_i$, $s_i = \sqrt{10t_i}$,
y la longitud del i -ésimo rectángulo será

$$2s_i = 2\sqrt{10t_i}.$$

El ancho del i -ésimo rectángulo es $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y la profundidad h_i en el nivel cuya coordenada es t_i será $h_i = 40 - t_i$.

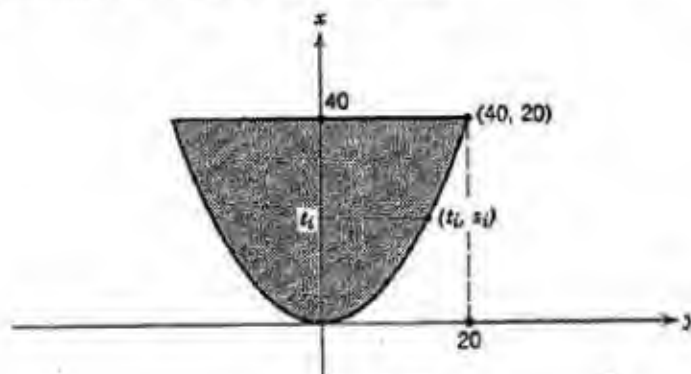


Fig. 5.38

De aquí que la fuerza aproximada sobre el i -ésimo rectángulo sea

$$1000(40 - t_i)(2\sqrt{10t_i})\Delta x_i,$$

y la suma de aproximación para la fuerza total sobre la cara del dique será

$$\sum_{i=1}^n 2000(40 - t_i)\sqrt{10t_i}\Delta x_i \quad (51)$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $t_i \in [t_{i-1}, t_i]$, y el conjunto $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ determina una partición del intervalo $[0; 40]$. La suma (51) es de la forma $\sum_{i=1}^n H(t_i)\Delta x_i$ donde

$$H(x) = 2000(40 - x)\sqrt{10x},$$

y puesto que H es continua sobre $[0; 40]$, tendremos que

$$\begin{aligned} F &= \int_0^{40} H(x) dx = \int_0^{40} 2000(40 - x)\sqrt{10x} dx \\ &= 2000 \int_0^{40} [40\sqrt{10} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{10}(x)^{3/2}] dx \\ &= 2000[40\sqrt{10} \cdot \frac{2}{3}(40)^{3/2} - \sqrt{10} \cdot \frac{2}{5}(40)^{5/2}] \\ &= \frac{12,800,000\sqrt{2}}{3} \text{ kgs} = \frac{12,800\sqrt{2}}{3} \text{ tons} \end{aligned}$$

EJERCICIOS

En cada uno de los siguientes ejercicios dibuje una figura que represente la superficie sobre la que se ejerce la fuerza que se va a calcular, indicando claramente el eje coordenado usado. Trace también el i -ésimo rectángulo de aproximación, dé una aproximación para la fuerza sobre este rectángulo y formule una suma de aproximación para la fuerza total sobre la superficie.

1. Un tanque cilíndrico circular de 6 mts. de diámetro tiene su eje horizontalmente. Si está lleno de agua hasta la mitad, calcule la fuerza ejercida sobre una de las paredes verticales del tanque.

2. Un recipiente cuya sección vertical es una parábola mide 3 mts. de ancho en su parte superior y 3 mts. de profundidad. Si el recipiente está lleno de agua, calcule la fuerza sobre un extremo.

3. Un tablero de forma triangular con base de 4 mts. y altura de 2 mts. se sumerge verticalmente en agua. Calcule la fuerza ejercida sobre un lado del tablero cuando la base está al nivel de la superficie del agua.

4. Calcule la fuerza ejercida sobre una cara del tablero del ejercicio 3 si la base está horizontalmente y a 3 mts. bajo la superficie del agua y el vértice queda bajo la base.

5. Los extremos verticales de un recipiente para agua son triángulos isósceles de 5 mts. de ancho en su parte superior y 5 mts. de profundidad. Calcule la fuerza ejercida sobre un extremo del recipiente cuando éste está lleno de agua.

6. La pared vertical de un dique es la parte inferior de una elipse cuyo eje mayor mide 60 mts. y forma la parte superior del dique, y cuyo eje menor mide 40 mts. Calcule la fuerza ejercida sobre la pared del dique si el nivel del agua llega a la parte superior de la pared.

7. Si en el ejercicio 6 el eje menor de la elipse forma la parte superior del dique, calcule la fuerza ejercida sobre la pared si el nivel del agua queda en la parte superior de ella.

8. Encuentre dónde se ha de trazar una línea horizontal sobre el tablero triangular del ejercicio 3, para que la fuerza sobre la porción del tablero que quede arriba de la línea sea igual a la fuerza sobre la porción inferior.

9. Un cuadrado con lados de longitud s se sumerge verticalmente en un fluido, quedando un lado en la superficie. Encuentre dónde se ha de trazar una línea en el cuadro, paralela a la superficie del fluido, para que la fuerza ejercida sobre la porción del cuadrado que quede arriba de la línea, sea igual a la fuerza sobre la porción inferior.

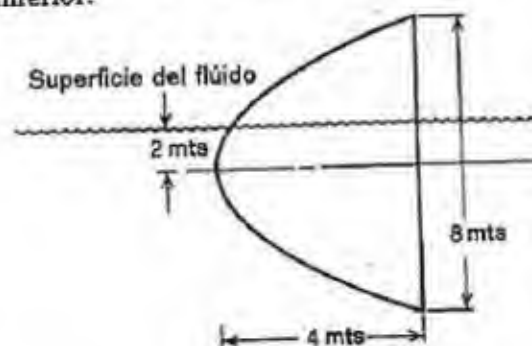


Fig. 5.39

10. Una compuerta rectangular en un dique vertical tiene 10 mts. de largo y 6 mts. de ancho, con el lado mayor paralelo a la superficie del agua. Calcule la fuerza ejercida sobre la compuerta cuando el nivel del agua queda a 8 mts. arriba del lado superior de la compuerta. ¿Cuánto más ha de subir el nivel del agua para duplicar dicha fuerza?

11. Una compuerta de esclusa tiene forma rectangular con la arista superior al nivel de la superficie del agua. Dicha compuerta se divide en tres partes mediante dos líneas trazadas desde el punto medio de la arista inferior hasta las esquinas de arriba. Demuestre que la fuerza ejercida sobre cada parte es la misma.

12. Una placa con forma de segmento parabólico se sumerge verticalmente en agua quedando el vértice en la superficie del agua y el eje vertical. La profundidad en la parte inferior de la placa es de 20 mts. y su ancho allí es de 12 mts. Calcule la fuerza ejercida sobre una cara de la placa.

13. Una placa con forma de segmento parabólico con base de 8 mts. y altura de 4 mts. se sumerge verticalmente y no por completo, en un fluido que pesa 60 kg./m^3 . Si la base se coloca verticalmente y el eje de la parábola paralelo a la superficie y a 2 mts. bajo ella, calcule la fuerza ejercida sobre una cara de la placa (véase la Fig. 5.39).

EJERCICIOS ADICIONALES AL CAPITULO 5

Calcule la integral propuesta en cada uno de los ejercicios del 1 al 12.

1. $\int_0^1 (3x+2)^2 dx.$

2. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x-1)^3}.$

3. $\int_0^a \sqrt{4a+5x} dx.$

4. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin \frac{1}{2} x dx:$

5. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta.$

6. $\int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta.$

7. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x dx.$

8. $\int_0^{\pi/2} 3 \sin 2x dx.$

9. $\int_1^2 \left(4t^3 - \sin \frac{\pi t}{2} \right) dt.$

10. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}.$

11. $\int_{-1}^1 x \sqrt{3-2x^2} dx.$

12. $\int_0^a \frac{x dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}, a > 0.$

En cada uno de los ejercicios del 13 al 16, halle el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas.

13. $y = -x^2 + 4x - 3, y = 0.$

14. $y^2 = 4 + x, y = x - 2.$

15. $y = \frac{4x}{(x^2+1)^2}, x = 1, x = 3, y = 0.$

16. $y = x^3 - 4x^2 + 3x, y = 0.$

17. La región que constituye la gráfica de $\{(x, y) | \frac{1}{2}x^2 \leq y \leq 2x^{1/2}, 0 \leq x \leq 4\}$ se hace girar alrededor del eje X . Halle el volumen del sólido de revolución generado.

18. La región que constituye la gráfica de $\{(x, y) | 0 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 4\}$ se hace girar alrededor de la línea cuya ecuación es $x = 6$. Halle el volumen del sólido de revolución generado.

19. Una compuerta con forma de segmento parabólico mide 32 mts. de ancho en la base y tiene 16 mts. de profundidad, con su eje vertical. Si el nivel del agua está a 3 mts. sobre el vértice, calcule la fuerza sobre la compuerta, debida a la presión del agua.

20. Un tanque para agua tiene forma de cono circular recto invertido, con su eje vertical y vértice hacia abajo. El tanque mide 16 mts. de diámetro en su parte superior y tiene 12 mts. de profundidad. Si está lleno de agua, calcule el trabajo necesario para bombearla hasta un punto a 4 mts. sobre la parte superior del tanque.

Funciones trascendentes

Hemos descrito una *función algebraica* en la Sec. 1.4 y expresábamos que una función que no es algebraica es llamada *función trascendente*. En este capítulo estudiaremos el cálculo de aquellas funciones trascendentes comúnmente llamadas *funciones trascendentes elementales*. Éstas incluyen las funciones trigonométricas, las trigonométricas inversas, las logarítmicas y las exponenciales. En la Sec. 6.1 recapitularemos y extenderemos nuestros resultados obtenidos previamente, concernientes a las funciones trigonométricas y en secciones subsecuentes de este capítulo definiremos las funciones trascendentes elementales aún no definidas.

6.1 Funciones trigonométricas. Las funciones de nuestra tabla son funciones trigonométricas. Al dar los dominios de Tan, Cot, Sec y Csc, n es un entero

	Dominio	Rango
Sen = $\{(x, y) \mid y = \text{sen } x\}$	Re	$[-1; 1]$
Cos = $\{(x, y) \mid y = \text{cos } x\}$	Re	$[-1; 1]$
Tan = $\{(x, y) \mid y = \text{tan } x\}$	$\{x \in Re \mid x \neq (\pi/2) + n\pi\}$	Re
Cot = $\{(x, y) \mid y = \text{cot } x\}$	$\{x \in Re \mid x \neq n\pi\}$	Re
Sec = $\{(x, y) \mid y = \text{sec } x\}$	$\{x \in Re \mid x \neq (\pi/2) + n\pi\}$	$\{y \in Re \mid y \geq 1\}$
Csc = $\{(x, y) \mid y = \text{csc } x\}$	$\{x \in Re \mid x \neq n\pi\}$	$\{y \in Re \mid y \geq 1\}$

En la Sec. 3.7 establecimos las fórmulas básicas

$$D_x \text{sen } x = \text{cos } x \quad \text{y} \quad D_x \text{cos } x = -\text{sen } x,$$

y en la Sec. 3.9 usamos la regla de la cadena con estas fórmulas para demostrar que si $u = V(x)$ y si $V'(x)$ existe sobre S , entonces

$$D_x \text{sen } u = \text{cos } u D_x u, \quad (1)$$

y

$$D_x \text{cos } u = -\text{sen } u D_x u. \quad (2)$$

Mediante las fórmulas (1) y (2) y otras fórmulas para derivadas, demostramos en los ejercicios 51 a 54 de la Sec. 3.9 que

$$D_x \tan u = \sec^2 u D_x u, \quad (3)$$

$$D_x \cot u = -\csc^2 u D_x u, \quad (4)$$

$$D_x \sec u = \sec u \tan u D_x u, \quad (5)$$

$$D_x \csc u = -\csc u \cot u D_x u. \quad (6)$$

Las fórmulas (1) y (2) son válidas para $x \in S$, las (3) y (5) lo son para $\{x | x \in S \text{ y } V(x) \neq (\pi/2) + n\pi\}$ y las fórmulas (4) y (6) valen para $\{x | x \in S \text{ y } V(x) \neq n\pi\}$.

Si el estudiante no ha comprobado estas fórmulas, debe hacerlo. Las sugerencias para realizar estas deducciones se dan en los ejercicios mencionados.

A continuación damos ejemplos del uso de las fórmulas (1) a (6):

$$D_x \sin 2x^3 = (\cos 2x^3) D_x(2x^3) = 6x^2 \cos 2x^3,$$

$$D_x \cos(\sin x) = [-\sin(\sin x)] D_x \sin x = -\cos x \sin(\sin x),$$

$$D_x \tan^2 3x = 2 \tan 3x D_x \tan 3x = (2 \tan 3x \sec^2 3x) D_x(3x) \\ = 6 \tan 3x \sec^2 3x,$$

$$D_x \cot 3x^2 = (-\csc^2 3x^2) D_x(3x^2) = -6x \csc^2 3x,$$

$$D_x \sec 5x^2 = (\sec 5x^2 \tan 5x^2) D_x(5x^2) = 10x \sec 5x^2 \tan 5x^2,$$

$$D_x \csc 3t^2 = (-\csc 3t^2 \cot 3t^2) D_x(3t^2) = -9t \csc 3t^2 \cot 3t^2.$$

Como diferenciales, las fórmulas (1) a (6) quedarán como sigue:

$$\begin{aligned} d(\sin u) &= \cos u \, du, & d(\cos u) &= -\sin u \, du, \\ d(\tan u) &= \sec^2 u \, du, & d(\cot u) &= -\csc^2 u \, du, \\ d(\sec u) &= \sec u \tan u \, du, & d(\csc u) &= -\csc u \cot u \, du. \end{aligned}$$

El tener familiaridad con estas fórmulas para diferenciales facilita el cálculo de antiderivadas. Respecto a esto, es bueno tener los siguientes datos presentes:

$$\text{Si } dy = a \sin u \, du, \quad \text{entonces } y = -a \cos u + k; \quad (7)$$

$$\text{si } dy = a \cos u \, du, \quad \text{entonces } y = a \sin u + k; \quad (8)$$

$$\text{si } dy = a \sec^2 u \, du, \quad \text{entonces } y = a \tan u + k; \quad (9)$$

$$\text{si } dy = a \csc^2 u \, du, \quad \text{entonces } y = -a \cot u + k; \quad (10)$$

$$\text{si } dy = a \sec u \tan u \, du, \quad \text{entonces } y = a \sec u + k; \quad (11)$$

$$\text{si } dy = a \csc u \cot u \, du, \quad \text{entonces } y = -a \csc u + k. \quad (12)$$

Las proposiciones (7) y (8) deben ser ya familiares puesto que se han enunciado en la Sec. 3.14 y hemos hecho numerosas aplicaciones de ellas. Las proposiciones (9), (10), (11) y (12) se pueden demostrar en forma semejante a la que se usó para demostrar (7) y (8). Para recordar al lector el procedimiento, demostraremos (9).

Supóngase que $F(x)$ tiene la propiedad de que

$$D_x F(x) = a \sec^2 u D_x u. \quad (13)$$

Según (3)

$$D_x(a \tan u) = a \sec^2 u D_x u. \quad (14)$$

Recuérdese que según el teorema 20 de la Sec. 3.11

$$D_x F(x) = D_x G(x) \Rightarrow F(x) = G(x) + k. \quad (15)$$

A partir de (13), (14) y (15) se sigue que

$$F(x) = a \tan u + k.$$

Es decir que

$$\text{si } F'(x) = a \sec^2 u D_x u, \text{ entonces } F(x) = a \tan u + k. \quad (16)$$

Si hacemos $y = F(x)$ de modo que $dy = F'(x) dx$, la proposición (9) se sigue de (16) y de la definición de diferencial.

$$\text{Si } dy = \sec^2 2x \, dx = \frac{1}{2} \sec^2 2x \, d(2x),$$

$$\text{entonces según (9) } y = \frac{1}{2} \tan 2x + k.$$

$$\text{Si } dy = \sec 5x \tan 5x \, dx = \frac{1}{5} \sec 5x \tan 5x \, d(5x),$$

$$\text{entonces según (11) } y = \frac{1}{5} \sec 5x + k.$$

Ejemplo. La región limitada por la curva $y = \tan x$, el eje X y la línea cuya ecuación es $x = \pi/4$ gira alrededor del eje X . Calcule el volumen V del sólido generado.

Solución. Usando el procedimiento señalado en la Sec. 5.9 obtenemos

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi/4} \tan^2 x \, dx = \pi \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - 1) \, dx \\ &= \pi \left(\int_0^{\pi/4} \sec^2 x \, dx - \int_0^{\pi/4} dx \right) = \pi \left[\tan x - x \right]_0^{\pi/4} \\ &= \pi \left(\tan \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - \tan 0 + 0 \right) = \pi \left(\tan \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \pi \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \text{ unidades cúbicas.} \end{aligned}$$

EJERCICIOS

Encuentre la derivada indicada en cada uno de los ejercicios del 1 al 12.

1. $D_x \cos 2x.$

2. $D_x \sin at.$

3. $D_x \sin(2x - 1).$

4. $D_x(\sin \theta - \theta).$

5. $D_x \sqrt{1 - \sin 2x}.$

6. $D_x(\cos 4x)^{3/4}.$

7. $D_y(y \tan \frac{1}{2}y).$

8. $D_x(\cot^2 x^2 - \csc^2 x^2).$

9. $D_x \tan^3 3x.$

10. $D_x(\sec x \cot x).$

11. $D_x \csc(2 - 3x).$

12. $D_x \cot(3x - 4).$

Halle $D_x y$ para cada uno de los ejercicios del 13 al 24.

13. $y = x \cot x^2.$

14. $y = 4 \tan 2x - 2 \cot 3x.$

15. $y = \sec^2 3x + \cos^2 3x.$

16. $y = a \sec(x/a).$

17. $y = \tan(\tan x).$

18. $y = (\csc x / \csc 2x).$

19. $y = \tan x - x$.

21. $y = \tan^2 ax$.

23. $y = a \sec^2 (x/2)$.

20. $y = \csc 2x \cot x$.

22. $y = \sec^2 ax$.

24. $y = x^2 \tan \frac{1}{2}x$.

Halle $D_x y$ para cada uno de los ejercicios del 25 al 28.

25. $\tan y = 2x/(1 - x^2)$.

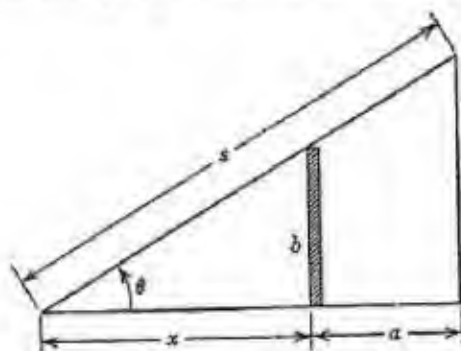
26. $\csc x^2 + \cot 3y = 1$.

27. $y \tan 2x = x$.

28. $\sin 2x + \sin 3y = \tan 2x \tan 3y$.

29. Halle el valor máximo de $\tan x + \cot x$; $x \in (0; \pi/2)$.

30. Se va a reforzar una pared por medio de una viga que debe pasar sobre otra pared baja de b metros de altura y situada a a metros de la pared alta que va a ser reforzada (véase la fig. siguiente). Halle la longitud s de la viga más corta



que se pueda usar. *Sugestión:* En la figura vemos que $s = (a + x) \sec \theta$ y que $x = b \cot \theta$. Expresé s en términos de θ y halle el ángulo θ para que s sea mínima.

31. Una esfera de radio a reposa sobre una mesa plana. Halle la altura y el radio del cono de volumen mínimo que encierre a la esfera y que tenga su base circular sobre la mesa. *Sugestión:* Use la mitad del ángulo en vértice del cono como variable independiente.

En los ejercicios del 32 al 39 halle una solución general de la ec. dif. dada.

32. $dy = \sec^2 \pi x dx$.

33. $dy = \sec 3x \tan 3x dx$.

34. $dy = x \sec x^2 \tan x^2 dx$.

35. $dy = \csc ax \cot ax dx$.

36. $dy = (\sec^2 5x - \sec 5x \tan 5x) dx$.

37. $dy = (\sec x + \tan x)^2 dx$.

38. $dy = \sec^2 x \tan x dx$.

39. $dy = \cos^2 2x \sin 2x dx$.

En los ejercicios del 40 al 43 resuelva el sistema diferencial dado.

40. $dy = \tan^2 x \sec^2 x$, $y = 1$ cuando $x = \pi/4$.

41. $dy = \csc 4x \cot 4x$, $y = 1$ cuando $x = \pi/8$.

42. $dy = (1/x^2) \csc^2 (2/x)$, $y = 1$ cuando $x = 4/\pi$.

43. $dy = \sec 3x \tan 3x dx$, $y = 5/3$ cuando $x = \pi/9$.

44. Halle la pendiente de la gráfica de $y = \tan \frac{1}{2}x$ en $x = \pi/2$.

45. Halle el área de la región limitada por un arco de la curva cuya ecuación es $y = 2 \sin (\pi x/2)$ y por el eje X .

46. Halle el volumen del sólido de revolución que se genera cuando la región limitada por las gráficas de $y = \tan (\pi x/2)$, el eje X y $x = 1/2$, gira alrededor del eje X .

Si la especificación de la función de posición S , de un punto en movimiento rectilíneo tiene la forma $S(t) = r \sin bt$ o la forma $S(t) = r \cos bt$, el movimiento del punto es llamado *movimiento armónico simple*. En los ejercicios del 47 al 50 halle una especificación para la función velocidad y la función aceleración para la $S(t)$ dada.

47. $S(t) = 5 \sin 3t$.

48. $S(t) = -10 \cos 3t$.

49. $S(t) = 8 \cos 4t$.

50. $S(t) = -3 \sin 4t$.

51. Demuestre que si un punto P se mueve sobre un círculo de radio r con velocidad angular constante de b radianes por segundo, entonces la proyección de P sobre un diámetro dado del círculo tiene movimiento armónico simple.

6.2 Funciones trigonométricas inversas. Las seis funciones trigonométricas son periódicas y por tanto no son biunívocas. En consecuencia, la inversa de una función trigonométrica no es función. Sin embargo, se puede obtener una función biunívoca de una función trigonométrica dada, restringiendo el dominio en forma apropiada y entonces la inversa de tal función será una función. Por ejemplo

$$\text{Sen} = \{(x, y) \mid y = \sin x\}$$

no es biunívoca, pero la función

$$F = \{(x, y) \mid y = \sin x, x \in [-\pi/2; \pi/2], y \in [-1; 1]\}$$

si lo es (Fig. 6.1).

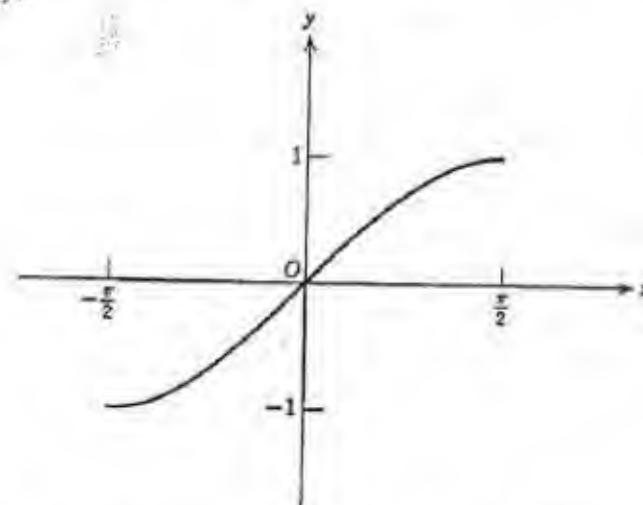


Fig. 6.1 $F = \{(x, y) \mid y = \sin x, x \in [-\pi/2; \pi/2]\}$

Consideremos la función F recién definida. Como se mostró en el ejemplo 3 de la Sec. 4.4, esta función es biunívoca y por tanto tiene una inversa que es función. Esta inversa, que se expresa mediante Arcsen, es la **función seno inverso**.

$$\text{Arcsen} = \{(x, y) \mid x = \sin y, y \in [-\pi/2; \pi/2], x \in [-1; 1]\}.$$

La gráfica de Arcsen aparece en la Fig. 6.2. Escribiremos $\arcsen x$ para representar la segunda componente del par ordenado que pertenece a Arcsen y cuya primera componente es x . Luego, según la definición de Arcsen

$$y = \arcsen x \iff x = \sen y \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

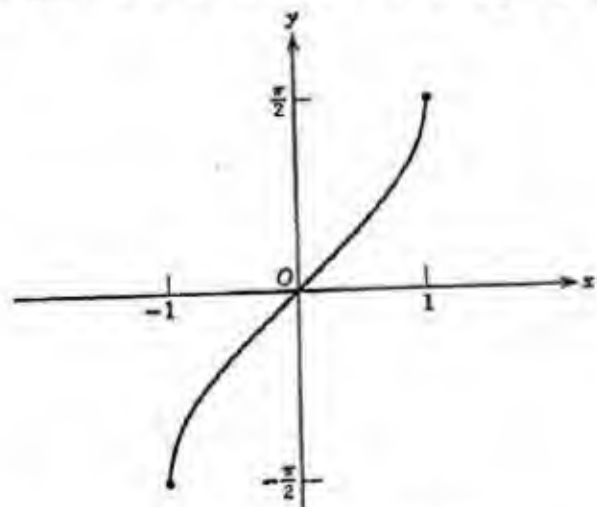


Fig. 6.2 Arcsen = $\{(x, y) \mid x = \sen y, y \in [-\pi/2; \pi/2]\}$

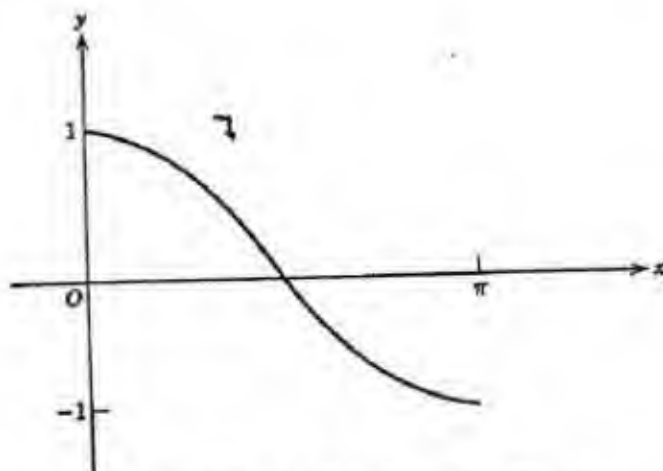


Fig. 6.3 $G = \{(x, y) \mid y = \cos x, x \in [0; \pi]\}$

y $\arcsen a$, donde $a \in [-1; 1]$ es el número único $b \in [-\pi/2; \pi/2]$ para el cual $\sen b = a$.

Por ejemplo:

$$\arcsen \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}; \quad \arcsen \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

Del ejemplo 3 de la Sec. 4.4 sabemos que Arcsen es derivable sobre $(-1; 1)$ y que

$$D_x \arcsen x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad x \in (-1; 1). \quad (17)$$

Considérese la función

$$G = \{(x, y) \mid y = \cos x, x \in [0; \pi], y \in [-1; 1]\},$$

cuya gráfica se da en la Fig. 6.3. Del ejercicio 9 de la Sec. 4.4 sabemos que G es biunívoca, de donde su inversa es una función. Dicha inversa, que se denota por Arccos, es la función coseno inverso.

$$\text{Arccos} = \{(x, y) \mid x = \cos y, y \in [0; \pi], x \in [-1; 1]\}.$$

La gráfica de Arccos se muestra en la Fig. 6.4. Escribiremos $\arccos x$ para representar la segunda componente del par ordenado que pertenece a Arccos y cuya primera componente es x . Luego, según la definición de Arccos,

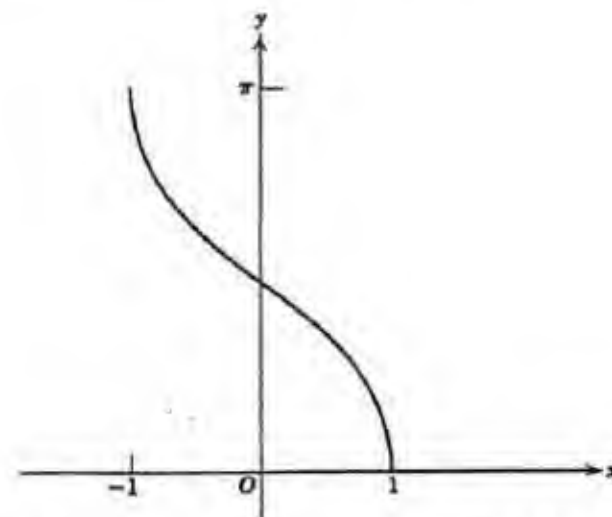


Fig. 6.4 Arccos = $\{(x, y) \mid x = \cos y, y \in [0; \pi]\}$

$$y = \arccos x \iff x = \cos y \quad y \in [0; \pi],$$

y $\arccos a$, donde $a \in [-1; 1]$ es el número único $b \in [0; \pi]$ para el cual $\cos b = a$. Por ejemplo

$$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}; \quad \arccos \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Sabemos, del ejercicio 9 de la Sec. 4.4 que Arccos es derivable sobre $(-1; 1)$, y que

$$D_x \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad x \in (-1; 1). \quad (18)$$

Como ya hemos comentado anteriormente, la función Tan no es biunívoca sin embargo, consideremos la función

$$H = \{(x, y) \mid y = \tan x, x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}), y \in Re\},$$

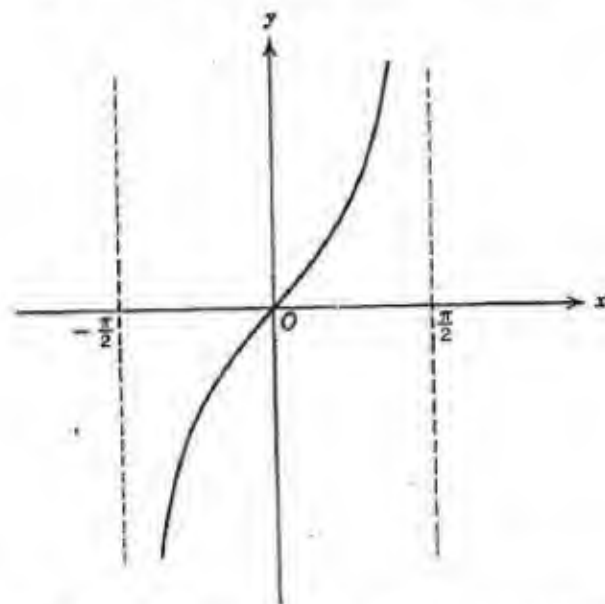


Fig. 6.5 $H = \{(x, y) \mid y = \tan x, x \in (-\pi/2; \pi/2)\}$

cuya gráfica está dada en la Fig. 6.5. Del ejercicio 10 de la Sec. 4.4 sabemos que H es biunívoca y de ahí que su inversa sea una función. Dicha inversa, que se expresa mediante Arctan, es la **función tangente inversa**

$$\text{Arctan} = \{(x, y) \mid x = \tan y, y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}), x \in Re\}.$$

La gráfica de Arctan aparece en la Fig. 6.6. Escribiremos $\arctan x$ para representar la segunda componente del par ordenado que pertenece a Arctan y cuya primera componente es x . De ahí que según la definición de Arctan

$$y = \arctan x \iff x = \tan y \quad y \in (-\pi/2; \pi/2)$$

y $\arctan a$, donde $a \in Re$, es el número único $b \in (-\pi/2; \pi/2)$ para el cual $\tan b = a$. Por ejemplo

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}; \quad \arctan (-1) = -\frac{\pi}{4};$$

Del ejercicio 10 de la Sec. 4.4 sabemos que Arctan es derivable sobre Re y que

$$D_x \arctan x = \frac{1}{1+x^2}. \quad (19)$$

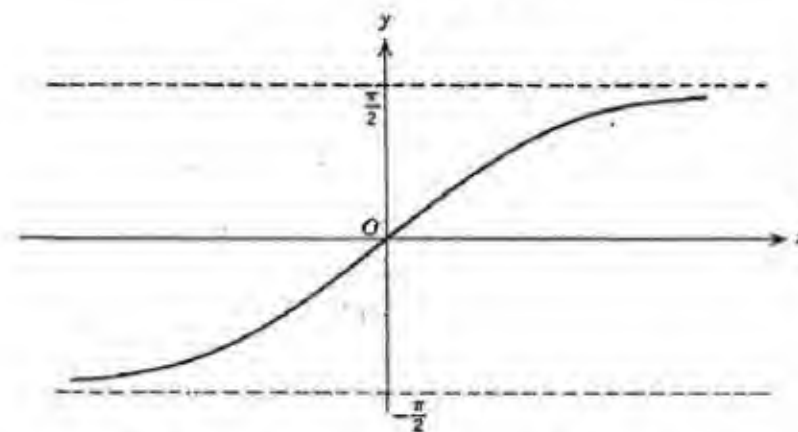


Fig. 6.6 $\text{Arctan} = \{(x, y) \mid x = \tan y, y \in (-\pi/2; \pi/2)\}$

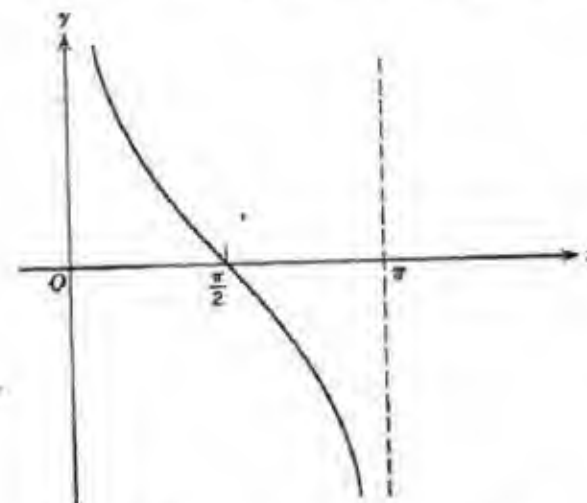


Fig. 6.7 $I = \{(x, y) \mid y = \cot x, x \in (0; \pi)\}$

Consideremos un subconjunto de la función Cot, precisamente la función

$$I = \{(x, y) \mid y = \cot x, x \in (0; \pi), y \in Re\},$$

cuya gráfica está dada en la Fig. 6.7. Del ejercicio 11 de la Sec. 4.4 sabemos que I es biunívoca y de ahí que su inversa sea una función. Esta inversa, que se expresa mediante Arccot, es la **función cotangente inversa**.

$$\text{Arccot} = \{(x, y) \mid x = \cot y, y \in (0; \pi), x \in Re\}.$$

La gráfica de Arccot se muestra en la Fig. 6.8. Escribiremos $\text{arccot } x$ para representar la segunda componente del par ordenado que pertenece a Arctan y cuya primera componente es x . Luego, según la definición de Arccot

$$y = \text{arccot } x \iff x = \cot y \text{ y } y \in (0; \pi)$$

y $\text{arccot } a$, donde $a \in \mathbb{R}$, es el número único $b \in (0; \pi)$ para el cual $\cot b = a$. Por ejemplo

$$\text{arccot } 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \text{arccot } (-1) = \frac{3\pi}{4};$$

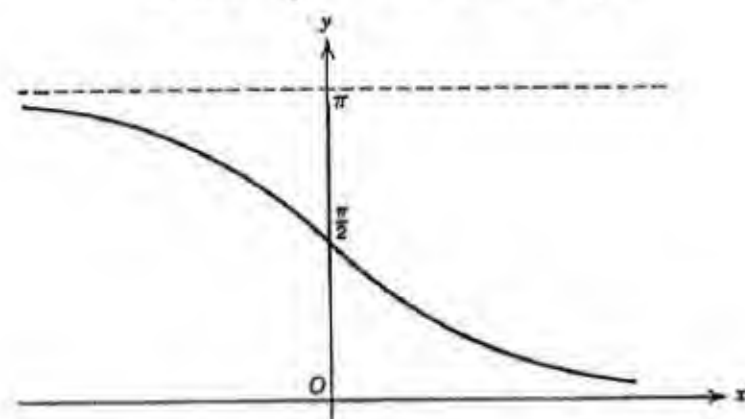


Fig. 6.8 $\text{Arccot} = \{(x, y) \mid x = \cot y, y \in (0; \pi)\}$

Sabemos, del ejercicio 11 de la Sec. 4.4 que Arccot es derivable sobre \mathbb{R} y que

$$D_x \text{arccot } x = -\frac{1}{1+x^2}. \quad (20)$$

Las restricciones que impusimos a los dominios de las funciones Sen , Cos , Tan y Cot para tener funciones biunívocas, no son las únicas restricciones posibles. Por ejemplo, si restringimos el dominio de Sen al intervalo $[\pi/2; 3\pi/2]$, tendremos una función biunívoca; sin embargo para este dominio la derivada de $\text{arcsen } x$ no queda expresada por medio de (17).

Para las funciones Sec y Csc , el dominio seleccionado para una función biunívoca no puede ser un solo intervalo sino la unión de dos intervalos separados. La selección se hace, en última instancia, de modo que se tenga el resultado más sencillo posible para las derivadas de las funciones inversas.

Consideremos la función Sec . La porción de la Sec cuyo dominio es $[0; \pi/2) \cup (\pi/2; \pi]$ es biunívoca como podemos ver en la gráfica de Sec . Además, la porción de la Sec cuyo dominio es $[-\pi; -\pi/2) \cup (-\pi/2; 0]$ es biunívoca como lo es la porción cuyo dominio es $[-\pi; -\pi/2) \cup [0; \pi/2)$. La selección de $[-\pi; -\pi/2) \cup [0; \pi/2)$ nos da una función biunívoca para la que la derivada de la función inversa se puede expresar por medio de una sola fórmula, en tanto que las otras alternativas necesitan de dos fórmulas para expresar la derivada de la inversa.

Si hacemos

$$K = \left\{ (x, y) \mid y = \sec x, x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left[0; \frac{\pi}{2}\right), \right. \\ \left. y \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \right\}$$

(Fig. 6.9), vemos que K es continua y derivable sobre su dominio, y que

$$D_x K(x) = \sec x \tan x > 0 \text{ para } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right),$$

$$D_x K(x) = \sec x \tan x < 0 \text{ para } x \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right).$$

Luego $K(x)$ es creciente sobre $[0; \pi/2)$ y decreciente sobre $[-\pi; -\pi/2)$ y ya que $K(-\pi) < K(0)$, K es biunívoca sobre su dominio; por tanto, la inversa de K es una función. Esta inversa que se expresa por Arcsec es la función secante inversa.

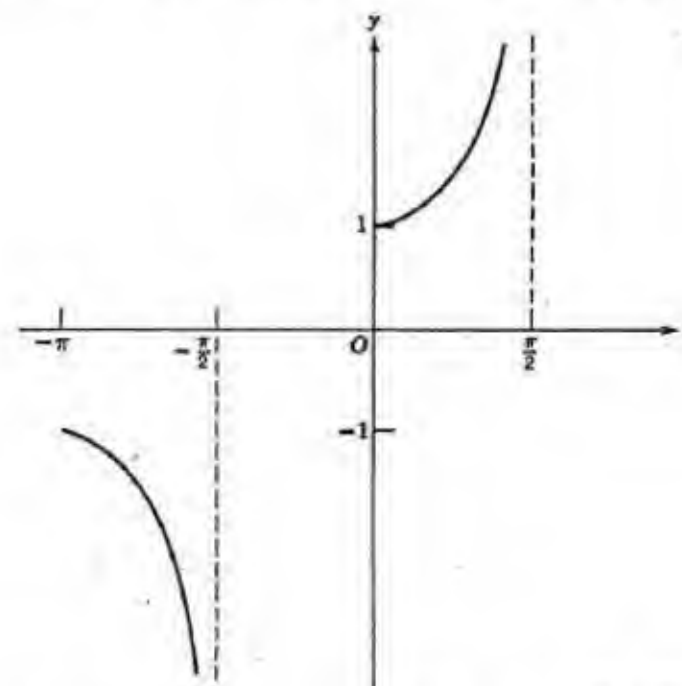


Fig. 6.9 $K = \{(x, y) \mid y = \sec x, x \in [-\pi/2) \cup [0; \pi/2]\}$

$$\text{Arcsec} = \left\{ (x, y) \mid x = \sec y, y \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left[0; \frac{\pi}{2}\right), \right. \\ \left. x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \right\}.$$

La gráfica de Arcsec se muestra en la Fig. 6.10. Escribimos $\text{arcsec } x$ para representar la segunda componente del par ordenado que pertenece a Arcsec y cuya primera componente es x .

De ahí que por definición de Arcsec se tenga

$$y = \text{arcsec } x \iff x = \sec y \text{ y } y \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left[0; \frac{\pi}{2}\right],$$

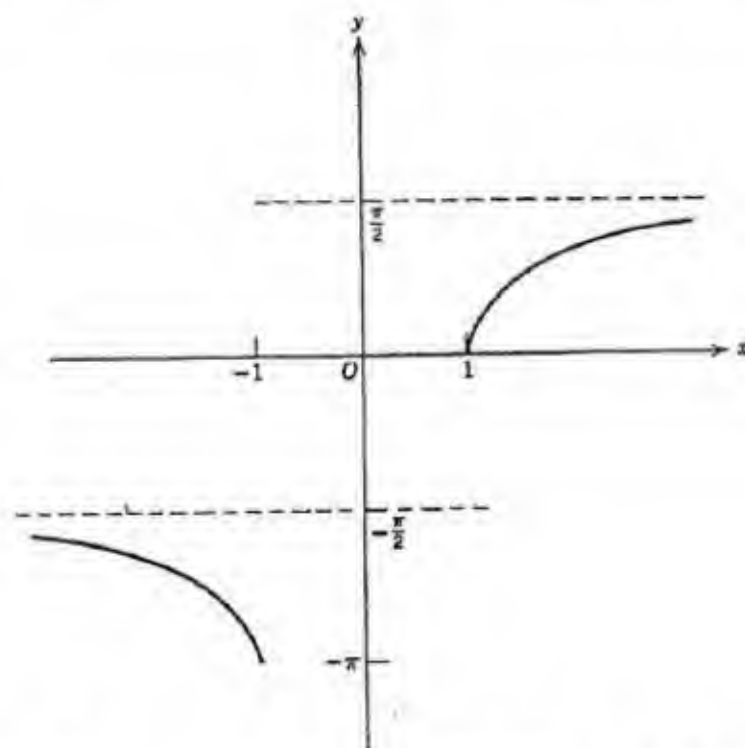


Fig. 6.10 $\text{Arcsec} = \{(x, y) \mid x = \sec y, y \in [-\pi; \pi/2] \cup [0; \pi/2]\}$

y $\text{arcsec } a$, donde $a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ es el número único $b \in [-\pi; -\pi/2) \cup [0; \pi/2)$ para el cual $\sec b = a$. Por ejemplo:

$$\text{arcsec } 2 = \frac{\pi}{3}; \quad \text{arcsec } (-2) = -\frac{2\pi}{3}.$$

Puesto que $D_x \sec x = \sec x \tan x$ existe y es distinta de cero sobre $(-\pi; \pi/2) \cup (0; \pi/2)$ sabemos, según el teorema 15 de la Sec. 4.4 que Arcsec es derivable sobre $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ y si $y = \text{arcsec } x$, entonces $x = \sec y$ y

$$D_x \text{arcsec } x = \frac{1}{D_y \sec y}.$$

Pero $D_y \sec y = \sec y \tan y$ y si $y \in (-\pi; \pi/2) \cup (0; -\pi/2)$, entonces

$$\tan y = \sqrt{\sec^2 y - 1},$$

de modo que

$$D_y \sec y = \sec y \sqrt{\sec^2 y - 1} = x \sqrt{x^2 - 1}.$$

Por tanto,

$$D_x \text{arcsec } x = \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}}; \quad x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty). \quad (21)$$

El estudiante debe poder demostrar que la función

$$\{(x, y) \mid y = \csc x, x \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right], \\ y \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)\}$$

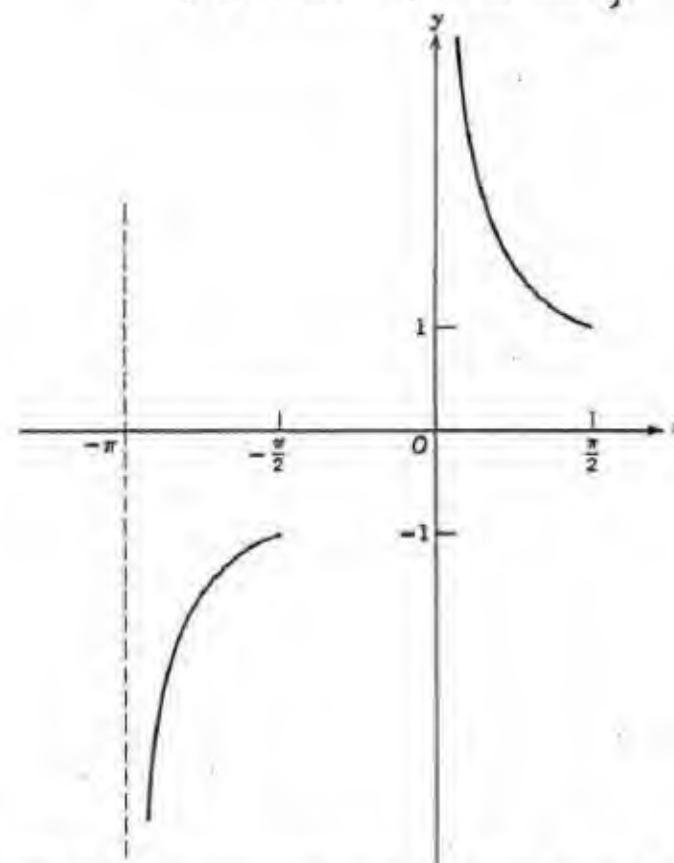


Fig. 6.11 $\{(x, y) \mid y = \csc x, x \in (-\pi; -\pi/2] \cup (0; \pi/2]\}$

(Fig. 6.11) es biunívoca, de donde su inversa es función. Esta inversa que se expresa por Arccsc es la **función cosecante inversa**

$$\text{Arccsc} = \{(x, y) \mid x = \csc y, y \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right] \\ x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)\}.$$

La gráfica de Arccsc se muestra en la Fig. 6.12. Escribiremos $\text{arccsc } x$ para representar la segunda componente de la pareja ordenada que pertenece a Arccsc y cuya primera componente es x . De ahí que según la definición de Arccsc

$$y = \text{arccsc } x \iff x = \csc y \text{ y } y \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right],$$

y $\text{arccsc } a$, donde $a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$, es el número único $b \in -\pi; -\pi/2] \cup (0; \pi/2]$ para el que $\csc b = a$.

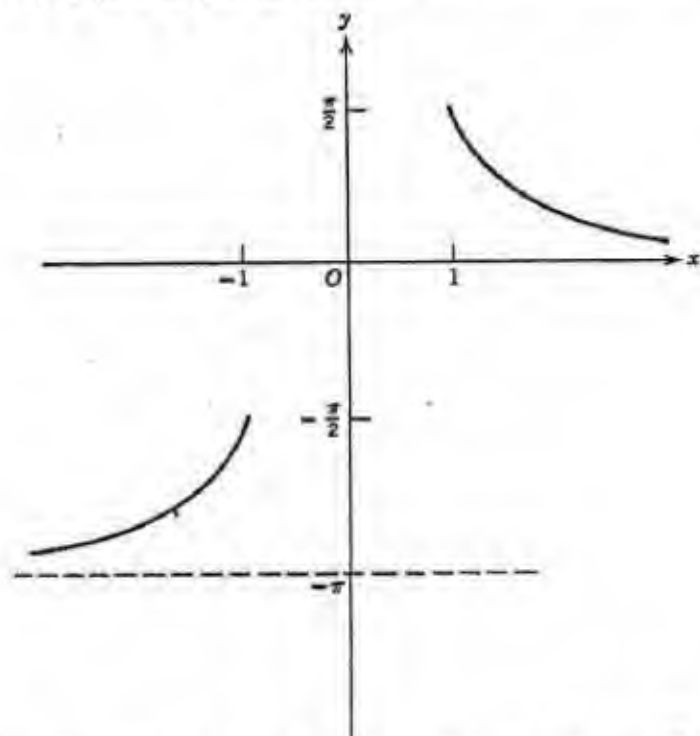


Fig. 6.12 $\text{Arccsc} = \{(x, y) \mid x = \csc y, y \in (-\pi; \pi/2) \cup (0; \pi/2]\}$

El estudiante debe demostrar que Arccsc es derivable sobre $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ y que

$$D_x \text{arccsc } x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}; \quad x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty). \quad (22)$$

Las funciones Arcsen , Arccos , Arctan , Arccot , Arcsec y Arccsc son las llamadas **funciones trigonométricas inversas**.

Si $u = V(x)$, si $|V(x)| < 1$ y si $V'(x)$ existe sobre un conjunto S , entonces usando la regla en cadena y las fórmulas (17) y (18) tenemos que

$$D_x \text{arsen } u = \frac{D_x u}{\sqrt{1-u^2}}, \quad x \in S, \quad (23)$$

$$D_x \text{arccos } u = -\frac{D_x u}{\sqrt{1-u^2}}, \quad x \in S. \quad (24)$$

Si $u = V(x)$ y si $V'(x)$ existe sobre S , entonces según la regla de la cadena y las fórmulas (19) y (20) tenemos que

$$D_x \arctan u = \frac{D_x u}{1+u^2}, \quad x \in S; \quad (25)$$

y

$$D_x \text{arccot } u = -\frac{D_x u}{1+u^2}, \quad x \in S. \quad (26)$$

Si $u = V(x)$, si $|V(x)| > 1$ y si $V'(x)$ existe sobre un conjunto S , entonces usando la regla en cadena y las fórmulas (21) y (22) tenemos que

$$D_x \text{arcsec } u = \frac{D_x u}{u\sqrt{u^2-1}}, \quad x \in S, \quad (27)$$

y

$$D_x \text{arccsc } u = -\frac{D_x u}{u\sqrt{u^2-1}}, \quad x \in S. \quad (28)$$

Ejemplo 1. Halle $D_x \text{arsen } (2x+1)$ y dé el conjunto S sobre el cual es válido el resultado.

Solución. Usando la fórmula (23) con $2x+1$ representando a u , obtenemos

$$D_x \text{arsen } (2x+1) = \frac{D_x(2x+1)}{\sqrt{1-(2x+1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}.$$

Este resultado vale para

$$|2x+1| < 1,$$

esto es, para

$$-1 < 2x+1 < 1 \quad \text{ó} \quad -1 < x < 0.$$

De donde

$$D_x \text{arsen } (2x+1) = \frac{2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}, \quad x \in (-1; 0).$$

Ejemplo 2. Halle $D_x \text{arcsec } (3x+2)$ y dé el conjunto S sobre el cual vale el resultado.

Solución. Usando la fórmula (27) con $3x+2$ representando a u , obtenemos

$$D_x \text{arcsec } (3x+2) = \frac{D_x(3x+2)}{(3x+2)\sqrt{(3x+2)^2-1}} = \frac{3}{(3x+2)\sqrt{(3x+2)^2-1}}$$

Este resultado vale para

$$|3x+2| > 1,$$

esto es, para

$$3x+2 > 1 \quad \text{ó} \quad 3x+2 < -1 \\ x > -\frac{1}{3} \quad \text{ó} \quad x < -1.$$

De donde

$$D_x \text{arcsec } (3x+2) = \frac{3}{(3x+2)\sqrt{(3x+2)^2-1}} \\ x \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right).$$

En la notación de diferenciales, las fórmulas (23) a (28) se pueden escribir como

$$d(\arcsen u) = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}, \quad |u| < 1,$$

$$d(\arccos u) = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}, \quad |u| < 1,$$

$$d(\arctan u) = \frac{du}{1+u^2};$$

$$d(\operatorname{arccot} u) = -\frac{du}{1+u^2};$$

$$d(\operatorname{arcsec} u) = \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}, \quad |u| > 1;$$

$$d(\operatorname{arccsc} u) = -\frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}, \quad |u| > 1.$$

A partir de la primera, tercera y quinta de estas fórmulas para diferenciales el teorema 20 de la Sec. 3.11, tenemos las siguientes proposiciones:

$$\text{Si } dy = \frac{a du}{\sqrt{1-u^2}} \text{ entonces } y = a \arcsen u + k, \quad |u| < 1. \quad (29)$$

$$\text{Si } dy = \frac{a du}{1+u^2}, \text{ entonces } y = a \arctan u + k. \quad (30)$$

$$\text{Si } dy = \frac{a du}{u\sqrt{u^2-1}}, \text{ entonces } y = a \operatorname{arcsec} u + k, \quad |u| > 1. \quad (31)$$

Las proposiciones (29), (30) y (31) son de uso frecuente para calcular antiderivadas y haremos referencia a ellas en el capítulo 7.

Ejemplo 3. Halle una solución general de la ecuación diferencial

$$dy = \frac{dx}{1+4x^2}.$$

Solución. Podemos escribir

$$dy = \frac{dx}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 dx}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d(2x)}{1+(2x)^2}.$$

De modo que según (30),

$$y = \frac{1}{2} \arctan(2x) + k$$

es una solución general de la ecuación.

Ejemplo 4. Resuelva el sistema diferencial

$$dy = \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}, \quad y = \frac{4\pi}{3} \text{ cuando } x = -\frac{2}{3}.$$

Solución. Observe que

$$dy = \frac{dx}{x\sqrt{(3x)^2-1}} = \frac{d(3x)}{3x\sqrt{(3x)^2-1}};$$

de modo que según (31),

$$y = \operatorname{arcsec}(3x) + k \text{ para } |3x| > 1.$$

Usamos las condiciones a la frontera y tenemos que

$$\frac{4\pi}{3} = \operatorname{arcsec} 3 \left(-\frac{2}{3} \right) + k,$$

de donde $k = 2\pi$ y la solución es

$$y = \operatorname{arcsec}(3x) + 2\pi.$$

Ejemplo 5. Evalúe la integral

$$\int_{-2}^2 \frac{dx}{4+x^2};$$

Solución. Para poder usar el Teorema Fundamental buscamos una $y = G(x)$

tal que $dy = \frac{dx}{4+x^2}$: Podemos escribir

$$dy = \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{dx}{1+(x^2/4)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2} dx}{1+(x/2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d(x/2)}{1+(x/2)^2}$$

Así que según (30),

$$y = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + k,$$

y

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \frac{dx}{4+x^2} &= \left[\frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} \right]_{-2}^2 = \frac{1}{2} [\arctan 1 - \arctan(-1)] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

EJERCICIOS

Halle la derivada indicada en cada uno de los ejercicios del 1 al 12.

1. $D_x \arcsen(x^2 - \frac{1}{4})$.

2. $D_t \arcsen(3t - 1)$.

3. $D_s \arccos \frac{x}{3}$.

4. $D_s \arccos(1 - s^2)$.

5. $D_x \arctan x^2$.

6. $D_x \arctan(1 - 2x)$.

7. $D_x \operatorname{arccot} \left(1 - \frac{x}{3} \right)$.

8. $D_t \operatorname{arccot}(1 - t^2)$.

9. $D_x \operatorname{arcsec}(x^2 - 4)$.

10. $D_x \operatorname{arccsc} x^2$.

11. $D_x(x \arctan x)$.

12. $D_x[x(\arcsen x) + \sqrt{1-x^2}]$.

Halle $D_x y$ en cada uno de los ejercicios del 13 al 24.

13. $y = \arcsen \sqrt{x}$.

15. $y = (\arcsen x)^2$.

17. $y = \arccos (2x - 3)$.

19. $y = \arctan \frac{2x}{1-x^2}$.

21. $y = \operatorname{arcsec} \frac{x}{a}$.

23. $y = \operatorname{arccsc} (2-x)$.

25. Si $F(x) = \sqrt{a^2 - x^2} + a \arcsen (x/a)$ y $a > 0$, demuestre que

$$D_x F(x) = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

26. Si $F(x) = \arctan \frac{a+x}{1-ax}$; demuestre que $D_x F(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Halle una solución general de la ecuación diferencial dada en cada uno de los ejercicios del 27 al 34.

27. $dy = \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$.

29. $dy = \frac{dx}{1+4x^2}$.

31. $dy = \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

33. $dy = \frac{dx}{x^3 + 4x + 5}$.

14. $y = x \arcsen 2x$.

16. $y = \arccos \frac{1}{x}$.

18. $y = \arctan \frac{x}{a}$.

20. $y = \operatorname{arccot} \frac{x}{a}$.

22. $y = \operatorname{arcsec} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

24. $y = \arcsen \frac{x^2}{12}$.

28. $dy = \frac{7x dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

30. $dy = \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}}$.

32. $dy = \frac{dx}{4+x^2}$.

34. $dy = \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Resuelva el sistema diferencial dado en cada uno de los ejercicios del 35 al 38.

35. $dy = \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$; $y = \pi$ cuando $x = \frac{1}{6}$;

36. $du = \frac{dt}{3+5t^2}$; $u = 0$ cuando $t = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

37. $dy = \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$; $y = \frac{5\pi}{4}$ cuando $x = -\frac{\sqrt{3}}{4}$.

38. $dy = \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$; $y = \pi$ cuando $x = \frac{2}{3}$.

En cada uno de los ejercicios del 39 al 42 calcule la integral definida.

39. $\int_0^{\sqrt{1}} \frac{dx}{1+x^2}$

41. $\int_0^{-1/2} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$

40. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

42. $\int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}}$

En los ejercicios del 43 al 46 halle una solución general de la ecuación diferencial dada.

43. $dy = \frac{\arcsen x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

44. $dy = \frac{\arcsen 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$.

Sugerión: Ponga: $dy = (\arcsen x) d(\arcsen x)$.

45. $du = \frac{(\arctan v)^2}{1+v^2} dv$.

46. $dr = \frac{\operatorname{arcsec} s ds}{s\sqrt{s^2-1}}$.

47. Construya la gráfica de la ecuación $y = \frac{2}{x^2+1}$. Halle el área de la

región limitada por esta gráfica, el eje X y las gráficas de $x = -1$ y $x = 1$.

48. Halle el área de la región limitada por la gráfica de $y = \frac{1}{a^2+x^2}$; el eje X y las gráficas de $x = -\frac{a}{\sqrt{3}}$ y $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

49. Construya la gráfica de la ecuación $y = \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$. Halle el área de la región limitada por esta gráfica, el eje X y las gráficas de $x = -2$ y $x = 2$.

50. Halle el área de la región limitada por las gráficas de $y(x^2+4a^2) = 8a^2$ y $4ay = x^2$.

51. La pendiente de una curva en el punto $P(x, y)$ es igual a $\frac{1}{1+x^2}$. Calcule la ecuación de la curva si ha de pasar por el punto $(1, 0)$.

52. Si $F(x) = \arcsen \frac{x}{a}$; demuestre que $D_x F(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ si $a > 0$ y que $D_x F(x) = \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ si $a < 0$.

6.3 Funciones exponenciales y logarítmicas. Recuerdese, del álgebra elemental, que si a y b son números reales positivos y que si p y q son números racionales, las leyes básicas de los exponentes son:

$$a^p a^q = a^{p+q}, \quad (a^p)^q = a^{pq},$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, \quad (a \cdot b)^p = a^p b^p, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} \quad b \neq 0.$$

Es costumbre desarrollar estas leyes primero para exponentes enteros positivos m y n , siendo por definición $a^n = a \cdot a \cdots a$, con a como factor n veces. Estas leyes de los exponentes se extienden después a exponentes racionales de la forma $p = m/n$, donde m es cualquier entero y n es un entero distinto de 0. En conexión con esto se usan las definiciones siguientes:

para un exponente cero: $a^0 = 1$;

para un exponente negativo: $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$;

para un exponente fraccionario: $(a^{1/n})^m = a$; $(a^{1/n})^m = a^{m/n}$.

Corrientemente, en álgebra elemental, a^x ($a > 0$) tiene significado sólo cuando x es un número racional. En cálculo es importante definir a^x para valores irracionales de x .

Sea F una sucesión cuyo rango es un subconjunto de los números racionales; esto es: F es una sucesión para la cual $F(n)$ es racional. Entonces $a^{F(n)}$ está definida para cada entero positivo n y $a^{F(n)}$ es el término general del rango de la sucesión.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = k$,

cuando k es un número real, se puede demostrar que *

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{F(n)}$$

existe. Se puede demostrar también que si G es otra sucesión tal que $G(n)$ sea racional y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G(n) = k,$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{G(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{F(n)};$$

y definimos

$$a^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{F(n)}. \quad (32)$$

Por ejemplo, $2^{\sqrt{3}}$ se puede definir como sigue: Sea F una sucesión tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = \sqrt{3}. \text{ Entonces}$$

$$2^{\sqrt{3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{F(n)}.$$

Usando la definición (32) podemos demostrar que las cinco leyes básicas de los exponentes, enumeradas al principio de esta sección, son válidas para exponentes que sean números reales.

Para cualquier número real positivo $a \neq 1$, la función

$$\text{Exp}_a = \{(x, y) \mid y = a^x, x \in \mathbb{R}\}$$

se llama **función exponencial de base a** . El rango de esta función es $(0; +\infty)$. Se puede demostrar * que Exp_a es continua sobre \mathbb{R} , que a^x es creciente sobre \mathbb{R} si $a > 1$ y que a^x es decreciente sobre \mathbb{R} si $a < 1$.

Las gráficas de las funciones

$$\text{Exp}_2 = \{(x, y) \mid y = 2^x, x \in \mathbb{R}\}$$

y

$$\text{Exp}_{1/2} = \{(x, y) \mid y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, x \in \mathbb{R}\}$$

se dan en las Figs. 6.13 y 6.14 respectivamente. Para $a > 1$ la gráfica de la

función Exp_a es una curva del tipo mostrado en la Fig. 6.13 y para $a < 1$ la gráfica de Exp_a es una curva del tipo mostrado en la Fig. 6.14.

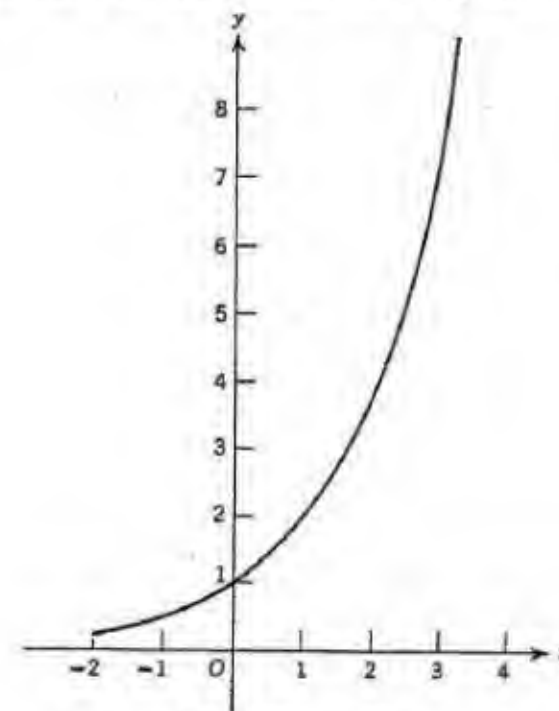


Fig. 6.13 $y = 2^x$

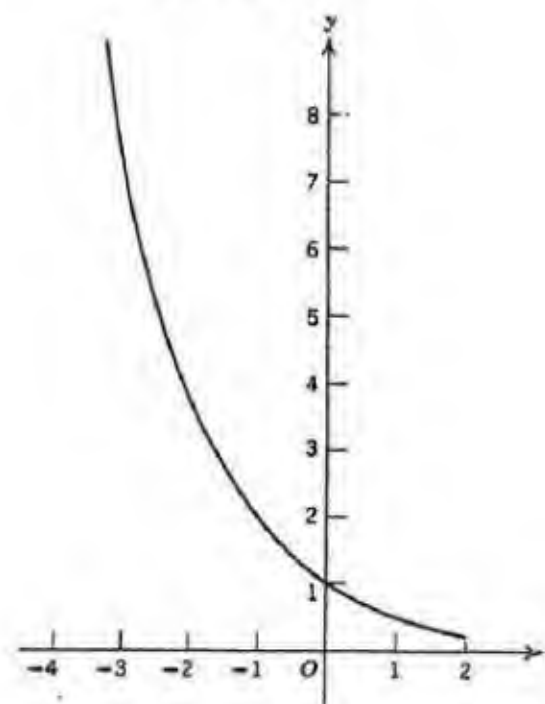


Fig. 6.14 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

* Véase: James Pierpont, *The Theory of Functions of Real Variables*, Ginn and Company, Boston, 1905, Vol. 1, pp. 101-108.

* Véase: H. B. Fine, *Calculus*, The Macmillan Co. Nueva York, 1927, pp. 68-69.

Ya que la función exponencial de base a ,

$$\text{Exp}_a = \{(x, y) \mid y = a^x, x \in \mathbb{R}, y \in (0; +\infty)\}, \quad a > 0 \quad a \neq 1,$$

es biunívoca sobre \mathbb{R} , la inversa de Exp_a es una función. Expresamos esta inversa mediante Log_a y la llamamos función logarítmica de base a ; es decir que la función logarítmica de base a es la función

$$\text{Log}_a = \{(x, y) \mid x = a^y, y \in \mathbb{R}, x \in (0; +\infty)\}. \quad (33)$$

Escribiremos $\log_a x$ para representar la segunda componente de la pareja ordenada

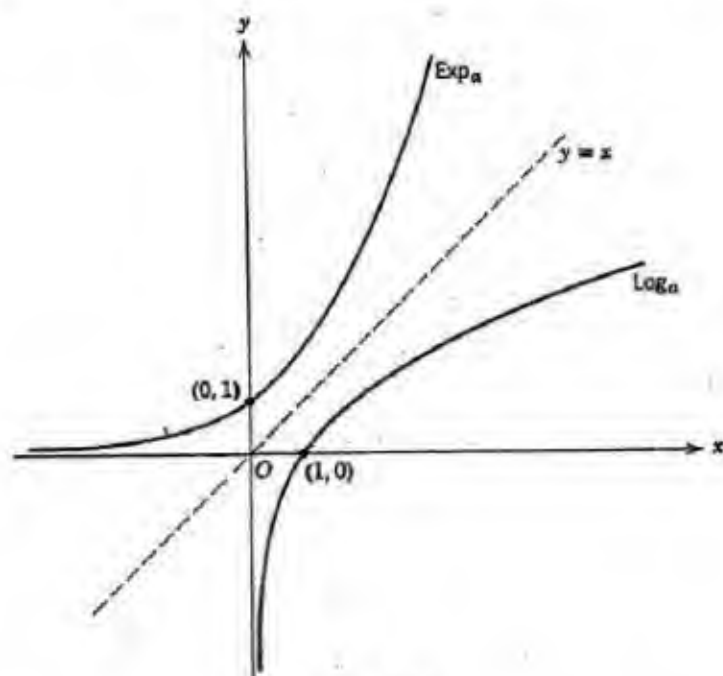


Fig. 6.15

que pertenece a Log_a y cuya primera componente es x ($\log_a x$ se lee "logaritmo de x de base a "). De donde según la definición de Log_a

$$y = \log_a x \iff x = a^y, \quad (34)$$

y $\log_a c$ es el número único b tal que $a^b = c$.

La gráfica de Log_a se obtiene de la gráfica de su inversa Exp_a en la forma usual (véase la Fig. 6.15).

De nuestra experiencia con funciones inversas es intuitivamente posible que si la función F es biunívoca y continua sobre su dominio, entonces su inversa F^{-1} es continua sobre su dominio. Esto es realmente cierto y se demuestra en cálculo avanzado. Como se dijo anteriormente, la función Exp_a es continua sobre su dominio \mathbb{R} . Consecuentemente su inversa Log_a es continua sobre su dominio $(0; +\infty)$.

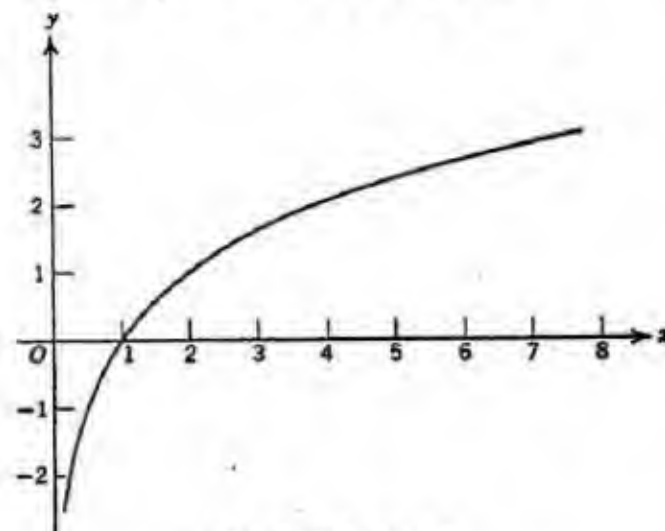
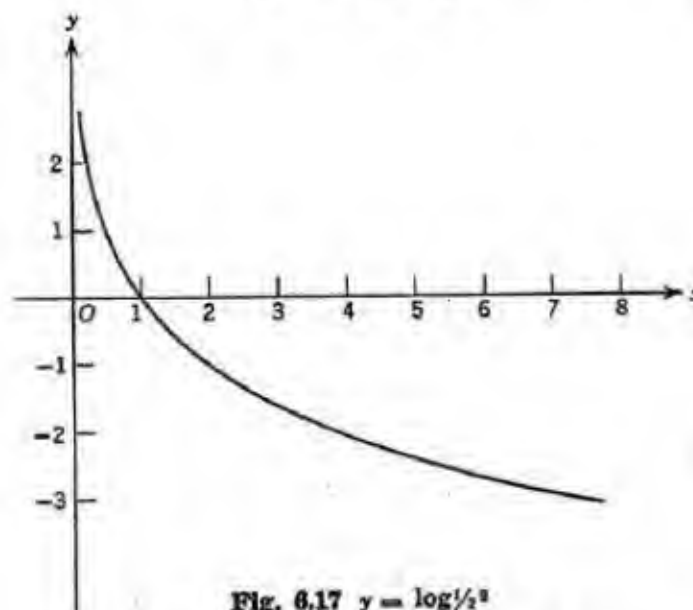
Las gráficas de las funciones

$$\text{Log}_2 = \{(x, y) \mid y = \log_2 x, x \in (0; +\infty)\}$$

y

$$\text{Log}_{1/2} = \{(x, y) \mid y = \log_{1/2} x, x \in (0; +\infty)\}$$

están dadas en las Figs. 6.16 y 6.17 respectivamente. Para $a > 1$, la gráfica de Log_a es una curva del tipo mostrado en la Fig. 6.16 y para $a < 1$ la gráfica de Log_a es una curva del tipo mostrado en la Fig. 6.17.

Fig. 6.16 $y = \log_2 x$ Fig. 6.17 $y = \log_{1/2} x$

De (34) se sigue que si $a > 0$, $a \neq 1$ y $x > 0$, entonces

$$x = a^{\log_a x}. \quad (35)$$

FUNCIONES TRASCENDENTES

También, ya que $a^0 = 1$ y $a^1 = a$, tendremos que según (34)

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{y} \quad \log_a a = 1.$$

Los siguientes son ejemplos de logaritmos:

$$\text{puesto que } 10^2 = 100, \quad \log_{10} 100 = 2;$$

$$\text{puesto que } 5^3 = 125, \quad \log_5 125 = 3.$$

Las propiedades básicas de los logaritmos son simplemente repeticiones de las básicas de los exponentes (dadas al principio de esta sección), basándonos (34). Por ejemplo, supóngase que

$$x_1 = a^{y_1} \quad \text{y} \quad x_2 = a^{y_2},$$

$$\text{que} \quad y_1 = \log_a x_1 \quad \text{y} \quad y_2 = \log_a x_2.$$

$$\text{onces} \quad x_1 \cdot x_2 = a^{y_1} \cdot a^{y_2} = a^{y_1 + y_2}$$

según (34),

$$\log_a x_1 \cdot x_2 = y_1 + y_2$$

$$\text{ea que} \quad \log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2. \quad (36)$$

De modo semejante se puede demostrar que

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2, \quad (37)$$

$$\log_a x_1^p = p \log_a x_1. \quad (38)$$

estudiante se le pide que demuestre (37) y (38) en los ejercicios 3 y 4 al final esta sección. Las ecuaciones (36), (37) y (38) son comúnmente conocidas como las *leyes de los logaritmos*.

Para obtener una fórmula que relacione logaritmos de bases diferentes, llamemos b a un número positivo diferente de 1 y tomemos logaritmos de base b los dos miembros de (35). Hallamos que

$$\log_b x = \log_b (a^{\log_a x}),$$

según (38), que

$$\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a. \quad (39)$$

Cualquier número positivo, excepto 1, se puede usar como base de un sistema de logaritmos. Hay dos sistemas de uso común: Para cálculos ordinarios se usan los **logaritmos comunes**, de la forma $\log_{10} N$, cuya base es 10. Una característica distintiva de estos logaritmos es que la parte fraccionaria de ellos (llamada *manera*) depende sólo de la secuencia de los dígitos en el número dado N y no de la posición del punto decimal del número.

El otro sistema de logaritmos que se usa considerablemente tiene como base cierto número irracional, expresado por e (que se definirá en la siguiente sección). Los logaritmos de base e se llaman **logaritmos naturales** y se expresan como $\log_e N$ o por $\ln N$. Veremos que los logaritmos naturales son mucho más con-

venientes en cálculo que los logaritmos comunes o los de cualquier otra base. La fórmula (39) nos dice que

$$\log_e x = \log_a x \log_a e, \quad (40)$$

$$\text{y} \quad \log_a x = \log_e x \log_a e.$$

En particular, para $a = 10$,

$$\log_e x = \log_{10} x \log_e 10,$$

$$\text{y} \quad \log_{10} x = \log_e x \log_{10} e.$$

Aproximando a cinco cifras decimales

$$\log_e 10 = 2.30259 \quad \text{y} \quad \log_{10} e = 0.43429.$$

En consecuencia, tenemos que

$$\log_e x = (2.30259) \log_{10} x,$$

$$\text{y} \quad \log_{10} x = (0.43429) \log_e x.$$

Según (40) tenemos que para $x = e$

$$\log_e e = \log_a e \log_a a$$

$$\text{o} \quad \log_a e \log_a a = 1. \quad (41)$$

EJERCICIOS

1. Grafique la función $\text{Exp}_3 = \{(x, y) \mid y = 3^x, x \in \mathbb{R}\}$.
2. Grafique la función $\text{Log}_3 = \{(x, y) \mid y = \log_3 x, x \in (0; +\infty)\}$.
3. Demuestre que $\log_a (x_1/x_2) = \log_a x_1 - \log_a x_2$.
4. Demuestre que $\log_a x^p = p \log_a x$.
5. Calcule los siguientes logaritmos: $\log_2 8$, $\log_{10} 100$, $\log_{10} 1000$, $\log_2 32$, $\log_4 64$, $\log_{10} 0.0001$.
6. Use una tabla de logaritmos comunes para calcular $\log_2 21$, $\log_2 7$, $\log_3 10$.
7. Halle el valor de x sin usar tablas de logaritmos:

$$(a) \log_{10} x = \log_{10} 5 + \log_{10} 3 - \log_{10} 7;$$

$$(b) \log_{10} x = \frac{1}{2} \log_{10} 64 + \frac{3}{2} \log_{10} 2.$$

8. Use una tabla de logaritmos comunes y la igualdad $\log_e x = (2.30259) \log_{10} x$ para calcular: $\log_e 2$, $\log_e 3$ y $\log_e 5$.

6.4 El número e . Como la derivación de correspondientes ante las funciones trigonométricas se basaba en el límite especial $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$, veremos que la derivación de correspondientes ante las funciones logarítmicas se basa en el límite especial

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{1/h}. \quad (42)$$

Indicaremos la posibilidad de la existencia del límite (42) y un procedimiento para obtener un valor aproximado de él.

Consideremos el límite del término general $F(n)$ del rango de la sucesión F tal que

$$F(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n;$$

es decir que investiguemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (43)$$

Si el límite (43) existe, es seguramente posible que exista el límite (42). Usando el teorema del binomio podemos escribir

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \\ &\cdots + \frac{1}{n!} \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\right]. \end{aligned} \quad (44)$$

Cada término de la suma (44) es positivo y al crecer n , cada término, a partir del segundo, también crecerá. Vemos que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ crece al crecer n . Sin embargo, vemos también que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

y puesto que $n! \geq 2^{n-1}$ para $n = 2, 3, 4, \dots$, tendremos que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Mediante la fórmula para la suma de términos de una progresión geométrica hallamos que

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &< 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &< 3 - \frac{1}{2^{n-1}} \\ &< 3. \end{aligned}$$

Haremos uso del siguiente teorema, que está enunciado aquí sin demostración ya que ésta queda fuera del nivel de este libro.

Teorema 1. Si k es un número y F es una sucesión (es decir que si F es una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos) tal que

$$F(1) < F(2) < F(3) < \cdots < F(n) < F(n+1) < \cdots < k,$$

entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n)$ existe y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) \leq k.$$

Sea $F(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, y sea $k = 3$. Sabemos que

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 < \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 < \cdots < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \cdots < 3,$$

y así según el teorema 1, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ existe y $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3$.

De este análisis resulta posible que $\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h}$ existe. Este límite se representa con la letra e y escribimos

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h} = e. \quad (45)$$

Al examinar la suma (44) vemos que posiblemente para valores grandes de n , la suma

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad (46)$$

sea una aproximación razonable al valor de e . Del ejemplo 1 de la Sec. 14.6 se puede ver que la diferencia entre la suma (46) y e se puede reducir cuanto se desee con sólo tomar n suficientemente grande.

Un valor de e correcto hasta siete decimales se puede obtener tomando $n = 12$ en la suma (46) y calculando cada término de la suma hasta nueve decimales. Esto es

$$\frac{1}{2!} = 0.5$$

$$\frac{1}{4!} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3!}\right) = 0.041666667$$

$$\frac{1}{6!} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{5!}\right) = 0.001388889$$

$$\frac{1}{8!} = 0.000024802$$

$$\frac{1}{10!} = 0.000000276$$

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2!}\right) = 0.166666667$$

$$\frac{1}{5!} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{4!}\right) = 0.008333333$$

$$\frac{1}{7!} = 0.000198413$$

$$\frac{1}{9!} = 0.000002756$$

$$\frac{1}{11!} = 0.000000025$$

$$\frac{1}{12!} = 0.000000002.$$

La suma de estos once términos, junto con los primeros dos, $1 + 1$, es 2.718281830, o sea que $e = 2.7182818$, con siete decimales.

6.5 La derivada de Log. Demostraremos ahora el siguiente teorema.

Teorema 2. Si $a > 0$ pero $a \neq 1$ y si $x > 0$, entonces la función

$$\text{Log}_a = \{(x, y) \mid y = \log_a x, x \in (0, +\infty)\}$$

es derivable sobre su dominio $(0; +\infty)$ y

$$\mathbf{D}_x \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e, \quad x > 0. \quad (47)$$

Demostración. Sea $F(x) = \log_a x$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} [\log_a(x+h) - \log_a x] \\ &= \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) \quad [\text{según (37)}] \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right), \quad x > 0 \text{ y } \frac{x}{h} = 1 \\ &= \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h} \quad [\text{según (38)}]. \end{aligned}$$

la consecuencia

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_x \log_a x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h} \\ &= \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h} \right] \\ &= \frac{1}{x} \log_a \left[\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h} \right] \quad (\text{ya que } \text{Log}_a \text{ es continua}) \\ &= \frac{1}{x} \log_a \left[\lim_{h/x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h} \right] \quad (\text{según el teorema 9 de la Sec. 2.2}), \\ &\quad \text{o sea que} \\ \mathbf{D}_x \log_a x &= \frac{1}{x} \log_a e \quad [\text{según (45)}]. \end{aligned}$$

De (47) tenemos que

$$\mathbf{D} \text{Log}_a = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{1}{x} \log_a e, x > 0 \right\},$$

o bien

$$\mathbf{D} \text{Log}_a = \frac{\log_a e}{x}.$$

Teorema 3. Si $a > 0$ y $a \neq 1$, si la función $V = \{(x, u) \mid u = V(x)\}$ es derivable y $V(x) \neq 0$ sobre un conjunto S , entonces la función F definida mediante

$$F(x) = \log_a |V(x)|, \quad x \in S$$

es derivable sobre S y

$$\mathbf{D}_x \log_a |u| = \frac{1}{u} \log_a e \mathbf{D}_x u, \quad x \in S. \quad (48)$$

Demostración. Sea S_1 el subconjunto de S para el que $V(x) > 0$ si $x \in S_1$ y sea S_2 el subconjunto de S para el que $V(x) < 0$ si $x \in S_2$. Nótese que $S_1 \cup S_2 = S$.

Ahora bien, si $x \in S_1$, $|u| = |V(x)| = V(x) = u > 0$, y según la regla de la cadena, tenemos que

$$\mathbf{D}_x \log_a |u| = \mathbf{D}_x \log_a u = \mathbf{D}_u \log_a u \mathbf{D}_x u.$$

Según (47)

$$\mathbf{D}_u \log_a u = \frac{1}{u} \log_a e, \quad u > 0,$$

y por tanto,

$$\mathbf{D}_x \log_a u = \frac{1}{u} \log_a e \mathbf{D}_x u, \quad x \in S_1, \quad (49)$$

Para $x \in S_2$,

$$|u| = |V(x)| = -V(x) = -u > 0,$$

y de acuerdo con (49) podemos escribir

$$\mathbf{D}_x \log_a |u| = \mathbf{D}_x \log_a (-u) = \frac{1}{-u} \log_a e \mathbf{D}_x (-u).$$

Pero ya que

$$\mathbf{D}_x (-u) = -\mathbf{D}_x u, \text{ tenemos que}$$

$$\mathbf{D}_x \log_a |u| = \frac{1}{u} \log_a e \mathbf{D}_x u, \quad x \in S_2. \quad (50)$$

De (49) y (50) se sigue que

$$\mathbf{D}_x \log_a |u| = \frac{1}{u} \log_a e \mathbf{D}_x u, \quad x \in S_1 \cup S_2 = S. \quad \blacksquare$$

Si escogemos a e como la base de los logaritmos, el factor $\log_a e$ en (48) se convierte en

$$\log_e e = 1,$$

y tendremos como caso especial de (48) que

$$\mathbf{D}_x \log_e |u| = \frac{1}{u} \mathbf{D}_x u. \quad (51)$$

La simplicidad de la fórmula (51) comparada con la (48) indica la conveniencia de usar e como base de los logaritmos, por esta razón en cálculo la mayor parte de los logaritmos que se usan son de base e . Es también conveniente desprenderse del subíndice e del $\log_e x$ y para evitar confusiones con la notación acostumbrada para los logaritmos comunes, escribiremos.

$\ln u$ en vez de $\log_e u$.

Con esta notación, (51) se transforma en

$$\mathbf{D}_x \ln |u| = \frac{1}{u} \mathbf{D}_x u \quad (52)$$

y en particular ya que $D_x x = 1$

$$D_x \ln |x| = \frac{1}{x}.$$

Los siguientes son ejemplos del uso de (52):

$$D_x \ln (3x^2 + 5) = \frac{1}{3x^2 + 5} D_x (3x^2 + 5) = \frac{6x}{3x^2 + 5};$$

$$D_x \ln |x^3| = \frac{1}{x^3} D_x (x^3) = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x};$$

$$D_x (x \ln |2x|) = x D_x \ln |2x| + \ln |2x| D_x x = \frac{x}{x} + \ln |2x| = 1 + \ln |2x|;$$

$$D_x (\ln x^2)^2 = 3(\ln x^2)^2 D_x \ln x^2 = 3(\ln x^2)^2 \frac{2x}{x^2} = \frac{6}{x} (\ln x^2)^2.$$

El primero de estos resultados vale para $x \in \mathbb{R}^+$; los últimos tres valen para $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$.

A veces es deseable aplicar una o más de las tres leyes básicas de los logaritmos antes de aplicar la fórmula (52).

Ejemplo 1. Si $y = \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{1/2}$, calcule $D_x y$.

Solución. Mediante el uso de las leyes (38) y (37) de los logaritmos podemos escribir

$$y = \frac{1}{2} [\ln (x-1) - \ln (x+1)].$$

Si usamos entonces (52) podemos obtener

$$D_x y = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x+1-x-1}{x^2-1} \right) = \frac{1}{x^2-1}.$$

Nótese que y está definida sobre $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ y } |x| > 1\}$ y que la fórmula para $D_x y$ es válida sobre el mismo conjunto.

Basta la fórmula (52) para calcular $D_x \log_a |u|$ para cualquier base a si recordamos la igualdad

$$\log_a |u| = \log_e |u| \log_a e. \quad (53)$$

Ejemplo 2. Calcule $D_x \log_{10} (3x^2 + 7)$.

Solución. Usamos (53) para tener

$$\log_{10} (3x^2 + 7) = \log_e (3x^2 + 7) \log_{10} e,$$

o bien

$$\log_{10} (3x^2 + 7) = \ln (3x^2 + 7) \log_{10} e.$$

Notemos que $\log_{10} e$ es una constante y si utilizamos (52) obtenemos

$$D_x \log_{10} (3x^2 + 7) = \frac{D_x (3x^2 + 7)}{3x^2 + 7} \log_{10} e = \frac{6x}{3x^2 + 7} \log_{10} e.$$

De (52) y de la definición de una diferencial se sigue que

$$d(\ln |u|) = \frac{1}{u} du. \quad (54)$$

Podemos además agregar la proposición de que

$$\text{si } dy = a \frac{du}{u}, \text{ entonces } y = a \ln |u| + k, \quad (55)$$

a nuestra lista de fórmulas, para resolver ecuaciones diferenciales.

Para demostrar (55) usaremos primero (52) y (15) para hacer ver que

$$\text{si } F'(x) = a \frac{D_x u}{u}, \text{ entonces } F(x) = a \ln |u| + k. \quad (56)$$

Si hacemos $y = F(x)$ de modo que $dy = F'(x) dx$, la proposición (55) se sigue de la (56) y de la definición de diferencial.

Ejemplo 3. Halle una solución general para cada una de las ecuaciones diferenciales:

$$(a) dy = \frac{x dx}{x^2 + 4}, \quad (b) dy = \frac{\ln |x|}{x} dx.$$

Solución. (a) Observe que $dy = \frac{1}{2} \frac{d(x^2 + 4)}{x^2 + 4}$, así que según (55)

$$y = \frac{1}{2} \ln (x^2 + 4) + k.$$

(b) Puesto que $d \ln |x| = dx/x$, podemos escribir $dy = \ln |x| \cdot d(\ln |x|)$ que es de la forma $dy = w dw$ con $\ln x$ en el lugar de w . Por tanto,

$$y = \frac{1}{2} (\ln |x|)^2 + k.$$

Una pequeña tabla de logaritmos naturales aparece en la tabla I al final de este libro. Además se da una pequeña tabla de valores de e^x y de e^{-x} en la tabla II. Estas tablas bastan para los problemas que comprenden cálculos numéricos de e^x , e^{-x} y $\ln x$ que aparecen en este libro. Para otros casos se necesitarán tablas más completas.*

EJERCICIOS

Calcule $D_x F(x)$ en cada uno de los ejercicios del 1 al 16 e indique el conjunto sobre el que es válido el resultado.

$$1. F(x) = 4 + \ln |x^3|.$$

$$2. F(x) = \ln |2x - 3|.$$

$$3. F(x) = \ln (\ln |x|).$$

$$4. F(x) = \log_{10} x^2.$$

$$5. F(x) = \ln \frac{1}{|x|}.$$

$$6. F(x) = \ln \sqrt{x}.$$

$$7. F(x) = \ln |\sin x|.$$

$$8. F(x) = \ln \cos^2 x.$$

* Por ejemplo véase J. B. Rosenbach, E. A. Whitman y D. Moskovitz, *Mathematical Tables*, Ginn and Company, Boston, 1943.

9. $F(x) = \frac{\ln |x|}{x}$.

11. $F(x) = x^2 \ln |x|$.

13. $F(x) = \ln |\sec x|$.

15. $F(x) = \frac{\ln |x|}{\sqrt{x}}$.

Halle $D_x y$ en los ejercicios del 17 al 28.

17. $y = \ln |x^2 + 3x|$.

19. $y = \ln \left(\frac{x}{1-x} \right)^{1/2}$.

21. $y = \log |\tan x|$.

23. $y = \ln \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$.

25. $y = \ln |x + \sqrt{a^2 + x^2}|$.

27. $y = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}|$.

Halle una solución general de la ecuación diferencial dada en cada uno de los ejercicios del 29 al 36.

29. $dy = \frac{x dx}{3x^2 + 5}$.

31. $dw = \frac{dx}{5x-9}$.

33. $dy = \frac{(x+6) dx}{x^2 + 12x + 3}$.

35. $dy = \tan x dx$.

Sugestión: Ponga $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Resuelva los sistemas diferenciales dados en los ejercicios 37 y 38.

37. $dy = \frac{dx}{2x+3}$; $y = 0$ cuando $x = 0$.

38. $dy = \frac{3x dx}{x^2}$; $y = 5$ cuando $x = e$.

39. Si $\ln 50 = 3.912$ calcule un valor aproximado a tres decimales, de $\ln 50.4$ mediante diferenciales.40. Si $F(x) = \ln(1+x^2)$, calcule los valores máximos relativos y mínimos relativos de $F(x)$ y halle los puntos de inflexión de la gráfica de F .

Calcule la integral definida propuesta en cada uno de los ejercicios del 41 al 44.

41. $\int_1^2 \frac{dx}{5x+3}$.

43. $\int_{-e}^{-1} \frac{dx}{x}$.

10. $F(x) = \ln \sqrt{4x-5}$.

12. $F(x) = [\ln(\ln |x|)]^2$.

14. $F(x) = \sin(\ln |x|)$.

16. $F(x) = \ln |\sec x + \tan x|$.

18. $y = \ln \frac{3x^2+1}{x^4}$.

20. $y = x \ln |x| - x$.

22. $y = (\ln |x|)^2$.

24. $y = (\cos x) \ln \sin x$.

26. $y = \arctan(\ln |x|)$.

28. $y = \ln |\cos x|$.

30. $dy = \frac{4dx}{x}$.

32. $dy = \frac{x dx}{x^2 + a^2}$.

34. $dy = \frac{\cos x}{\sin x} dx$.

36. $dr = \frac{3s^2}{s^3 + 27} ds$.

45. Encuentre una ecuación de la tangente a la gráfica de $y = \ln x$ en el punto cuya abscisa es 1; id. en el punto cuya abscisa es e .

46. Compruebe que $D_x \ln \sqrt{1-x^2} = \frac{-x}{1-x^2}$.

47. Compruebe que $D_x \ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| = \sec x$.

48. Si $\ln(x^2 + y^2) = 1 - 4 \arctan \frac{y}{x}$; demuestre que $D_x y = \frac{2y-x}{2x+y}$.

49. Encuentre el área de la región limitada por las gráficas de $xy = 2$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = 5$.50. Encuentre el área de la región limitada por las gráficas de $xy = 8$ y $x + y = 6$.51. Encuentre el área de la región limitada por las gráficas de $xy = 10$ y $x + y = -7$.52. Encuentre el área de la región limitada por las gráficas de $y = \frac{x}{x^2+4}$, $y = 0$ y $x = 3$.53. Demuestre por medio de la identidad $\frac{1}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{u-a} - \frac{1}{u+a} \right]$ que si $dy = \frac{du}{u^2-a^2}$; entonces $y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + k$.54. (a) Construya la gráfica de $y = \frac{18}{x^2-9}$; Halle el área (con tres decimales) de la región limitada por dicha gráfica, el eje X y las líneas cuyas ecuaciones son (b) $x = -2$ y $x = 2$; y (c) $x = 4$ y $x = 7$.55. Encuentre el punto de la gráfica de $y = \ln x^2$ en el que la tangente es paralela a la gráfica de $x - 2y + 6 = 0$.56. Si $F(x) = \ln(1+x^2)$, encuentre los valores máximos y mínimos relativos de $F(x)$ y los puntos de inflexión de la gráfica de F . Construya la gráfica de F e indique en ella los puntos de inflexión.57. Si $F(x) = \ln \sqrt{x^2-4}$, demuestre que $F(x)$ no tiene valores máximo ni mínimo relativos y que la gráfica de F no tiene puntos de inflexión.Sugestión: Observe que el dominio de F es $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

6.6 Derivación logarítmica. Encontrar la derivada de una expresión que es un producto, un cociente o una potencia; a menudo resulta más fácil si se usan logaritmos y derivación implícita. Este procedimiento se ilustra en los dos ejemplos siguientes:

Ejemplo 1. Si $y = \frac{(3x+5)^2(x^3+3)^3}{(x^2+2)^{1/2}}$; calcule $D_x y$.

Solución. En este caso

$$|y| = \frac{|(3x+5)^2| |(x^3+3)^3|}{|(x^2+2)^{1/2}|},$$

$$|y| = \frac{|3x+5|^2 |x^3+3|^3}{(x^2+2)^{1/2}}.$$

Por tanto, $\ln |y| = \ln \frac{|3x+5|^3 |x^2+3|^5}{(x^2+2)^{1/2}},$

o $\ln |y| = 3 \ln |3x+5| + 5 \ln |x^2+3| - \frac{1}{2} \ln (x^2+2).$

Mediante la derivación implícita,

$$\frac{1}{y} D_x y = 3 \frac{3}{3x+5} + 5 \frac{2x}{x^2+3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+2}$$

$$= \frac{9}{3x+5} + \frac{15x^2}{x^2+3} - \frac{x}{x^2+2}.$$

De donde $D_x y = y \left(\frac{9}{3x+5} + \frac{15x^2}{x^2+3} - \frac{x}{x^2+2} \right),$

o bien, ya que $y = \frac{(3x+5)^3 (x^2+3)^5}{(x^2+2)^{1/2}},$

$$D_x y = \frac{(3x+5)^3 (x^2+3)^5}{(x^2+2)^{1/2}} \left(\frac{9}{3x+5} + \frac{15x^2}{x^2+3} - \frac{x}{x^2+2} \right).$$

Este resultado es válido para todos los valores de x , tales que $|y| \neq 0$.

Ejemplo 2. Calcule $D_x(x^x)$ siendo $x > 0$.

Solución. Haga $y = x^x$ y note que puesto que $x > 0, y > 0$ y $\ln y = \ln x^x$ o sea que

$$\ln y = x \ln x.$$

De donde, por derivación implícita queda

$$\frac{1}{y} D_x y = x D_x \ln x + \ln x D_x x;$$

o $\frac{1}{y} D_x y = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x.$

De modo que $D_x y = y(1 + \ln x),$

y ya que $y = x^x$, tenemos que

$$D_x y = x^x(1 + \ln x), \quad x > 0.$$

El procedimiento ilustrado en los ejemplos 1 y 2 es llamado *derivación logarítmica*, y nos permite enunciar la fórmula

$$D_x u^n = n u^{n-1} D_x u \quad (57)$$

donde n es cualquier número real y x está en el conjunto S sobre el cual $D_x u$ existe y $u = V(x) > 0$. Esta fórmula quedó asentada en la Sección 3.4 para n entero positivo y no ha sido extendida hasta ahora a n que no sea un entero positivo.

Sea $y = u^n$. Entonces, ya que $u = V(x) > 0$ y $y = u^n > 0$,

$$\ln y = \ln u^n = n \ln u.$$

Usando la derivación implícita, tenemos

$$\frac{1}{y} D_x y = n \cdot \frac{1}{u} D_x u, \quad x \in S.$$

Por tanto

$$D_x y = y \cdot n \cdot \frac{1}{u} D_x u = u^n \cdot n \cdot \frac{1}{u} D_x u,$$

o sea que

$$D_x y = n u^{n-1} D_x u, \quad x \in S.$$

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 8 calcule $D_x y$ mediante la derivación logarítmica e indique el conjunto sobre el cual sea válido el resultado.

1. $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

2. $y = x^{\tan x}$

3. $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$

4. $y = (\ln x)^x$

5. $y = (x+1)^{2/3} (2x+5)^{3/2}$

6. $y = x^3 \cdot 3^x$

7. $y = x^{\cos x}$

8. $y = x^{\arcsen x}$

6.7 Derivación de Exp_a. Demostraremos ahora el siguiente teorema.

Teorema 4. Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces la función

$$\text{Exp}_a = \{(x, y) \mid y = a^x, x \in \text{Re}, y \in (0; +\infty)\}$$

es derivable sobre su dominio $\text{Re } y$

$$D_x a^x = a^x \ln a. \quad (58)$$

Demostración. Sabemos que

$$\text{Exp}_a = \{(x, y) \mid y = a^x, x \in \text{Re}, y \in (0; +\infty)\}$$

es la inversa de

$$\text{Log}_a = \{(x, y) \mid x = a^y, y \in \text{Re}, x \in (0; +\infty)\}.$$

Sabemos además que Log_a es derivable y que $D_y \log_a x = \frac{1}{x} \cdot \log_a e \neq 0$ sobre $(0; +\infty)$. Por tanto, según el teorema 15 de la Sec. 4.4 tenemos que Exp_a es derivable sobre $\text{Re } y$ y si $y = a^x$ entonces $x = \log_a y$, y

$$D_x a^x = \frac{1}{D_y \log_a y};$$

Pero

$$D_y \log_a y = \frac{1}{y} \log_a e;$$

y por tanto

$$D_x a^x = \frac{y}{\log_a e};$$

bien, ya que $1/\log_a e = \ln a$ y $y = a^x$ tenemos que

$$D_x a^x = a^x \ln a.$$

e (58) tenemos que $D_x \text{Exp}_a = (\ln a) \text{Exp}_a$.

Teorema 5. Si $a > 0$, si $a \neq 1$ y si la función $V = \{(x, y) \mid y = V(x)\}$ derivable sobre S , entonces la función compuesta

$$\text{Exp}_a[V]$$

derivable sobre S , y

$$D_x a^u = a^u \ln a D_x u, \quad x \in S. \quad (59)$$

Demostración. Según la regla de la cadena (Sec. 3.9) tenemos que

$$D_x a^u = D_x a^u D_x u, \quad x \in S$$

ya que según (58) $D_u a^u = a^u \ln a$, tenemos que

$$D_x a^u = a^u \ln a D_x u, \quad x \in S.$$

La fórmula (59) también se puede demostrar por medio de la derivación garitmica. Sea $y = a^u$ y $u = V(x)$, y supóngase que V es derivable sobre S . entonces

$$\ln y = \ln a^u = u \ln a,$$

por derivación implícita,

$$\frac{1}{y} D_x y = \ln a D_x u, \quad x \in S,$$

si que
sea

$$\begin{aligned} D_x y &= y \ln a D_x u, & x \in S, \\ D_x y &= a^u \ln a D_x u, & x \in S. \end{aligned}$$

Puesto que $\ln e = 1$, tendremos como caso especial de (59)

$$D_x e^u = e^u D_x u. \quad (60)$$

En particular,

$$\begin{aligned} D_x e^x &= e^x \\ D \text{Exp}_e &= \text{Exp}_e. \end{aligned} \quad (61)$$

Las siguientes son ejemplos del uso de la fórmula (59):

$$\begin{aligned} D_x 2^{2x} &= 2^{2x} (\ln 2) D_x (2x) = 2(2^{2x}) (\ln 2); \\ D_x 10^{x^2} &= 10^{x^2} (\ln 10) D_x (x^2) = 2x (\ln 10) \cdot 10^{x^2}; \\ D_x 4^{\sin 2x} &= 4^{\sin 2x} (\ln 4) D_x \sin 2x = 3 (\ln 4) (\cos 3x) \cdot 4^{\sin 2x}. \end{aligned}$$

Las siguientes son ejemplos del uso de la fórmula (60):

$$\begin{aligned} D_x e^{2x} &= e^{2x} D_x (2x) = 2e^{2x}; \\ D_x e^{-x} &= e^{-x} D_x (-x) = -e^{-x}; \\ D_x e^{x^2+4x} &= e^{x^2+4x} D_x (x^2+4x) = (2x+4) e^{x^2+4x}. \end{aligned}$$

De las fórmulas (59) y (60) y de la definición de diferencial, se siguen respectivamente las fórmulas

$$d(a^u) = a^u \ln a du \quad (62)$$

y

$$d(e^u) = e^u du. \quad (63)$$

En relación con estos resultados se tienen las siguientes proposiciones, que son fórmulas adicionales para la solución de ecuaciones diferenciales

$$\text{Si } dy = ca^u du, \text{ entonces } y = c \frac{a^u}{\ln a} + k, \quad (64)$$

$$\text{si } dy = ce^u du, \text{ entonces } y = ce^u + k. \quad (65)$$

Las proposiciones (64) y (65) pueden demostrarse de la misma forma que las proposiciones semejantes, como la (55).

Ejemplo 1. Obtenga una solución general para cada una de las ecuaciones diferenciales siguientes:

$$(a) dy = xe^{-x^2} dx; \quad (b) dy = 4^{2x} dx.$$

Solución. (a) Podemos escribir $dy = -\frac{1}{2}e^{-x^2} d(-x^2)$, de modo que según (65)

$$y = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + k.$$

(b) En este ejemplo $dy = \frac{1}{2}(4^{2x})d(2x)$ y según (64)

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{4^{2x}}{\ln 4} + k.$$

Comprobemos dicho resultado. Tenemos que

$$\begin{aligned} dy &= d\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4^{2x}}{\ln 4} + k\right) = \frac{1}{2 \ln 4} d(4^{2x}) \\ &= \frac{1}{2 \ln 4} \cdot 4^{2x} (\ln 4) d(2x) = 4^{2x} dx. \end{aligned}$$

No es necesario recordar la proposición (64) si recordamos la (65) y la igualdad

$$a^u = e^{u \ln a}. \quad (66)$$

Esta igualdad se puede establecer como sigue: De (35) sabemos que

$$a = e^{\ln a},$$

y en consecuencia

$$a^u = (e^{\ln a})^u = e^{u \ln a}.$$

Ejemplo 2. Encuentre una solución general de la ecuación diferencial $dy = 10^x dx$.

Solución. Use (66) para tener

$$10^x = e^{x \ln 10},$$

si pues

$$dy = e^{x \ln 10} dx = \frac{1}{\ln 10} e^{x \ln 10} d(x \ln 10),$$

entonces, según (65)

$$y = \frac{1}{\ln 10} e^{x \ln 10} + k,$$

bien

$$y = \frac{10^x}{\ln 10} + k.$$

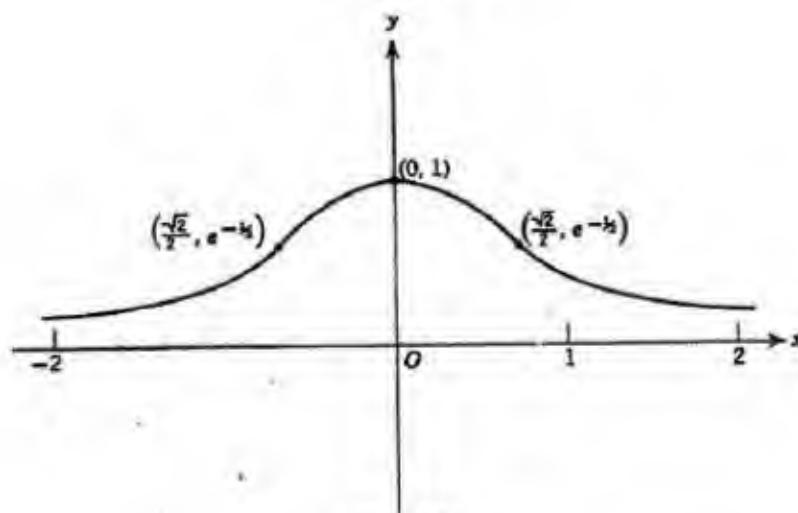


Fig. 6.18

Ejemplo 3. Si $F(x) = e^{-x^2}$, halle los valores máximo y mínimo de $F(x)$ los puntos de inflexión de la gráfica de F . Construya dicha gráfica.

Solución. Tenemos que

$$F'(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$F''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 4e^{-x^2}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Obsérvese que

$$\{x | F'(x) = 0\} = \{0\} \quad \text{y} \quad \{x | F''(x) = 0\} = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

uesto que $F'(0) = 0$ y $F''(0) = 2 \cdot 1(0 - 1) = -2 < 0$, $F(0) = 1$ es un valor máximo relativo de $F(x)$.

Los posibles puntos de inflexión son $(-\sqrt{2}/2, e^{-1/2})$ y $(\sqrt{2}/2, e^{-1/2})$. Determinemos el signo de $F''(x)$ sobre cada uno de los intervalos

$$(-\infty; -\sqrt{2}/2), (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), \text{ y } (\sqrt{2}/2, +\infty).$$

Si $x \in (-\infty; -\sqrt{2}/2)$, entonces

$$e^{-x^2} > 0, x - (1/\sqrt{2}) < 0, x + (1/\sqrt{2}) < 0, \text{ y } F''(x) > 0.$$

Si $x \in (-\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2)$, entonces

$$e^{-x^2} > 0, x - (1/\sqrt{2}) < 0, x + (1/\sqrt{2}) > 0, \text{ y } F''(x) < 0.$$

Si $x \in (\sqrt{2}/2; +\infty)$, entonces

$$e^{-x^2} > 0, x - (1/\sqrt{2}) > 0, x + (1/\sqrt{2}) > 0, \text{ y } F''(x) > 0.$$

Por tanto, $(-\sqrt{2}/2, e^{-1/2})$ y $(\sqrt{2}/2, e^{-1/2})$ son puntos de inflexión.

La gráfica de F aparece en la Fig. 6.18. Esta gráfica es cóncava hacia arriba sobre $(-\infty; -\sqrt{2}/2)$, cóncava hacia abajo sobre $(-\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2)$ y cóncava hacia arriba sobre $(\sqrt{2}/2; +\infty)$.

Para construir esta gráfica es conveniente usar la tabla II. En particular de los valores de la tabla notamos que $e^{-1/2} = 0.607$.

EJERCICIOS

Halle $D_x F(x)$ en cada uno de los ejercicios del 1 al 12.

1. $F(x) = e^{2x}$
2. $F(x) = a^x e^x$
3. $F(x) = e^x \ln x$
4. $F(x) = \ln(e^{2x} + e^{-2x})$
5. $F(x) = e^{\tan x}$
6. $F(x) = xe^x$
7. $F(x) = e^{\ln x}$
8. $F(x) = e^{-x} \cos x$
9. $F(x) = \frac{1}{2}a(e^{x/a} - e^{-x/a})$
10. $F(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$
11. $F(x) = 10^{3x}$
12. $F(x) = x^2 e^{-x} + xe^{-x}$

Halle $D_x y$ en cada uno de los ejercicios del 13 al 24.

13. $y = e^{3-5x}$
14. $y = e^{x^2}$
15. $y = 2^{x^2}$
16. $y = a(e^{x/a} + e^{-x/a})$
17. $y = e^{\tan x} e^{x^2}$
18. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
19. $y = \sec 3x + e^{3x}$
20. $y = e^{\tan 2x} + \sin e^{2x}$
21. $y = e^{\tan x}$
22. $y = \arctan e^x$
23. $y = \arctan e^{-x}$
24. $y = (\sin x)^{\cos x}$

En los ejercicios del 25 al 32 halle una solución general de la ecuación diferencial dada.

25. $dy = e^{-x} dx$
26. $dy = e^{2x} dx$
27. $dr = se^{t^2} ds$
28. $dy = xe^{-x^2} dx$
29. $dy = \sin x e^{\cos x} dx$
30. $dy = 4^{3x} dx$
31. $dy = (e^{x/a} + e^{-x/a}) dx$
32. $dy = \frac{e^x dx}{e^x + 1}$

En los ejercicios 33 y 34 resuelva el sistema diferencial dado.

33. $dy = e^{2x-x^2}(1-x) dx, y = 4$ cuando $x = 2$.
34. $dy = \frac{e^{1/x}}{x^2} dx, y = 1$ cuando $x = 2$.

En cada uno de los ejercicios del 35 al 38 calcule la integral definida.

$$35. \int_0^4 e^{2x} dx.$$

$$36. \int_0^{0.3} e^{-x^2} dx.$$

$$37. \int_0^3 e^{-2x} dx.$$

$$38. \int_0^3 2^x dx.$$

39. Halle una ecuación de la tangente a la gráfica de $y = 2^x$ en el punto cuya abscisa es 3.

40. La curva que describe una cuerda flexible de sección transversal y densidad uniformes, cuando cuelga suspendida de dos puntos es una *catenaria* y tiene una ecuación la siguiente:

$$y = \frac{a}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a}), \quad a > 0.$$

Demuestre que $D_x^2 y = (1/a^2)y$ y que la curva es por tanto, siempre cóncava hacia arriba. Halle el punto más bajo de la curva. Grafique la catenaria para $a = 1$, sobre el intervalo $[-5; 5]$.

41. Si $F(x) = xe^x$, halle los valores máximo y mínimo relativos de $F(x)$ los puntos de inflexión de la gráfica de F . Construya dicha gráfica y en ella indique los puntos de inflexión.

En los ejercicios del 42 al 49 halle el área (con tres decimales) de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas. Dibuje una figura que muestre la región cuya área ha encontrado.

$$42. y = e^x, y = 10^x, x = 2.$$

$$43. y = e^{-x}, y = 0, x = 0, x = 2.$$

$$44. y = e^x, y = e^{-x}, x = 3.$$

$$45. y = e^x, y = e^{2x}, x = 1, x = 3.$$

$$46. y = e^{-x}, x = 0, y = 4.$$

$$47. y = e^{x/2} + e^{-x/2}, x = -5, x = 5.$$

$$48. y = e^x, y = \ln x, x = 1, x = 2.$$

$$49. y = e^{-x}, y = x, x = 0.$$

50. La región del ejercicio 47 se hace girar alrededor del eje X . Halle el volumen del sólido generado.

51. La región limitada por las gráficas de $y = e^{2x}$, $x = 0$, $y = 0$ y $x = 2$ se hace girar alrededor del eje X . Calcule el volumen del sólido generado.

52. Encuentre el área del mayor rectángulo que se pueda inscribir bajo la gráfica de $y = e^{-x^2}$ y que tenga su base en el eje X .

53. La función seno hiperbólico se denota por Senh y se define como

$$\text{senh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

La función coseno hiperbólico se denota por Cosh y se define como

$$\text{cosh } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Compruebe cada una de las siguientes proposiciones.

$$(a) D_x \text{senh } x = \text{cosh } x. \quad (b) D_x \text{cosh } x = \text{senh } x.$$

$$(c) \text{senh } (-x) = -\text{senh } x. \quad (d) \text{cosh } (-x) = \text{cosh } x.$$

$$(e) \text{senh } (x - y) = \text{senh } x \text{cosh } y - \text{cosh } x \text{senh } y.$$

$$(f) \text{cosh } (x - y) = \text{cosh } x \text{cosh } y - \text{senh } x \text{senh } y.$$

54. Otras funciones hiperbólicas se pueden definir en términos de Senh y Cosh , de la misma forma que Tan , Cot , Sec y Csc se definen en términos de Sen y Cos . Así pues

$$\text{Tanh} = \frac{\text{Senh}}{\text{Cosh}} \text{ así que } \tanh x = \frac{\text{senh } x}{\text{cosh } x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$\text{Coth} = \frac{\text{Cosh}}{\text{Senh}} \text{ así que } \coth x = \frac{\text{cosh } x}{\text{senh } x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

$$\text{Sech} = \frac{1}{\text{Cosh}} \text{ así que } \text{sech } x = \frac{1}{\text{cosh } x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}},$$

$$\text{Csch} = \frac{1}{\text{Senh}} \text{ así que } \text{csch } x = \frac{1}{\text{senh } x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

Compruebe cada una de las siguientes proposiciones.

$$(a) D_x \tanh x = \text{sech}^2 x. \quad (b) D_x \coth x = -\text{csch}^2 x.$$

$$(c) \tanh^2 x + \text{sech}^2 x = 1. \quad (d) \coth^2 x - \text{csch}^2 x = 1.$$

6.8 Leyes exponenciales de crecimiento y disminución. En muchas situaciones la razón de cambio de la cantidad de una sustancia con respecto al tiempo t es proporcional a la cantidad de sustancia presente en el tiempo t . En tales casos la cantidad de sustancia presente en el tiempo t se puede expresar en términos de e^{ct} para alguna constante c como mostraremos en el siguiente teorema.

Teorema 6. Si $F(t)$ es positiva, si $F'(t)$ existe sobre un intervalo S y si c es un número real tal que

$$F'(t) = cF(t), \quad t \in S, \quad (67)$$

entonces existe un número real k tal que

$$F(t) = ke^{ct}, \quad t \in S. \quad (68)$$

Demostración. Por hipótesis

$$F'(t) = cF(t), \quad t \in S,$$

y la forma diferencial de esta igualdad es

$$dF(t) = cF(t) dt,$$

$$\frac{1}{c} \frac{dF(t)}{F(t)} = dt, \quad t \in S.$$

Usando (55) obtendremos

$$\frac{1}{c} \ln F(t) + k_1 = t,$$

13/FUNCIONES TRASCENDENTES

La forma exponencial de (69) es

$$F(t) = e^{ct+h}$$

$$F(t) = e^{ct}e^h, \quad t \in S.$$

hora bien, si hacemos $k = e^h$ (nótese que $e^h > 0$), tendremos que

$$F(t) = ke^{ct}, \quad t \in S. \quad \blacksquare$$

Para $u = F(t)$, se sigue del teorema 6 que si $du/dt = cu$ y $u > 0$ entonces

$$u = ke^{ct}. \quad (70)$$

Si $c > 0$, entonces e^{ct} crece sobre S y en ese caso (68) se llama *ley exponencial de crecimiento*. Si $c < 0$, entonces e^{ct} decrece sobre S y en ese caso (68) se llama *ley exponencial de disminución*. Algunas veces (68) se llama *ley de crecimiento natural*.

Ejemplo 1. La razón de cambio del número de bacterias en un cultivo con respecto al tiempo t es proporcional al número presente. En 10 horas, la población crece de 1000 a 50,000. Encuentre la ley exponencial de crecimiento que exprese el número $F(t)$ de bacterias presentes t horas después de que las 1000 bacterias estaban presentes en el cultivo. Use el resultado para predecir la población al cabo de 20 horas.

Solución. Según la ley de crecimiento natural, tenemos que

$$F(t) = ke^{ct}.$$

Sabemos que $F(0) = 1000$. De ahí que

$$1000 = ke^0 = k,$$

$$F(t) = 1000e^{ct}.$$

Además sabemos que $F(10) = 50,000$, de modo que

$$50,000 = 1000e^{10c},$$

$$50 = e^{10c},$$

$$e^c = (50)^{1/10},$$

$$c \doteq 0.3912.$$

De este resultado vemos que la ley de crecimiento exponencial deseada se puede expresar en cualquiera de las formas

$$F(t) = 1000(50)^{t/10} \quad (71)$$

$$F(t) \doteq 1000e^{0.3912t}. \quad (72)$$

Es claro que (71) es más conveniente para calcular $F(a)$ cuando a sea un múltiplo de 10 pero (72) resulta más conveniente cuando a no sea múltiplo de 10, siempre cuando se disponga de una tabla apropiada de los valores de e .

LEYES EXP DE CRECIMIENTO Y DISMINUCION/329

Si usamos (71) hallamos que $F(20) = 1000(50)^2 = 2,500,000$.

Ejemplo 2. La razón de cambio de una cantidad de radio en una muestra con respecto al tiempo t es proporcional a la cantidad Q presente. De 200 mg. presentes en el año de 1900, quedaban 196.6 mg. 50 años después. Halle una expresión para la cantidad Q que quedará t siglos después de 1900. Calcule cuantos siglos deben transcurrir para que se descomponga una décima parte del radio.

Solución. Según la ley de crecimiento natural tenemos que

$$Q = ke^{ct}.$$

Puesto que $Q = 200$ cuando $t = 0$, tendremos que

$$200 = ke^0, \quad k = 200$$

Por esto

$$Q = 200e^{ct}.$$

Puesto que $Q = 196.6$ cuando $t = \frac{1}{2}$, obtendremos

$$196.6 = 200e^{1/2c}$$

de modo que

$$\ln \frac{196.6}{200} = \frac{1}{2}c.$$

Por tanto,

$$c \doteq -0.0344.$$

En consecuencia

$$Q \doteq 200e^{-0.0344t}.$$

Esta fórmula se puede usar para calcular un valor, de Q o el de t , cuando el otro se da. En el ejemplo se nos pide hallar el valor de t cuando $Q = 200 - \frac{1}{10}(200) = 180$ mg. Tenemos que

$$180 \doteq 200e^{-0.0344t}$$

y

$$0.0344t \doteq 0.1054,$$

Por tanto

$$t \doteq 3.06,$$

es decir que se necesitan aproximadamente 3.06 siglos para que se descomponga una décima parte del radio.

Otros casos en que se presenta la ley de crecimiento natural, son los siguientes:

(i) *Cambio de la población.* La razón de cambio de la población p de un país con respecto al tiempo t es proporcional a la población en el tiempo t : $D_t p = cp$.

(ii) *Presión atmosférica.* La razón de cambio de la presión atmosférica con respecto a la altura h es proporcional a la presión $D_h p = cp$.

(iii) *Flujo de corriente en un circuito eléctrico.* Si i es la intensidad de la corriente en el tiempo t , la razón de flujo de la corriente con respecto al tiempo está expresada mediante $D_t i = -(r/l)i$, donde r y l son constantes que dependen del circuito.

EJERCICIOS

Resuelva el sistema diferencial dado en los ejercicios 1 y 2.

1. $dy = 2y dx$, $y = 3e^2$ cuando $x = 1$.

2. $dy = \frac{1}{2}y dx$, $y = 5e$ cuando $x = 2$.

En los ejercicios 3 y 4, $F(t)$ es una solución de la ecuación diferencial $dF(t) = cF(t)dt$. Encuentre la $F(t)$ que satisfaga las condiciones dadas

3. $F(0) = 1$, $F(1) = e^{-2}$.

4. $F(0) = 100$, $F(1) = 50$.

5. La razón de cambio de u con respecto a t es igual a $8t$. Si $u = 15$ cuando $t = 0$ encuentre una expresión para u en términos de t .

6. La razón de cambio de y con respecto a x es proporcional a x sobre un intervalo S . Si $y = 4$ cuando $x = 2$ y $y = 9$ cuando $x = 4$, encuentre una expresión para y en términos de x .

7. Un punto se mueve sobre una curva de modo tal que la razón de cambio de la ordenada con respecto a la abscisa es proporcional a la ordenada. Encuentre una ecuación de la curva si su pendiente es $(-3/2)$ en $(2, 3)$.

8. La población de una ciudad es de 40,000 habitantes; hace 20 años era de 25,000. Suponiendo que la población cambia como se describió en (i), encuentre una expresión para la población en términos del tiempo t .

9. Suponiendo que la presión del aire cambia como se describió en (ii), encuentre la presión p del aire en términos de la altura h , dado que la presión del aire al nivel del mar es de 1.033 kgs/cm² y a una altura de 3,000 mts. es de .680 kgs/cm². De la fórmula obtenida calcule p para cuando $h = 5,000$ mts.; para $h = 6,000$ mts.; para $h = 8,000$ mts.

10. En un circuito eléctrico como el descrito en (iii), la razón de r a t es de 60 de modo que $D_t i = -60i$ cuando el tiempo es t segundos. Obtenga una fórmula para i en términos de t , dado que $i = 30$ cuando $t = 0$. Encuentre i cuando $t = 1/60$ seg.

11. La razón de cambio de la cantidad de radio en una muestra con respecto al tiempo t es proporcional a la cantidad q presente. Si q_0 es la cantidad original y $q = \frac{1}{2}q_0$ en 1800, encuentre una expresión para q en términos de t y q_0 . Calcule q 100 años después del tiempo para el cual $q = q_0$; 500 años después de ese tiempo; 2500 años después de ese tiempo.

12. La razón de cambio de la intensidad i de la luz con respecto a la distancia x que la luz ha penetrado en el vidrio está dada por $D_x i = -0.02i$ para cierta clase de vidrio. Si $i = 100$ cuando $x = 0$, encuentre una fórmula para i en términos de x .

13. Suponga que la población de un estado cambia como se describió en (i), calcule en qué tiempo se quintuplicará la población si se duplica en 20 años.

14. La aceleración de una partícula en el tiempo t es proporcional a su velocidad en ese instante. Si v_0 es la velocidad inicial encuentre la distancia que recorre la partícula en el intervalo $[t_1; t_2]$.

EJERCICIOS ADICIONALES AL CAPITULO 6

En cada uno de los ejercicios del 1 al 20 encuentre $D_x F(x)$.

1. $F(x) = \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$.

2. $F(x) = [\ln(1 + \sqrt{x})]^2$.

3. $F(x) = \ln(1 + \cos^2 ax)$.

4. $F(x) = \ln \sqrt{1 + \cos^2 x}$.

5. $F(x) = \sin \left(\arctan \frac{x^2}{a^2} \right)$.

6. $F(x) = \ln \cos(1 + \sqrt{x})$.

7. $F(x) = 5^{1+2\sin x}$.

8. $F(x) = \arctan(\cot \frac{2}{3}x)$.

9. $F(x) = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$.

10. $F(x) = \arctan(\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

11. $F(x) = \ln \sec(\arctan x)$.

12. $F(x) = \operatorname{arccsc}(1 - x^2)^{-1/2}$.

13. $F(x) = \arcsen \sqrt{1 - x^2}$.

14. $F(x) = \arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$.

15. $F(x) = \ln \frac{(x-1)^2}{2x-3}$.

16. $F(x) = \ln \frac{\sin x}{2 - \cos x}$.

17. $F(x) = \sqrt[3]{x(x-a)(x-b)(x-c)}$.

18. $F(x) = e^{2x} \sin^3 x \cos^3 x$.

19. $F(x) = 2^{ax+b}$.

20. $F(x) = \arcsen 2x \sqrt{1 - x^2}$.

Encuentre una solución general de la ecuación diferencial dada en cada uno de los ejercicios del 21 al 24.

21. $dy = \frac{2' dx}{3(5 - 2x)}$.

22. $dy = e^{-(x/c)} dx$.

23. $dy = \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}$.

24. $dy = \frac{dx}{a^2 x^2 + b^2}$.

Calcule la integral definida de cada uno de los ejercicios del 25 al 28.

25. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot x dx$.

26. $\int_a^b \frac{dx}{x}$.

27. $\int_a^b \frac{dx}{a^2 + x^2}$.

28. $\int_a^b e^x dx$.

Integración indefinida

7.1 Integrales indefinidas; fórmulas elementales. Un problema frecuente en cálculo es, como ya hemos visto, la determinación de una antiderivada de una función dada F . Por este motivo resulta conveniente el tener un símbolo para la antiderivada y estudiar en detalle algunas técnicas para encontrar antiderivadas. Como resultado de la conexión que hay entre la integral definida de F y una antiderivada de F , dada en el Teorema Fundamental del cálculo, el símbolo más comúnmente usado para una antiderivada de $F(x)$ es $\int F(x) dx$ y esta antiderivada es llamada integral indefinida de $F(x)$. Esto es que si S es un intervalo o una unión de intervalos y si G es una función tal que

$$G'(x) = F(x), \quad x \in S,$$

escribiremos

$$\int F(x) dx = G(x) + k, \quad x \in S,$$

en donde k es cualquier número real y llamaremos a $\int F(x) dx$ **integral indefinida de $F(x)$** ;

$$\int F(x) dx = G(x) + k \iff D_x[G(x) + k] = F(x).$$

En $\int F(x) dx$, la expresión $F(x)$ se llama el **integrando**. Como ejemplos:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + k, \quad \int \cos x dx = \sin x + k.$$

Debemos prestar atención a que $\int F(x) dx$ es una integral indefinida de $F(x)$; es decir que cuando escribimos $V(x) = \int F(x) dx$, estamos indicando que $V(x)$ es una antiderivada de $F(x)$ de modo que $D_x V(x) = F(x)$. Por tanto, si tenemos que

$$V(x) = \int F(x) dx \quad \text{y} \quad U(x) = \int F(x) dx,$$

no podemos concluir que $V(x) = U(x)$; todo lo que sabemos es que $D_x V(x) =$

$D_x U(x)$; por lo que según el teorema 20 de la Sec. 3.11, la única conclusión posible es:

$$V(x) = U(x) + k$$

donde k es algún número real.

Sabemos por el teorema 9 de la Sec. 5.7 que si F es continua sobre S , entonces existe una función G tal que $G'(x) = F(x)$ para $x \in S$ o sea que $G(x)$ será una antiderivada de $F(x)$ sobre S y $\int F(x) dx = G(x) + k$. Aunque $\int F(x) dx$ existirá sobre S si F es continua sobre S , no siempre es posible expresar $\int F(x) dx$ en términos de la correspondiente de x ante una función G que se pueda poner en términos de sumas, productos, cocientes o composiciones de un número finito de funciones algebraicas, trigonométricas, trigonométricas inversas, exponenciales o logarítmicas. Cuando el proceso de encontrar tal expresión para $\int F(x) dx$ es posible, se llama *integración indefinida*. Cuando hayamos encontrado una fórmula para $G(x)$ en términos de x y tal que

$$\int F(x) dx = G(x) + k,$$

diremos que hemos *evaluado* $\int F(x) dx$.

Una reestructuración de la definición de integral indefinida en términos de diferenciales es útil a menudo para calcular una integral indefinida. Si G es una función para la que

$$dG(x) = F(x) dx, \quad x \in S,$$

entonces

$$\int F(x) dx = G(x) + k, \quad x \in S,$$

donde k es cualquier número real; esto es

$$\int F(x) dx = y + k \iff dy = F(x) dx.$$

Por tanto, podemos calcular $\int F(x) dx$, definiendo una solución general de la ecuación diferencial $dy = F(x) dx$.

Como ejemplo calculemos $\int x\sqrt{x^2+1} dx$ hallando una solución general de la ecuación diferencial $dy = x\sqrt{x^2+1}$, ó $dy = \frac{1}{2}(x^2+1)^{1/2} d(x^2+1)$. Tal solución es $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (x^2+1)^{3/2} + k$, ó $y = \frac{1}{3} (x^2+1)^{3/2} + k$. En consecuencia

$$\int x\sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{3} (x^2+1)^{3/2} + k.$$

La lista de fórmulas para integrales indefinidas dada a continuación es simplemente una colección de resultados obtenidos en los capítulos precedentes. En estas fórmulas suponemos que $u = V(x)$ y si $V'(x)$ existe sobre un conjunto S . Cada fórmula es válida sobre el subconjunto de S indicado en seguida de ella. Para cada fórmula se da una referencia a la proposición, de un capítulo anterior, en que ella se basa.

$$\int au^p du = \frac{a}{p+1} u^{p+1} + k, \quad p \neq -1; \quad (1)$$

válida sobre $\{x \in S \mid [V(x)]^p \text{ existe}\}$ si $p > -1$; véase (79) de la Sec. 3.14.

$$\int au^{-1} du = \int a \frac{du}{u} = a \ln |u| + k; \quad (2)$$

válida sobre $\{x \in S \mid V(x) \neq 0\}$; véase (59) de la Sec. 6.5.

$$\int a \sin u du = -a \cos u + k; \quad (3)$$

válida sobre S ; véase (7) de la Sec. 6.1.

$$\int a \cos u du = a \sin u + k; \quad (4)$$

válida sobre S ; véase (8) de la Sec. 6.1.

$$\int a \sec^2 u du = a \tan u + k; \quad (5)$$

válida sobre $\{x \in S \mid x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\}$, para n entero; véase (9) de la Sec. 6.1.

$$\int a \csc^2 u du = -a \cot u + k; \quad (6)$$

válida sobre $\{x \in S \mid x \neq n\pi\}$, para n entero; véase (10) de la Sec. 6.1.

$$\int a \sec u \tan u du = a \sec u + k; \quad (7)$$

válida sobre $\{x \in S \mid x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\}$, para n entero; véase (11) de la Sec. 6.1.

$$\int a \csc u \cot u du = -a \csc u + k; \quad (8)$$

válida sobre $\{x \in S \mid x \neq n\pi\}$ para n entero; véase (12) de la Sec. 6.1.

$$\int \frac{a du}{\sqrt{1-u^2}} = a \arcsen u + k; \quad (9)$$

válida sobre $\{x \in S \mid |V(x)| < 1\}$; véase (29) de la Sec. 6.2.

$$\int \frac{a du}{1+u^2} = a \arctan u + k; \quad (10)$$

válida sobre S ; véase (30) de la Sec. 6.2.

$$\int \frac{a du}{u\sqrt{u^2-1}} = a \operatorname{arcsec} u + k; \quad (11)$$

válida sobre $\{x \in S \mid |V(x)| > 1\}$; véase (31) de la Sec. 6.2.

$$\int a e^u du = a e^u + k; \quad (12)$$

válida sobre S ; véase (69) de la Sec. 6.7.

$$\int a b^u du = a \frac{b^u}{\ln b} + k; \quad (13)$$

válida sobre S ; véase (68) de la Sec. 6.7.

De la definición de integral indefinida y del hecho de que

$$D_x[U(x) + V(x)] = D_x U(x) + D_x V(x),$$

se sigue que

$$\int [F(x) + G(x)] dx = \int F(x) dx + \int G(x) dx + k. \quad (14)$$

Siempre que deseemos calcular una integral indefinida tal como $\int F(x) dx$, hemos de ver primero si podemos arreglar la expresión $F(x) dx$ de modo que se pueda aplicar alguna de las fórmulas elementales recién dadas. Este procedimiento ha sido ilustrado frecuentemente en los capítulos anteriores.

Ejemplo 1. Calcule $\int \sec^2 x \cos x dx$ e indique el conjunto sobre el que es válido el resultado. Compruebe el resultado por derivación.

Solución. Notamos que podemos escribir

$$\int \sec^2 x \cos x dx = \int \sec^2 x d(\sin x)$$

Por tanto, usando (1) y haciendo que $\sin x$ ocupe el lugar de u , tendremos que

$$\int \sec^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} \sec^3 x + k.$$

Este resultado vale sobre Re puesto que $\sin x$ es derivable sobre Re .

Para comprobar el resultado notemos que

$$D_x\left(\frac{1}{3} \sec^3 x + k\right) = \frac{1}{3} \sec^2 x \cos x = \sec^2 x \cos x, \quad x \in Re.$$

Ejemplo 2. Calcule $\int \frac{(x-2) dx}{x^2-4x+2}$ e indique el conjunto sobre el que es válido el resultado. Compruébelo.

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned} \int \frac{(x-2) dx}{x^2-4x+2} &= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-4) dx}{x^2-4x+2} = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{d(x^2-4x+2)}{x^2-4x+2} \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2-4x+2| + k \quad [\text{según (2)}]. \end{aligned}$$

Este resultado vale sobre

$$\{x \in Re \mid x^2-4x+2 \neq 0\} = \{x \in Re \mid x \neq 2 + \sqrt{2} \text{ ó } x \neq 2 - \sqrt{2}\}.$$

Como comprobación calculamos

$$\begin{aligned} D_x\left(\frac{1}{2} \ln |x^2-4x+2| + k\right) &= \frac{\frac{1}{2}(2x-4)}{x^2-4x+2} \\ &= \frac{x-2}{x^2-4x+2}; \quad x \neq 2 + \sqrt{2} \text{ y } x \neq 2 - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3. Calcule $\int \sec x dx$ e indique el conjunto sobre el que es válido el resultado.

Solución. Podemos escribir

$$\int \sec x dx = \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\tan x + \sec x} dx$$

y usar (2) para hallar

$$\int \sec x dx = \ln |\tan x + \sec x| + k.$$

Este resultado vale sobre $\left\{x \in Re \mid x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\right\}$.

EJERCICIOS

Calcule cada integral indefinida dada e indique el conjunto sobre el que es válido cada resultado. Compruebe cada resultado por derivación

1. $\int \frac{dx}{x^2}$

2. $\int \sqrt{x} dx$

3. $\int \sec^4 x \cos x dx$

4. $\int \frac{\sec x}{\cos^2 x} dx$

5. $\int \frac{3 dx}{1+2x}$

6. $\int \frac{x^2 dx}{x^2-1}$

7. $\int \frac{(1-x)^2}{x} dx$

8. $\int \frac{\sec x dx}{1+\cos x}$

9. $\int e^{-2x} dx$

10. $\int x e^{-x^2} dx$

11. $\int 10^{-2x} dx$

12. $\int 3 e^{2 \ln x} dx$

13. $\int \cos 3x dx$

14. $\int \sec^2 3x dx$

15. $\int \sec 2x \tan 2x dx$

16. $\int \frac{\sec^2 4x dx}{1-\tan 4x}$

17. $\int \frac{dx}{9+x^2}$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

20. $\int \frac{dx}{1+4x^2}$

21. $\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$

22. $\int \frac{x dx}{9+x^2}$

23. $\int \frac{x dx}{\sqrt{8+x^2}}$

24. $\int \sqrt{x(x^{3/2}-4)^2} dx$

25. $\int \sec 2x \sqrt{1+2 \cos 2x} dx$

26. $\int \tan x \sec^2 x dx$

27. $\int \frac{\ln x}{x} dx$

28. $\int \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

29. $\int \frac{dx}{x \ln x}$

30. $\int \frac{e^{-2x}}{3-e^{-2x}} dx$

31. $\int \ln e^{2x} dx.$

33. $\int \frac{\csc^2 x dx}{\cot x + 1}.$

35. $\int \frac{2 dx}{4 + (x-2)^2}.$

37. $\int \frac{2x-3}{x^2+2x+17} dx.$

Sugestión: $\frac{2x-3}{x^2+2x+17} = \frac{2(x+1)-5}{(x+1)^2+16}$

39. $\int \frac{x \ln(1+x^2)}{1+x^2} dx.$

41. $\int (\sin^2 e^x)(\cos e^x)(e^x) dx.$

43. $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx.$

45. $\int \frac{\tan^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$

47. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx.$

49. $\int x^2 e^{2x} dx.$

51. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}.$

53. $\int \csc x dx.$

32. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x} dx.$

34. $\int \sec^2 x e^{-\tan x} dx.$

36. $\int \frac{3(x-2)}{4+(x-2)^2} dx.$

38. $\int \frac{x+2}{x^2+2x+10} dx.$

40. $\int \cot x (\ln \sin x) dx.$

42. $\int \frac{dx}{(1+x)^{1/2}}.$

44. $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx.$

46. $\int \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx.$

48. $\int \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx.$

50. $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} dx.$

52. $\int \frac{x dx}{\sqrt{16-9x^2}}.$

54. $\int x \sec x^2 dx.$

7.2 Integración por partes. Cuando no podamos arreglar el integrando de una integral indefinida de modo que se pueda aplicar una de las fórmulas elementales de la sección anterior, debemos buscar otros métodos para evaluar la integral. Uno de ellos es la integración por partes.

Sean $u = U(x)$ y $v = V(x)$ siendo U y V derivables sobre S . Entonces para $x \in S$, tendremos que

$$D_x[U(x)V(x)] = U(x) D_x V(x) + V(x) D_x U(x),$$

$$\text{o} \quad d(uv) = u dv + v du,$$

que se puede escribir como

$$u dv = d(uv) - v du, \quad x \in S, \quad (15)$$

Si U' y V' son continuas sobre S , sabemos que $\int u dv$ e $\int [d(uv) - v du]$ existen sobre S y podemos escribir

$$\int u dv = \int [d(uv) - v du] + k, \quad x \in S,$$

Finalmente usando (14) y el hecho de que $\int d(uv) = uv$, tenemos que

$$\int u dv = uv - \int v du + k, \quad x \in S. \quad (16)$$

La fórmula (16) se usa con frecuencia como ayuda para calcular una integral indefinida. El efecto de (16) es el de reemplazar el problema de calcular una integral indefinida dada $\int v du$, por el de calcular otra integral indefinida $\int u dv$. El cálculo de una integral indefinida por medio de (16) se llama **integración por partes**. Los siguientes ejemplos indican cómo se usa este método y el tipo de integrales a las que se aplica.

Ejemplo 1. Calcule $\int x \sin 2x dx$ e indique el conjunto sobre el que es válido el resultado.

Solución. Sea

$$u = U(x) = x \quad y \quad dv = dV(x) = \sin 2x dx;$$

entonces $du = dx$ y $v = V(x) = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x$. Tanto U como V son derivables y U' y V' son continuas sobre Re ; por tanto, podemos usar (16) para $x \in Re$ y obtendremos.

$$\begin{aligned} \int (x) (\sin 2x dx) &= x \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) - \int \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) dx + k \\ &= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + k. \end{aligned}$$

En este caso hemos reemplazado el problema de calcular $\int x \sin 2x dx$ por el problema más simple de calcular $\int \cos 2x dx$. Puesto que $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x$, vemos que

$$\int x \sin 2x dx = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + k, \quad x \in Re.$$

Ejemplo 2. Calcule $\int x^2 \ln x dx$ e indique el conjunto sobre el que es válido el resultado.

Solución. Sea

$$u = U(x) = \ln x \quad y \quad dv = dV(x) = x^2 dx;$$

entonces $du = dx/x$ y $v = V(x) = \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3$. U es derivable sobre $\{x \in Re \mid x > 0\}$, V es derivable sobre Re , U' es continua sobre $\{x \in Re \mid x > 0\}$ y V' es continua sobre Re . De ahí que se pueda usar (16) para $x \in Re$, $x > 0$, y tendremos

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln x dx &= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \int \frac{1}{3} x^3 \frac{dx}{x} + k \\ &= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx + k \\ &= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + k, \quad x > 0. \end{aligned}$$

En los ejemplos (1) y (2) obtuvimos mediante (16), integrales más simples que las dadas. En realidad la selección de $U(x)$ y $dV(x)$ se hizo con este objeto; si $\int v du$ fuera más complicada que la integral dada, sospecharíamos que la selección había sido inadecuada. Ocasionalmente resulta necesario usar la integración por partes para calcular la integral del segundo miembro de (16).
Ejemplo 3. Calcule $\int x e^x dx$ e indique el conjunto sobre el que es válido el resultado.
Solución. Sea

$u = x$ y $dv = e^x dx$. Entonces $du = dx$ y $v = e^x$. Como u y v son continuas sobre \mathbb{R} , tendremos que

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + k_1, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

Usaremos de nuevo la integración por partes. Sea $w = x$ y $dz = e^x dx$; entonces $dw = dx$ y $z = e^x$. Por tanto,

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + k_1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sustituyendo este resultado en (17) obtenemos

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - (x e^x - e^x + k_1) + k_2 = e^x (x^2 - x + 1) + k, \quad x \in \mathbb{R},$$

donde $k = k_2 - k_1$.

Aun cuando la nueva integral indefinida obtenida por integración por partes no sea más simple que la integral dada, el método puede conducirnos al cálculo de la integral dada.

Ejemplo 4. Calcule $\int e^{2x} \cos x dx$ e indique el conjunto sobre el que es válido el resultado.

Solución. Sea $u = e^{2x}$ y $dv = \cos x dx$; entonces $du = 2e^{2x} dx$ y $v = \sin x$. La fórmula (16) se puede usar porque $x \in \mathbb{R}$ y tendremos

$$\int e^{2x} \cos x dx = e^{2x} \sin x - \int 2e^{2x} \sin x dx + k_1. \quad (18)$$

Aunque la integral en el segundo miembro de (18) no es más sencilla que la

integral dada tampoco es más complicada. En tal caso usamos la integración por partes para tratar de calcular la integral del segundo miembro. En $\int 2e^{2x} \sin x dx$ hacemos

$$dw = 2e^{2x} dx, \quad z = \sin x.$$

Tenemos que entonces

$$\int 2e^{2x} \sin x dx = -2e^{2x} \cos x + 4 \int e^{2x} \cos x dx + k_2.$$

La sustitución de este resultado en (18) nos da

$$\int e^{2x} \cos x dx = e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x - 4 \int e^{2x} \cos x dx + k_1 + k_2.$$

$$5 \int e^{2x} \cos x dx = e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x + k_1 + k_2.$$

$$\int e^{2x} \cos x dx = \frac{1}{5} (e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x) + k_1.$$

Por tanto,

$$\int e^{2x} \cos x dx = \frac{1}{5} (e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x) + k_1.$$

Como se ha indicado a través de estos ejemplos, la integración por partes se usa más frecuentemente para el cálculo de $\int F(x) dx$ cuando $F(x)$ se puede escribir como el producto de dos correspondientes $F(x) = G(x)H(x)$,

donde G y H son distinto tipo de funciones. Por ejemplo, G puede ser algebraica y H trascendente, o G trigonométrica y H exponencial. No intentaremos usar la integración por partes cuando el integrando no sea de esta forma, a menos que ningún otro de los métodos a nuestra disposición sea aplicable.

Ejemplo 5. Calcule $\int \arcsen x dx$ e indique el conjunto sobre el que es válido el resultado.

Solución. Aquí necesitamos pensar que $\arcsen x$ puede ser considerado como $y = \arcsen x$ y podemos tomar

$$u = \arcsen x, \quad dv = 1 \cdot dx.$$

Entonces

$$\int \arcsen x dx = x \arcsen x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$= x \arcsen x + \sqrt{1-x^2} + k_1.$$

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 22 calcule la integral indefinida dada e indique el conjunto sobre el que es válido el resultado.

1. $\int x \cos x \, dx$.
2. $\int x e^{2x} \, dx$.
3. $\int x^2 \cos x \, dx$.
4. $\int x^3 e^{2x} \, dx$.
5. $\int x \sec^2 x \, dx$.
6. $\int x \ln x \, dx$.
7. $\int e^x \sin 2x \, dx$.
8. $\int \arctan x \, dx$.
9. $\int \sec^3 x \, dx$.
10. $\int \ln |x| \, dx$.

Sugestión: Haga $u = \sec x$, $dv = \sec^2 x \, dx$.

11. $\int \arccos x \, dx$.
12. $\int \operatorname{arcsec} x \, dx$.
13. $\int (\operatorname{arcsec} x)^2 \, dx$.
14. $\int (\arctan x)^2 \, dx$.
15. $\int x \sin x^2 \, dx$.
16. $\int e^{ax} \sin bx \, dx$.
17. $\int x \operatorname{arcsec} x \, dx$.
18. $\int \sin(\ln x) \, dx$.
19. $\int x^2 \arctan x \, dx$.
20. $\int (\ln x)^2 \, dx$.
21. $\int \csc^2 2x \, dx$.
22. $\int \sqrt{x} \ln x \, dx$.

23. Analice la validez de la siguiente "demostración" de que $-1 = 0$. Sabemos que

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \int \sin x \sec x \, dx.$$

Use la integración por partes para evaluar $\int \sin x \sec x \, dx$, haciendo $u = \sec x$, $dv = \sin x \, dx$, $du = \sec x \tan x \, dx$, y $v = -\cos x$. De donde

$$\int \sin x \sec x \, dx = -\sec x \cos x - \int -\cos x \sec x \tan x \, dx = -1 + \int \tan x \, dx.$$

Tenemos que

$$\int \tan x \, dx = -1 + \int \tan x \, dx,$$

de donde se sigue que $0 = -1$.

Sugestión: Recuerde el significado del símbolo $\int \tan x \, dx$.

24. Halle el área de la región limitada por las gráficas de $y = \ln x$, $y = 0$ y $x = 6$.

25. Halle el área de la región del primer cuadrante que queda limitada por las gráficas de $y = x \ln x$ (véase la Fig. 7.1), $y = 0$ y $x = 2$.

26. Halle el área de la región limitada por las gráficas de $y = \arcsen x$, $y = 0$ y $x = \sqrt{3}/2$.

27. La región del ejercicio 26 gira alrededor del eje X . Calcule el volumen del sólido generado.

28. La región limitada por las gráficas de $y = \ln x$, $y = 0$ y $x = 5$ se hace girar alrededor del eje X . Encuentre el volumen del sólido generado.

7.3 Integrales trigonométricas. Muchas integrales indefinidas que comprenden productos y potencias de funciones trigonométricas se pueden calcular con ayuda de las identidades trigonométricas

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad x \in \mathbb{R}; \quad (19)$$

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi; \quad (20)$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq n\pi; \quad (21)$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad (22)$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad (23)$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (24)$$

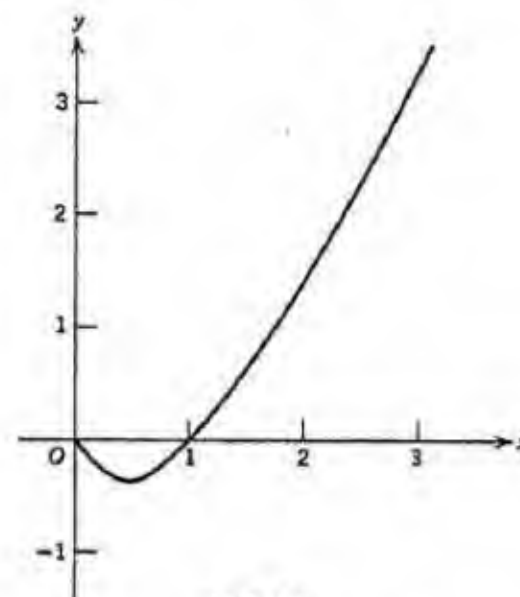


Fig. 7.1

Las fórmulas básicas para la evaluación de las integrales trigonométricas son de (3) a (8) de la Sec. 7.1 y los métodos de cálculo de $\int \sin^2 x \, dx$, $\int \cos^2 x \, dx$, $\int \tan^2 x \, dx$ e $\int \cot^2 x \, dx$ que daremos a continuación. Mediante las identidades (22), (23) y (24) obtendremos

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right)$$

$$+ k = \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x) + k;$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right)$$

$$+ k = \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) + k;$$

4/INTEGRACION INDEFINIDA

mediante (20) y (21) hallaremos que

$$\int \tan^2 x \, dx = \int (\sec^2 x - 1) \, dx = \tan x - x + k,$$

$$\int \cot^2 x \, dx = \int (\csc^2 x - 1) \, dx = -\cot x - x + k.$$

Estos resultados y los demás de esta sección son válidos sobre el conjunto para el cual esté definido el integrando.

El método usado para calcular $\int \sin^2 x \, dx$ y $\int \cos^2 x \, dx$ se puede usar también para

$$\int \sin^n x \, dx \text{ y } \int \cos^n x \, dx$$

cuando n es un entero positivo par. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \, dx &= \int (\sin^2 x)^2 \, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \, dx, \end{aligned}$$

etc.

Ejemplo 1. Calcule (a) $\int \sin^4 x \, dx$ y (b) $\int \cos^4 x \, dx$.

Solución. (a) Usando la identidad (19) podemos escribir

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \, dx &= \int (\sin^2 x)^2 \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x \, dx \\ &= \int (1 - 2 \cos^2 x + \cos^4 x) d(\cos x) \\ &= -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + k. \end{aligned}$$

(b) Similarmente

$$\int \cos^4 x \, dx = \int (\cos^2 x)^2 \cos x \, dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \, dx,$$

cuyo cálculo final dejamos al estudiante.

El método usado en el ejemplo 1 se puede emplear para

$$\int \sin^n x \, dx \text{ y } \int \cos^n x \, dx$$

cuando n es un entero positivo impar.

Ejemplo 2. Calcule (a) $\int \sec^4 x \, dx$ y (b) $\int \csc^4 x \, dx$.

Solución. (a) Usando la identidad (20) podemos escribir

$$\begin{aligned} \int \sec^4 x \, dx &= \int (\sec^2 x)^2 \sec^2 x \, dx = \int (1 + \tan^2 x)^2 \sec^2 x \, dx \\ &= \int (1 + 2 \tan^2 x + \tan^4 x) d(\tan x) \\ &= \tan x + \frac{2}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + k. \end{aligned}$$

INTEGRALES TRIGONOMETRICAS/345

(b) El cálculo de $\int \csc^4 x \, dx$ se efectúa de manera semejante, notando primero [mediante la identidad (21)] que

$$\int \csc^4 x \, dx = \int (\csc^2 x)^2 \csc^2 x \, dx = \int (1 + \cot^2 x)^2 \csc^2 x \, dx.$$

El método usado en el ejemplo 2 puede usarse para

$$\int \sec^n x \, dx \text{ y } \int \csc^n x \, dx$$

cuando n es un entero positivo par. Si n es un entero positivo impar, el método usado comprende integración por partes (véase el ejercicio 9 de la Sec. 7.2).

Ejemplo 3. Calcule (a) $\int \tan^4 x \, dx$ y (b) $\int \cot^4 x \, dx$.

Solución. (a) De la identidad (20) se sigue que

$$\int \tan^4 x \, dx = \int (\tan^2 x)^2 \, dx = \int (\sec^2 x - 1)^2 \, dx$$

$$= \int (\sec^4 x - 2 \sec^2 x + 1) \, dx$$

$$= \int \sec^2 x (\tan^2 x + 1) \, dx - 2 \int \sec^2 x \, dx + \int dx$$

$$= \frac{1}{3} \tan^3 x + \tan x - 2 \tan x + x + k$$

$$= \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + k.$$

(b) Usamos $\cot^4 x = (\cot^2 x)^2 = (\csc^2 x - 1)^2$, y procedemos como en (a).

El método del ejemplo 3 se puede usar para

$$\int \tan^n x \, dx \text{ y } \int \cot^n x \, dx$$

cuando n es un entero positivo par.

Ejemplo 4. Evalúe (a) $\int \tan^5 x \, dx$ y (b) $\int \cot^5 x \, dx$.

Solución. (a)

$$\int \tan^5 x \, dx = \int \tan^4 x \tan x \, dx = \int (\sec^2 x - 1)^2 \tan x \, dx$$

$$= \int (\sec^4 x \tan x - 2 \sec^2 x \tan x + \tan x) \, dx$$

$$= \int \sec^3 x (\sec x \tan x) \, dx - 2 \int \sec x (\sec x \tan x) \, dx + \int \tan x \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \sec^4 x - \sec^2 x + \ln |\sec x| + k.$$

(b) La solución se sigue de la de (a) si hacemos

$$\cot^5 x = \cot^4 x \cot x = (\csc^2 x - 1)^2 \cot x.$$

El método del ejemplo 4 se puede usar para

$$\int \tan^n x dx \text{ e } \int \cot^n x dx$$

cuando n es un entero positivo impar.

Ejemplo 5. Calcule (a) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$ y (b) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.

Solución. (a) Tenemos

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^2 x dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \sin x dx \\ &= \int -(\cos^2 x - \cos^4 x) d \cos x \\ &= -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x + k. \end{aligned}$$

(b) El procedimiento es el mismo que en (a) excepto que escribimos

$$\begin{aligned} \sin^2 x \cos^3 x &= \sin^2 x \cos^2 x \cos x = \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x \\ &= (\sin^2 x - \sin^4 x) \cos x. \end{aligned}$$

El método del ejemplo 5 se puede usar para

$$\int \sin^n x \cos^m x dx$$

cuando m ó n sean enteros positivos impares.

Ejemplo 6. Calcule $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

Solución. Usemos las identidades (22) y (23) para poner

$$\sin^2 x \cos^4 x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2, \text{ así que}$$

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x) dx \\ &= \frac{1}{8} \int \left[1 + \cos 2x - \frac{1 + \cos 4x}{2} - (1 - \sin^2 2x) \cos 2x \right] dx \\ &= \frac{1}{8} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{6} \sin^3 2x \right) + k \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} + \frac{1}{6} \sin^3 2x \right) + k. \end{aligned}$$

El método del ejemplo 6 se puede usar para

$$\int \sin^n x \cos^m x dx$$

cuando m y n son enteros positivos pares.

Ejemplo 7. Calcule (a) $\int \tan^2 x \sec x dx$ y (b) $\int \tan^2 x \sec^4 x dx$.

Solución. (a) Tenemos

$$\begin{aligned} \int \tan^2 x \sec x dx &= \int \tan^2 x (\tan x \sec x) dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1) (\sec x \tan x) dx \\ &= \frac{1}{3} \sec^3 x - \sec x + k. \end{aligned}$$

(b) Vemos que

$$\begin{aligned} \int \tan^2 x \sec^4 x dx &= \int \tan^2 x \sec^2 x (\sec^2 x) dx \\ &= \int \tan^2 x (\tan^2 x + 1) \sec^2 x dx = \int (\tan^4 x + \tan^2 x) \sec^2 x dx \\ &= \frac{1}{5} \tan^5 x + \frac{1}{3} \tan^3 x + k. \end{aligned}$$

Una integral de la forma

$$\int \tan^n x \sec^m x dx$$

se puede calcular cuando n sea un entero positivo impar, según el método del ejemplo 7(a) y cuando m sea un entero positivo par, según el método del ejemplo 7(b). Si n es par y m es impar podemos poner $\tan^n x \sec^m x$ como una suma de potencias enteras de $\sec^m x$ y usar la integración por partes.

EJERCICIOS

Calcule las integrales indefinidas dadas en los ejercicios del 1 al 28.

- | | |
|------------------------------------|----------------------------------|
| 1. $\int \sin^4 x dx.$ | 2. $\int \cos^4 x dx.$ |
| 3. $\int \sin^3 x dx.$ | 4. $\int \cos^3 x dx.$ |
| 5. $\int \sin^2 3x dx.$ | 6. $\int \sec^4 x dx.$ |
| 7. $\int \csc^4 2x dx.$ | 8. $\int \cot^4 x dx.$ |
| 9. $\int \tan^6 2x dx.$ | 10. $\int \tan^3 3x dx.$ |
| 11. $\int \cot^3 x dx.$ | 12. $\int \sin x \cos x dx.$ |
| 13. $\int \sin^3 x \cos x dx.$ | 14. $\int \sin^3 x \cos^3 x dx.$ |
| 15. $\int \cos^3 2x \sin^3 2x dx.$ | 16. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx.$ |

TEGRACION INDEFINIDA

$$\int \cos^4 3x \sin 3x \, dx.$$

$$\int \tan^4 x \sec^4 x \, dx.$$

$$\int \sec^3 \frac{x}{2} \tan \frac{x}{2} \, dx.$$

$$\int (\sec x + \csc x)^2 \, dx.$$

$$\int \frac{dx}{\cos 3x}.$$

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin x} \, dx.$$

Use las identidades

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A-B) + \sin(A+B)]$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

calcular cada una de las siguientes integrales indefinidas.

$$18. \int \sec^3 \frac{x}{2} \, dx.$$

$$20. \int \tan^3 3x \sec 3x \, dx.$$

$$22. \int \tan^2 x \sec^3 x \, dx.$$

$$24. \int \sqrt{\cos x} \sin^3 x \, dx.$$

$$26. \int \frac{dx}{\sec 2x}$$

$$28. \int \frac{\cos 2x}{\cos x} \, dx.$$

$$29. \int \sin 2x \cos 3x \, dx.$$

$$31. \int \cos 4x \cos 5x \, dx.$$

En cada uno de los ejercicios del 33 al 37 calcule la integral dada en que m y n son enteros positivos.

$$33. \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx, m \neq n.$$

$$35. \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx.$$

$$37. \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx.$$

7.4 Integración por sustitución. Consideremos el problema de hallar el área A limitada por la elipse (Fig. 7.2) cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Del análisis hecho en la Sec. 5.8 vemos que

$$A = 4 \int_0^4 \sqrt{1 - (x^2/16)} \, dx = 3 \int_0^4 \sqrt{16 - x^2} \, dx.$$

Para obtener $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2} \, dx$ directamente por medio del Teorema Fundamental, necesitamos encontrar una antiderivada de $\sqrt{16 - x^2}$. Esto no podemos hacerlo, sin embargo, por ninguno de los métodos que hemos analizado. Intentemos entonces cambiar la integral por otra, en que esto sí sea posible. Reemplacemos

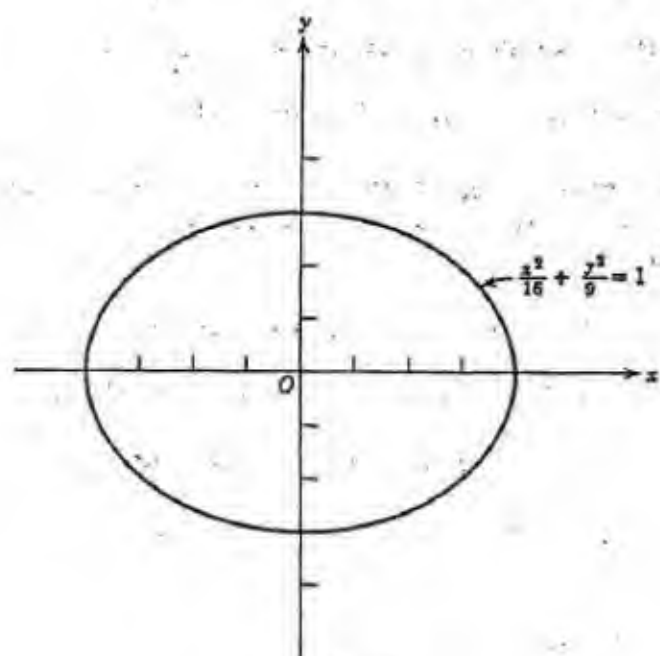


Fig. 7.2

x por $4 \sin u$ y puesto que $d(4 \sin u) = 4 \cos u \, du$, reemplacemos dx por $4 \cos u \, du$. Notaremos que $x = 4 \sin u$ se satisface por $x = 0, u = 0$ y por $x = 4, u = \pi/2$.

Con dichas sustituciones $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2} \, dx$ se transforma en

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{16 - 16 \sin^2 u} \cdot 4 \cos u \, du = 16 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 u} \cos u \, du.$$

Puesto que $\sqrt{\cos^2 u} = |\cos u| = \cos u$ para $u \in [0; \pi/2]$, nos queda la integral

$$16 \int_0^{\pi/2} \cos^2 u \, du,$$

que puede ser fácilmente calculada por medio del Teorema Fundamental y los métodos analizados en la Sec. 7.3. Por tanto, si es cierto que

$$\int_0^4 \sqrt{16 - x^2} \, dx = 16 \int_0^{\pi/2} \cos^2 u \, du, \quad (25)$$

podemos poner

$$A = 3 \int_0^4 \sqrt{16 - x^2} \, dx = 48 \int_0^{\pi/2} \cos^2 u \, du,$$

y encontramos que

$$A = 48 \left[\frac{1}{2} (u + \sin u \cos u) \right]_0^{\pi/2} = 12\pi.$$

INTEGRACION INDEFINIDA

(25) es verdadera diremos que podemos calcular $\int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx$ por sustitución. La validez de (25) se sigue del teorema 1, enunciado a continuación.

Teorema 1. Sea U una función tal que U' sea continua sobre $[\alpha; \beta]$ y sea la cual $U(\alpha) = a$ y $U(\beta) = b$. Sea F una función continua sobre $x \in \{U(u) \in [\alpha; \beta]\}$. Entonces

$$\int_a^b F(x) dx = \int_\alpha^\beta F[U(u)] U'(u) du.$$

Demostración. Sea $H' = F$ y sea G la función compuesta $H[U]$; es decir se sea

$$G(u) = H[U(u)], \quad u \in [\alpha; \beta].$$

Entonces

$$G'(u) = H'[U(u)] U'(u) = F[U(u)] U'(u),$$

sí que

$$\int_a^b F[U(u)] U'(u) du = \int_\alpha^\beta G'(u) du = G(\beta) - G(\alpha). \quad (26)$$

De la definición de G tenemos que

$$G(\beta) - G(\alpha) = H[U(\beta)] - H[U(\alpha)] = H(b) - H(a).$$

Puesto que $H' = F$, sin embargo, se sigue según el Teorema Fundamental que

$$\int_a^b F(x) dx = H(b) - H(a). \quad (27)$$

Si combinamos (26) y (27) obtendremos

$$\int_a^b F(x) dx = \int_\alpha^\beta F[U(u)] U'(u) du$$

como deseábamos demostrar. ■

Ejemplo 1. Calcule $\int_3^8 x \sqrt{x+1} dx$.

Solución. Vemos que si hacemos $x = u^2 - 1$, $u \geq 0$, entonces el radical no aparecerá en la integral transformada. Ya que para $U(u) = u^2 - 1$, $u \geq 0$, tenemos que $U(2) = 3$, $U(3) = 8$ y que U' es continua sobre $[2; 3]$, luego aplicando el teorema 1 y haciendo la sustitución

$$x = u^2 - 1, \quad dx = 2u du, \quad u \geq 0,$$

obtendremos

$$\int_3^8 x \sqrt{x+1} dx = \int_2^3 (u^2 - 1) \sqrt{u^2} (2u) du.$$

INTEGRACION POR SUSTITUCION/351

Puesto que $\sqrt{u^2} = u$ para $u \in [2; 3]$, nos queda que

$$\begin{aligned} \int_3^8 x \sqrt{x+1} dx &= \int_2^3 (u^2 - 1)(u)(2u) du \\ &= 2 \int_2^3 (u^4 - u^2) du = 2 \left[\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \right]_2^3 = \frac{1076}{15}. \end{aligned}$$

Para calcular el área de una región limitada por una elipse calculamos $\int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx$ por medio de la sustitución $x = 4 \sin u$. La anterior es un ejemplo de un tipo de sustituciones conocidas como *sustituciones trigonométricas* que se usan frecuentemente en el cálculo de integrales cuyos integrandos contengan alguna de las expresiones

$$(a^2 - x^2)^{1/2}, \quad (28)$$

$$(x^2 - a^2)^{1/2}, \quad (29)$$

$$(a^2 + x^2)^{1/2}, \quad (30)$$

Si en (28) hacemos $x = a \sin u$ donde $u \in [-\pi/2; \pi/2]$ obtendremos una expresión sin exponentes fraccionarios,

$$(a^2 - a^2 \sin^2 u)^{1/2} = |a| \cos u,$$

y la función U tal que $U(u) = a \sin u$ y $U'(u) = a \cos u$ satisface las condiciones del Teorema 1 sobre intervalos escogidos adecuadamente.

De modo semejante, si hacemos $x = a \sec u$ donde $u \in [-\pi; -\pi/2)$ ó $u \in [0; \pi/2)$, la expresión (29) se convierte en

$$(a^2 - a^2 \sec^2 u)^{1/2} = |a| \tan u,$$

y si hacemos $x = a \tan u$ donde $u \in (-\pi/2; \pi/2)$, la expresión (30) se convierte en

$$(a^2 + a^2 \tan^2 u)^{1/2} = |a| \sec u.$$

La función U tal que $U(u) = a \sec u$ ó $U(u) = a \tan u$ satisface las condiciones del Teorema 1 sobre intervalos escogidos adecuadamente.

Siempre que una de las expresiones (28), (29) ó (30) aparezca en un integrando y el estudiante no vea fácilmente como transformarla para poder usar una de las fórmulas elementales de la Sec. 7.1, debe entonces considerar la posibilidad de usar la sustitución trigonométrica adecuada.

Ejemplo 2. Calcule $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2} dx$.

Solución. Puesto que el integrando contiene la expresión $\sqrt{x^2-4}$, la sustitución que debemos usar es $x = U(u) = 2 \sec u$ para la cual $dx = 2 \sec u \tan u du$. Para hallar los límites de integración de la integral transformada notamos que

$$\text{para } x = 2, \quad 2 \sec u = 2, \quad u = \operatorname{arcsec} 1, \quad \text{ó } u = 0;$$

$$\text{para } x = 4, \quad 2 \sec u = 4, \quad u = \operatorname{arcsec} 2, \quad \text{ó } u = \frac{\pi}{3};$$

Ahora bien, $U'(u) = 2 \sec u \tan u$ es continua sobre $[0; \pi/3]$ y de ahí que según el teorema 1, tendremos

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2} dx &= \int_0^{\pi/3} \frac{\sqrt{4 \sec^2 u - 4}}{4 \sec^2 u} 2 \sec u \tan u du \\ &= \int_0^{\pi/3} \frac{4 \tan^2 u \sec u}{4 \sec^2 u} du \\ &= \int_0^{\pi/3} \frac{\sec^2 u - 1}{\sec u} du = \int_0^{\pi/3} \sec u du - \int_0^{\pi/3} \cos u du. \end{aligned}$$

Del ejemplo 3 de la Sec. 7.1 tenemos que $\int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + k$, de donde, finalmente

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2} dx &= \ln |\sec u + \tan u| \Big|_0^{\pi/3} - \sin u \Big|_0^{\pi/3} \\ &= \ln |2 + \sqrt{3}| - \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3. Calcule $\int_3^{3\sqrt{3}} \frac{dx}{x(x^2+9)^{3/2}}$.

Solución. En este caso, ya que $(x^2+9)^{1/2}$ aparece en el integrando, la sustitución indicada es

$$x = U(u) = 3 \tan u, \quad dx = 3 \sec^2 u du.$$

Para hallar los límites de integración de la integral transformada notamos que

$$\text{para } x = 3, \quad \tan u = 1, \quad u = \arctan 1 = \frac{\pi}{4};$$

$$\text{para } x = 3\sqrt{3}, \quad \tan u = \sqrt{3}, \quad u = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Ahora bien, ya que $U'(u) = 3 \sec^2 u$, U' es continua sobre $[\pi/4; \pi/3]$ y se puede usar el teorema 1 para tener

$$\begin{aligned} \int_3^{3\sqrt{3}} \frac{dx}{x(x^2+9)^{3/2}} &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{3 \sec^2 u du}{3 \tan u (9 \sec^2 u)^{3/2}} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{du}{27 \tan u \sec u} \\ &= \frac{1}{27} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos^2 u}{\sin u} du = \frac{1}{27} \int_{\pi/4}^{\pi/3} (\csc u - \sin u) du. \end{aligned}$$

Según el ejercicio 53 de la Sec. 7.1 $\int \csc u du = \ln |\csc u - \cot u| + k$, de donde

$$\begin{aligned} \int_3^{3\sqrt{3}} \frac{dx}{x(x^2+9)^{3/2}} &= \frac{1}{27} \left[\ln |\csc u - \cot u| + \cos u \right]_{\pi/4}^{\pi/3} \\ &= \frac{1}{27} \left[\ln \left| \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} \right| + \frac{1-\sqrt{2}}{2} \right]. \end{aligned}$$

En el ejemplo 1 de esta sección, mostramos el uso de la sustitución algebraica racionalizante. Este tipo de sustitución se usa para reemplazar un integrando

que tenga expresiones algebraicas irracionales, por un integrando que contenga sólo expresiones algebraicas racionales. No tendría fin una lista de sustituciones racionalizantes y por ello limitaremos nuestro análisis a algunos de los tipos más comunes.

Si el integrando contiene sólo la expresión irracional $(a+bx)^{p/q}$, la sustitución $a+bx = u^q$ ó $x = \frac{u^q - a}{b}$; racionalizará el integrando.

Ejemplo 4. Calcule $\int_{-2}^{1/7} \frac{x dx}{(2-7x)^{3/2}}$.

Solución. En este caso hacemos

$$2-7x = u^2, \quad \text{ó} \quad x = \frac{2-u^2}{7}; \quad dx = -\frac{2}{7} u du.$$

Notamos que

$$x = -2 \quad \text{cuando} \quad u = 4, \quad \text{y} \quad x = 1/7 \quad \text{cuando} \quad u = 1$$

de donde, según el teorema 1,

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{1/7} \frac{x dx}{(2-7x)^{3/2}} &= \int_4^1 \frac{\left(\frac{2-u^2}{7}\right) \left(-\frac{2}{7} u\right) du}{u^3} = -\frac{2}{49} \int_4^1 \frac{2u-u^3}{u^3} du \\ &= \frac{2}{49} \int_1^4 \left(\frac{2}{u^2} - 1\right) du = \frac{2}{49} \left[-\frac{2}{u} - u\right]_1^4 = -\frac{3}{49}. \end{aligned}$$

Si el integrando contiene varias potencias fraccionarias de la expresión $ax+b$, la sustitución $ax+b = u^q$ ó $x = \frac{u^q - b}{a}$ en donde q que es el mínimo común denominador de los exponentes fraccionarios, racionalizará el integrando.

Ejemplo 5. Calcule $\int_{3/2}^2 \frac{\sqrt{2x-3}}{(2x-3)^{1/3} + 1} dx$.

Solución. El mínimo común denominador de los exponentes fraccionarios $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ es 6. Hagamos

$$2x-3 = u^6, \quad \text{ó} \quad x = \frac{u^6+3}{2}, \quad dx = 3u^5 du.$$

Además, cuando $x = 3/2$, $u = 0$ y cuando $x = 2$, $u = 1$, de manera que

$$\int_{3/2}^2 \frac{\sqrt{2x-3}}{(2x-3)^{1/3} + 1} dx = \int_0^1 \frac{u^3}{u^2+1} 3u^5 du = 3 \int_0^1 \frac{u^8}{u^2+1} du.$$

Mediante la división obtendremos

$$\frac{u^8}{u^2+1} = u^6 - u^4 + u^2 - 1 + \frac{1}{u^2+1},$$

así es que

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 \frac{\sqrt{2x-3}}{(2x-3)^{1/2}+1} dx &= 3 \int_0^1 \left(u^6 - u^4 + u^2 - 1 + \frac{1}{u^2+1} \right) du \\ &= 3 \left[\frac{u^7}{7} - \frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} - u + \arctan u \right]_0^1 \\ &= 3 \left(-\frac{39}{70} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{105\pi - 234}{140}.\end{aligned}$$

Cuando el integrando sea el cociente de dos polinomios y el grado del numerador sea mayor o igual que el grado del denominador, procederemos como con el integrando $\frac{u^8}{u^2+1}$ del ejemplo 5. Nótese que hemos usado la división para escribir $\frac{u^8}{u^2+1}$ como la suma de un polinomio y una fracción racional cuyo numerador es de grado menor que el denominador.

En esta sección hemos usado el método de sustitución sólo para calcular integrales definidas. El método es aplicable también al cálculo de integrales indefinidas. Sin embargo, si se usa la sustitución $x = U(u)$ en una integración indefinida, se han de agregar más restricciones a la función U que las necesarias para el teorema 1. Por ejemplo, supóngase que deseamos calcular $\int \sqrt{16-x^2} dx$; es decir que deseamos encontrar una antiderivada de $\sqrt{16-x^2}$. Recordemos el procedi-

miento empleado para obtener $\int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx$. En él la sustitución

$$x = U(u) = 4 \sin u, \quad dx = 4 \cos u du,$$

produce la integral

$$\int 4 \sqrt{\cos^2 u} 4 \cos u du,$$

o sea $16 \int \cos^3 u du$, si $\cos u$ no es negativo. Ahora bien

$$16 \int \cos^3 u du = 8(u + \sin u \cos u) + k, \quad (31)$$

no es, ciertamente, una integral indefinida de $\sqrt{16-x^2}$. Sin embargo notemos que si

$$x = 4 \sin u \quad \text{y} \quad u \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

entonces

$$\sin u = \frac{x}{4}; \quad \cos u = \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}}; \quad u = \arcsen \frac{x}{4},$$

y la expresión del lado derecho de (31) se puede escribir

$$8 \left(\arcsen \frac{x}{4} + \frac{x}{4} \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} \right) + k = 8 \left(\arcsen \frac{x}{4} + \frac{x}{16} \sqrt{16-x^2} \right) + k.$$

Llegamos a tener que preguntarnos si

$$G(x) = 8 \left(\arcsen \frac{x}{4} + \frac{x}{16} \sqrt{16-x^2} \right) \quad (32)$$

es una antiderivada de $\sqrt{16-x^2}$. Hallamos que para $x \in (-4; 4)$,

$$\begin{aligned}G'(x) &= 8 \left[\frac{1/4}{\sqrt{1-(x^2/16)}} + \frac{1}{16} \sqrt{16-x^2} - \frac{x^2}{16\sqrt{16-x^2}} \right] \\ &= 8 \left(\frac{1}{\sqrt{16-x^2}} + \frac{\sqrt{16-x^2}}{16} - \frac{x^2}{16\sqrt{16-x^2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{16-x^2}{\sqrt{16-x^2}} + \sqrt{16-x^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{16-x^2+16-x^2}{\sqrt{16-x^2}} \right) \\ &= \frac{16-x^2}{\sqrt{16-x^2}}.\end{aligned}$$

Por tanto, para $x \in (-4; 4)$, $G'(x) = \sqrt{16-x^2}$, y

$$\int \sqrt{16-x^2} dx = 8 \left(\arcsen \frac{x}{4} + \frac{x}{16} \sqrt{16-x^2} \right) + k, \quad x \in (-4; 4). \quad (33)$$

Obsérvese que este resultado no es válido para $x = 4$ ó para $x = -4$, ya que para estos valores el segundo miembro de (32) no tiene derivada.

En este ejemplo, la función U para la que $U(u) = 4 \sin u$, debió tener una inversa U^* que fuera una función, para que pasáramos de (31) a (32), y para que existiera la derivada de (32), U^* debió de ser derivable. Por tanto, es de esperarse que para calcular $\int F(x) dx$ sustituyendo x por $U(u)$, no basta que U' sea continua sino que además U^* , la inversa de U , ha de ser función y ha de existir $(U^*)'$ (o lo que es equivalente, $U'(u)$ ha de ser distinta de cero). La base de este método de sustitución para obtener integrales indefinidas se da a continuación en el teorema 2.

Teorema 2. Sea U una función cuya inversa U^* sea una función sobre S y cuya derivada U' sea continua y tal que $U'(u) \neq 0$ sobre S . Sea F una función continua cuyo dominio contenga el rango de U . Entonces $\int F(x) dx$ se puede obtener para x elemento del rango de U , calculando

$$\int F[U(u)] dU(u) = \int F[U(u)] U'(u) du,$$

y reemplazando u por $U^*(x)$ en el resultado; esto es:

$$\int F(x) dx = \int F[U(u)] dU(u) \Big|_{u=U^*(x)}$$

en donde el simbolismo de la derecha significa que calculemos $\int F[U(u)] dU(u)$ y que en el resultado reemplacemos u por $U^*(x)$.

Demostración. Sea

$$G(x) = \int F(x) dx \quad (34)$$

$$y \quad H(u) = \int F[U(u)] U'(u) du. \quad (35)$$

Deseamos demostrar que

$$G(x) = H[U^*(x)] + k.$$

Si $u = U^*(x)$, entonces

$$D_x H(u) = H'(u) D_x u.$$

Sin embargo según (35) $H'(u) = F[U(u)] U'(u)$,

de modo que $D_x H(u) = F[U(u)] U'(u) D_x u$.

Dado que $x = U(u)$ y $u = U^*(x)$, en donde U^* es la inversa de U y $U'(u) \neq 0$ para $u \in S$, tendremos que según el teorema 15 de la Sec. 4.4,

$$D_x u D_u x = 1.$$

De aquí que

$$D_x H(u) = F[U(u)]$$

y

$$D_x H[U^*(x)] = F[U[U^*(x)]] = F(x).$$

De (34) tenemos que

$$D_x G(x) = F(x),$$

y de aquí que según el teorema 20 de la Sec. 3.11

$$G(x) = H[U^*(x)] + k. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 6. Calcule $\int x\sqrt{x+1} dx$ e indique el conjunto sobre el que sea válido el resultado.

Solución. Podemos obtener una integral transformada con integrando racional mediante la sustitución

$$x = U(u) = u^2 - 1, \quad dx = 2u du.$$

Para usar el teorema 2 debemos restringir el dominio de U de modo que U sea biunívoca y $U'(u) \neq 0$. Luego, tomemos $u \in (0; +\infty)$; entonces $x \in (-1; +\infty)$, $u = U^*(x) = \sqrt{x+1}$ y tendremos que

$$\int x\sqrt{x+1} dx = \int (u^2 - 1)(u)(2u) du \Big|_{u=\sqrt{x+1}}.$$

Ahora bien

$$\int (u^2 - 1)(u)(2u) du = \int (2u^4 - 2u^2) du = \frac{2}{5}u^5 - \frac{2}{3}u^3 + k,$$

de modo que

$$\int x\sqrt{x+1} dx = \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + k, \quad x \in (-1; \infty).$$

Al usar sustituciones trigonométricas para obtener integrales indefinidas por

el método del teorema 2 debemos hacer las siguientes restricciones en el dominio de la función comprendida:

Para usar

$$x = a \operatorname{sen} u$$

debemos restringir x y u de manera que

$$u \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \quad x \in (-a; a).$$

Para usar

$$x = a \sec u$$

debemos restringir u y x de manera que

$$u \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \quad x \in (-\infty; -a) \cup (a; +\infty).$$

Para usar

$$x = a \tan u$$

debemos restringir u y x de manera que

$$u \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \quad x \in \operatorname{Re}.$$

Ejemplo 7. Use el teorema 2 para calcular $\int \sqrt{1-x^2} dx$ e indique el conjunto sobre el cual es válido el resultado.

Solución. Para $u \in (-\pi/2; \pi/2)$, $x = U(u) = \operatorname{sen} u$ satisface las condiciones del teorema 2 en que $dx = \cos u du$, $u = U^*(x) = \operatorname{arcsen} x$ y $x \in (-1; 1)$. Por tanto, tenemos que

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u} \cos u du \Big|_{u=\operatorname{arcsen} x}, \quad x \in (-1; 1).$$

Ahora bien $\int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u} \cos u du = \int \cos u \cos u du$ para $u \in (-\pi/2; \pi/2)$ e $\int \cos^2 u du = \frac{1}{2}(u + \operatorname{sen} u \cos u) + k$. Ya que $\cos u = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u}$ para $u \in (-\pi/2; \pi/2)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \frac{1}{2}(u + \operatorname{sen} u \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u}) \Big|_{u=\operatorname{arcsen} x} + k \\ &= \frac{1}{2}(\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2}) + k, \quad x \in (-1; 1). \end{aligned}$$

Ejemplo 8. Calcule $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$ e indique el conjunto sobre el que vale el resultado.

Solución. El integrando contiene la expresión $(x^2-4)^{1/2}$ y la sustitución

$$x = 2 \sec u, \quad u \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

eliminará el exponente fraccionario. Para esta sustitución

$$dx = 2 \sec u \tan u \, du \quad \text{y} \quad u = \operatorname{arccsc} \frac{x}{2}$$

para $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; por tanto,

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} = \int \frac{2 \sec u \tan u \, du}{4 \sec^2 u \sqrt{4(\sec^2 u - 1)}} \Big|_{u=\operatorname{arccsc} \frac{x}{2}} \quad x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty).$$

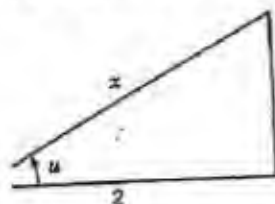


Fig. 7.3

Ahora bien

$$\int \frac{2 \sec u \tan u \, du}{4 \sec^2 u \cdot 2 \tan u} = \frac{1}{4} \int \cos u \, du = \frac{1}{4} \sin u + k$$

Para $u = \operatorname{arccsc} \frac{x}{2}$; $u \in (-\pi; -\pi/2) \cup (0; \pi/2)$ tenemos que

$$\sin u = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x}.$$

[La Figura 7.3 que muestra $u \in (0; \pi/2)$, puede ser útil para obtener este resultado]. Así,

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} = \frac{1}{4} \sin u \Big|_{u=\operatorname{arccsc} \frac{x}{2}} + k = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} + k, \quad x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty).$$

Ejemplo 9. Calcule $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 9}}$ e indique el conjunto sobre el que es válido el resultado.

Solución. En este ejemplo la sustitución indicada es

$$x = 3 \tan u, \quad u \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right),$$

pero ya que en la integral dada x no puede ser cero, debemos tomar

$$x = 3 \tan u, \quad u \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Para esta sustitución

$$dx = 3 \sec^2 u \, du \quad \text{y} \quad u = \arctan \frac{x}{3}; \quad x \neq 0,$$

y según el teorema 2

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 9}} &= \int \frac{3 \sec^2 u \, du}{3 \tan u \sqrt{9(\tan^2 u + 1)}} \Big|_{u=\arctan \frac{x}{3}} = \frac{1}{3} \int \csc u \, du \Big|_{u=\arctan \frac{x}{3}} \\ &= \frac{1}{3} \ln |\csc u - \cot u| \Big|_{u=\arctan \frac{x}{3}} + k. \end{aligned}$$



Para reemplazar u por $\arctan \frac{x}{3}$ expresaremos $\csc u$ y $\cot u$ en términos de x .

Puesto que $\tan u = \frac{x}{3}$; tenemos que $\cot u = \frac{3}{x}$ y $\csc u = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x}$: [Para obtener este resultado es conveniente usar la Fig. 7.4 que muestra a $u \in (0; \pi/2)$]. Por tanto,

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 9}} = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} - \frac{3}{x} \right| + k, \quad x \neq 0.$$

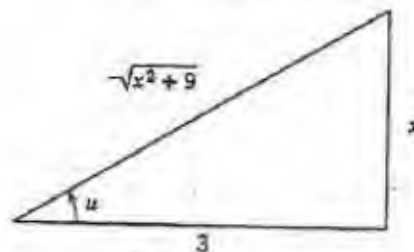


Fig. 7.4

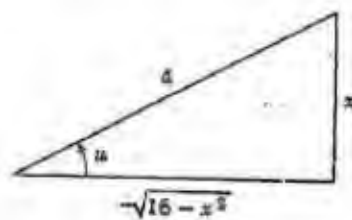


Fig. 7.5

Ejemplo 10. Calcule $\int \frac{x^2 dx}{(16 - x^2)^{3/2}}$ e indique el conjunto sobre el cual es válido el resultado.

Solución. Usemos la sustitución

$$x = 4 \sin u, \quad u \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right),$$

y la integral transformada será

$$\begin{aligned} \int \frac{16 \sin^2 u \cdot 4 \cos u \, du}{(16 - 16 \sin^2 u)^{3/2}} &= \int \frac{\sin^2 u \cos u \, du}{\cos^3 u} \\ &= \int \tan^2 u \, du = \int (\sec^2 u - 1) \, du = \tan u - u + k. \end{aligned}$$

Ahora bien, para $x \in (-4; 4)$, $u = \arcsin \frac{x}{4}$; y de la Fig. 7.5 vemos que

$\tan u = \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}$; de modo que

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{(16 - x^2)^{3/2}} &= \tan u - u \Big|_{u=\arcsin \frac{x}{4}} + k = \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}} \\ &\quad - \arcsin \frac{x}{4} + k, \quad x \in (-4; 4). \end{aligned}$$

Con frecuencia se puede usar una sustitución trigonométrica cuando el integrando contiene la expresión $(ax^2 + bx + c)^{1/2}$. Por ejemplo, si $(x^2 + 2x + 5)^{1/2}$ aparece en el integrando, podemos escribir

$$(x^2 + 2x + 5)^{1/2} = (x^2 + 2x + 1 + 4)^{1/2} = [(x + 1)^2 + 4]^{1/2},$$

y usar la sustitución

$$x + 1 = 2 \tan u, \quad u \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Ejemplo 11. Calcule $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{21 + 4x - x^2}}$ e indique el conjunto sobre el que es válido el resultado.

Solución. En este ejemplo podemos poner

$$\sqrt{21 + 4x - x^2} = \sqrt{21 - (x^2 - 4x + 4) + 4} = \sqrt{25 - (x - 2)^2}.$$

Si hacemos la sustitución

$$x - 2 = 5 \sin u, \quad u \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right),$$

para la cual

$$x = 5 \sin u + 2, \quad dx = 5 \cos u \, du, \quad u = \arcsen \frac{x-2}{5}; \quad -5 < x - 2 < 5,$$

la integral transformada será

$$\int \frac{25 \sin^2 u + 20 \sin u + 4}{\sqrt{25 - 25 \sin^2 u}} \cdot 5 \cos u \, du = \int (25 \sin^2 u + 20 \sin u + 4) \, du.$$

Según el teorema 2 tendremos que

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{21 + 4x - x^2}} = \int (25 \sin^2 u + 20 \sin u + 4) \, du \Big|_{\arcsen \frac{x-2}{5}}, \quad -5 < x - 2 < 5.$$

Efectuamos la integración y teniendo en cuenta que

$$\sin u = \frac{x-2}{5} \quad \text{y} \quad \cos u = \sqrt{1 - \left(\frac{x-2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{21 + 4x - x^2}}{5},$$

tendremos que

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{21 + 4x - x^2}} &= \frac{25}{2} \left(\arcsen \frac{x-2}{5} - \frac{x-2}{5} \cdot \frac{\sqrt{21 + 4x - x^2}}{5} \right) \\ &\quad - 4\sqrt{21 + 4x - x^2} + 4 \arcsen \frac{x-2}{5} + k \\ &= \frac{33}{2} \arcsen \frac{x-2}{5} - \sqrt{21 + 4x - x^2} \left(\frac{x+98}{25} \right) + k. \end{aligned}$$

Este resultado es válido para $-5 < x - 2 < 5$, es decir para $x \in (-3; 7)$.

EJERCICIOS

1. Calcule el área de la región limitada por la elipse cuya ecuación es $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$.

2. Demuestre que el área de la región limitada por un círculo de radio a es πa^2 .

3. Encuentre el área de la región limitada por las curvas cuyas ecuaciones son $16x^2 - 9y^2 = 144$ y $x = 5$.

4. Calcule la fuerza ejercida sobre una compuerta de un dique de forma circular con radio de 4 mts. si el nivel del agua queda a 6 mts. sobre la parte superior de la compuerta.

5. Calcule la fuerza ejercida sobre la compuerta del ejercicio 4 si el nivel de agua queda 2 mts. abajo de la parte superior de la compuerta.

6. Un tanque con forma de cilindro circular recto tiene su eje horizontalmente. Si el radio de la base del cilindro es de 5 mts. y la longitud del cilindro es de 20 mts. y si el tanque está lleno de un líquido cuya densidad es de 800 grs./litro, calcule el trabajo requerido para vaciar el tanque bombeando el líquido hasta una altura de 10 mts. sobre la parte superior del tanque.

En cada uno de los ejercicios del 7 al 10 calcule la integral definida dada

7. $\int_{-3}^0 x^2 \sqrt{9 - x^2} \, dx.$

8. $\int_0^1 \sqrt{3 + x^2} \, dx.$

9. $\int_{\sqrt{5}}^1 \frac{dx}{\sqrt{5} x^2 \sqrt{x^2 - 4}}.$

10. $\int_3^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}}.$

En cada uno de los ejercicios del 11 al 23 calcule la integral indefinida e indique el conjunto de valores sobre los cuales es válido el resultado.

11. $\int x \sqrt{2 - 5x} \, dx.$

12. $\int \frac{x \, dx}{(2x - 1)^{3/2}}.$

13. $\int \frac{dx}{x - x^{1/2}}.$

14. $\int \frac{2 - (x + 3)^{3/4}}{1 - (x + 3)^{1/2}} \, dx.$

15. $\int \frac{dx}{x^{2/3} + x^{1/2}}.$

16. $\int \frac{dx}{(25 + x^2)^{3/2}}.$

17. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 9}}.$

18. $\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{3 - x^2}}.$

19. $\int \frac{dx}{(x^2 - 16)^{3/2}}.$

20. $\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}} \, dx.$

21. $\int \sqrt{2ax - x^2} \, dx, a > 0.$

22. $\int (2 + x^2)^{3/2} \, dx.$

23. $\int \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{(x^2 + 1)^{3/2}} \, dx.$

24. Calcule $\int \frac{dx}{x \sqrt{2x^2 + 3x - 2}}$: Sugerión: Use la sustitución $x = 1/u$.

25. Calcule $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 9}}$: Sugerión: Use la sustitución $x = 3/u$.

26. Calcule $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$ mediante la sustitución $x = 2 \arctan u$ para la

cual $u = \tan \frac{x}{2}$; $dx = \frac{2 du}{1+u^2}$; $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$; $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$.

27. Use la sustitución sugerida en el ejercicio 26 para calcular

$$\int \frac{dx}{1+2\sin 2x}.$$

7.5 Integrandos racionales. En esta sección usaremos algunos resultados del álgebra para demostrar que si $F(x)$ se puede expresar como el cociente de dos polinomios, entonces es siempre posible expresar $\int F(x) dx = G(x) + k$, en donde la función G es una suma finita en la que sólo aparecerán funciones algebraicas, logarítmicas y trigonométricas inversas. Enunciaremos los siguientes teoremas, sin demostración.*

Teorema 3. Si $U(x)$ y $V(x)$ son polinomios,† entonces

$$\frac{U(x)}{V(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{V(x)}$$

en donde $Q(x)$ y $R(x)$ son polinomios en que el grado de $R(x)$ es menor que el de $V(x)$.

Teorema 4. Si $V(x)$ es un polinomio, entonces $V(x)$ se puede expresar como un producto, cada uno de cuyos factores es lineal, de la forma $ax + b$ ó es cuadrático, de la forma $ax^2 + bx + c$, en que $b^2 - 4ac < 0$.

Teorema 5. Si $R(x)$ y $V(x)$ son polinomios en que el grado de $R(x)$ es menor que el de $V(x)$, entonces $\frac{R(x)}{V(x)}$ se puede representar como una suma $S(x)$ de expresiones de la forma

$$\frac{A}{ax+b}, \frac{A}{(ax+b)^n}, \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}, \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

Al aplicar el teorema 5 encontramos cuatro casos.

Caso (i). Para cada factor lineal $ax + b$ que aparezca sólo una vez en $V(x)$,

habrá un término de la forma $\frac{A}{ax+b}$ en la suma $S(x)$.

Caso (ii). Para cada factor lineal $ax + b$ que aparezca r veces en $V(x)$ habrá una suma de r términos

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \dots + \frac{A_r}{(ax+b)^r}$$

* Se pueden encontrar demostraciones en *College Algebra*, de J. B. Rosenbach y E. A. Whitman, 3a. Edición, Ginn and Company, Boston 1949, Capítulo XIX.

† Recuérdese que usamos la palabra polinomio para describir una expresión de la forma

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

en donde n es un entero no negativo $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ son números reales.

en la suma $S(x)$.

Caso (iii). Para cada factor cuadrático $ax^2 + bx + c$ ($b^2 - 4ac < 0$) que aparezca sólo una vez en $V(x)$ habrá un término de la forma $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ en la suma $S(x)$.

Caso (iv). Para cada factor cuadrático $ax^2 + bx + c$ ($b^2 - 4ac < 0$) que aparezca r veces en $V(x)$ habrá una suma de r términos

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \frac{A_3x+B_3}{(ax^2+bx+c)^3} + \dots + \frac{A_rx+B_r}{(ax^2+bx+c)^r}$$

en la suma $S(x)$.

De los teoremas 3 y 5 se sigue que el cálculo de $\int \frac{U(x)}{V(x)} dx$, donde $U(x)$ y $V(x)$ son polinomios, se puede lograr a través de integrales de la forma

$$\int Q(x) dx, \int \frac{A}{ax+b} dx, \int \frac{A}{(ax+b)^r} dx, \\ \int \frac{Ax+B}{cx^2+dx+e} dx, \int \frac{Ax+B}{(cx^2+dx+e)^r} dx,$$

en que $Q(x)$ es un polinomio y $d^2 - 4ce < 0$.

Ejemplo 1. Calcule $\int \frac{3x^2+6}{x^3+x^2-2x} dx$.

Solución. Factorizamos el denominador del integrando y obtenemos $x^3 + x^2 - 2x = x(x-1)(x+2)$. Puesto que todos los factores son lineales y cada uno aparece sólo una vez, se aplicará el caso (i) y tendremos que

$$\frac{3x^2+6}{x^3+x^2-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}.$$

Para determinar A , B y C escribimos

$$\frac{3x^2+6}{x^3+x^2-2x} = \frac{A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)} \\ = \frac{(A+B+C)x^2 + (A+2B-C)x - 2A}{x(x-1)(x+2)}$$

igualando los numeradores tenemos

$$3x^2+6 = (A+B+C)x^2 + (A+2B-C)x - 2A.$$

En problemas de este tipo usamos el hecho de que si $H(x)$ y $K(x)$ son dos polinomios tales que $H(x) = K(x)$ para $x \in \mathbb{R}$, entonces los coeficientes de potencias iguales de x en los dos polinomios deben ser iguales. Aplicando ese criterio aquí, tendremos que

$$A+B+C=3, \quad A+2B-C=0, \quad -2A=6.$$

Al resolver este sistema de ecuaciones hallamos que

$$A = -3, \quad B = 3, \quad C = 3.$$

Luego,

$$\frac{3x^2 + 6}{x^3 + x^2 - 2x} = -\frac{3}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{3}{x+2}.$$

El cálculo de la integral depende de esta identidad. El estudiante debe comprobarla al igual que otras identidades algebraicas similares que aparezcan en los ejemplos y ejercicios que siguen. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 6}{x^3 + x^2 - 2x} dx &= \int \left(-\frac{3}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{3}{x+2} \right) dx \\ &= -3 \ln |x| + 3 \ln |x-1| + 3 \ln |x+2| + k \\ &= 3 \ln \left| \frac{(x-1)(x+2)}{x} \right| + k. \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Calcule $\int \frac{5x^2 + 12x + 1}{x^3 + 3x^2 - 4} dx$.

Solución. Notemos que 1 es una solución de $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$, de modo que $x-1$ es un factor de $x^3 + 3x^2 - 4$. Mediante la división hallamos que

$$x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x^2 + 4x + 4) = (x-1)(x+2)^2.$$

Aquí se nos presenta el Caso (i) y el Caso (ii), por lo tanto

$$\frac{5x^2 + 12x + 1}{x^3 + 3x^2 - 4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2};$$

$$\frac{5x^2 + 12x + 1}{x^3 + 3x^2 - 4} = \frac{A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1)}{(x-1)(x+2)^2}.$$

Igualando los numeradores obtenemos

$$5x^2 + 12x + 1 = (A+B)x^2 + (4A+B+C)x + 4A - 2B - C,$$

de modo que

$$A + B = 5, \quad 4A + B + C = 12, \quad 4A - 2B - C = 1.$$

Resolviendo este conjunto de ecuaciones tenemos que

$$A = 2, \quad B = 3, \quad C = 1.$$

Así pues

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2 + 12x + 1}{x^3 + 3x^2 - 4} dx &= \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{3}{x+2} dx + \int \frac{1}{(x+2)^2} dx \\ &= 2 \ln |x-1| + 3 \ln |x+2| - \frac{1}{x+2} + k \\ &= \ln [(x-1)^2 |x+2|^3] - \frac{1}{x+2} + k. \end{aligned}$$

Ejemplo 3. Calcule $\int \frac{x^3 - x^2 + 3x^2 - 10x + 8}{x^3 - x^2 - 4} dx$.

Solución. Notemos que en el integrando el grado del numerador es mayor que el del denominador. Antes de usar el teorema 5 hemos de dividir y obtendremos

$$\int \frac{x^3 - x^2 + 3x^2 - 10x + 8}{x^3 - x^2 - 4} dx = \int x dx + \int \frac{3x^2 - 6x + 8}{x^3 - x^2 - 4} dx. \quad (36)$$

Para calcular la segunda integral de la derecha de (36), buscamos los factores de $x^3 - x^2 - 4$ para poder usar el teorema 5. Ahora bien $x^3 - x^2 - 4 = (x-2)(x^2 + x + 2)$, de manera que usando el Caso (i) y el Caso (iii), buscamos números A , B y C tales que

$$\frac{3x^2 - 6x + 8}{x^3 - x^2 - 4} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+2}.$$

$$\frac{3x^2 - 6x + 8}{x^3 - x^2 - 4} = \frac{A(x^2 + x + 2) + (Bx + C)(x-2)}{(x-2)(x^2 + x + 2)}$$

Igualando los coeficientes de potencias iguales de los numeradores, tendremos que

$$A + B = 3, \quad A - 2B + C = -6, \quad 2A - 2C = 8,$$

de lo cual se sigue que

$$A = 1, \quad B = 2, \quad C = -3.$$

Por tanto,

$$\int \frac{3x^2 - 6x + 8}{x^3 - x^2 - 4} dx = \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{2x-3}{x^2+x+2} dx. \quad (37)$$

Para evaluar $\int \frac{2x-3}{x^2+x+2} dx$ escribimos

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-3}{x^2+x+2} dx &= \int \frac{2x+1-4}{x^2+x+2} dx = \int \frac{2x+1}{x^2+x+2} dx - \int \frac{4dx}{x^2+x+2} \\ &= \int \frac{d(x^2+x+2)}{x^2+x+2} - 4 \int \frac{dx}{\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right) + \frac{7}{4}} \\ &= \ln(x^2+x+2) - 4 \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} \end{aligned}$$

Usando la sustitución $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2} \tan u$, y $dx = \frac{\sqrt{7}}{2} \sec^2 u du$, hallamos que

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} &= \int \frac{\frac{\sqrt{7}}{2} \sec^2 u du}{\frac{7}{4} (\tan^2 u + 1)} \bigg|_{u = \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{7}}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{7}} + k_1. \end{aligned}$$

Por tanto, (37) se convierte en

$$\int \frac{3x^2 - 6x + 8}{x^3 - x^2 - 4} dx = \ln|x-2| + \ln(x^2 + x + 2) - 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{7}} + k_2$$

y sustituyendo en (36) tendremos que

$$\int \frac{x^4 - x^3 + 3x^2 - 10x + 8}{x^3 - x^2 - 4} dx = \frac{x^2}{2} + \ln[|x-2|(x^2 + x + 2)] - \frac{8}{\sqrt{7}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{7}} + k.$$

Ejemplo 4. Calcule $\int \frac{2x^4 - 7x^3 + 28x^2 - 26x + 41}{(x+3)(x^2-2x+4)^2} dx$.

Solución. Puesto que comprende los Casos (i) y (iv), hemos de buscar números A, B_1, C_1, B_2 y C_2 tales que

$$\frac{2x^4 - 7x^3 + 28x^2 - 26x + 41}{(x+3)(x^2-2x+4)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B_1x + C_1}{x^2-2x+4} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2-2x+4)^2}$$

o

$$\begin{aligned} 2x^4 - 7x^3 + 28x^2 - 26x + 41 &= A(x^2 - 2x + 4)^2 + (B_1x + C_1)(x+3)(x^2 - 2x + 4) + (B_2x + C_2)(x+3) \\ &= (A + B_1)x^4 + (-4A + B_1 + C_1)x^3 + (12A - 2B_1 + C_1 + B_2)x^2 \\ &\quad + (-16A + 12B_1 - 2C_1 + 3B_2 + C_2)x + 16A + 12C_1 + 3C_2. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} A + B_1 &= 2, & -4A + B_1 + C_1 &= -7, & 12A - 2B_1 + C_1 + B_2 &= 28, \\ -16A + 12B_1 - 2C_1 + 3B_2 + C_2 &= -26, & 16A + 12C_1 + 3C_2 &= 41. \end{aligned}$$

Al resolver este sistema de ecuaciones hallamos que

$$A = 2, \quad B_1 = 0, \quad C_1 = 1, \quad B_2 = 3, \quad C_2 = -1,$$

y podemos escribir

$$\int \frac{2x^4 - 7x^3 + 28x^2 - 26x + 41}{(x+3)(x^2-2x+4)^2} dx = \int \frac{2 dx}{x+3} + \int \frac{dx}{x^2-2x+4} + \int \frac{(3x-1) dx}{(x^2-2x+4)^2}. \quad (38)$$

Para calcular $\int \frac{dx}{x^2-2x+4}$ escribimos

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+4} = \int \frac{dx}{(x-1)^2+3}.$$

Haciendo ahora $x-1 = \sqrt{3} \tan u$, hallamos que

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+4} = \int \frac{\sqrt{3} \sec^2 u du}{3(\tan^2 u + 1)} \Big|_{u=\arctan \frac{x-1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x-1}{\sqrt{3}} + k_1. \quad (39)$$

Para calcular $\int \frac{(3x-1) dx}{(x^2-2x+4)^2}$ escribimos

$$\begin{aligned} \int \frac{(3x-1) dx}{(x^2-2x+4)^2} &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x-2) + 2}{(x^2-2x+4)^2} dx \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2x-2}{(x^2-2x+4)^2} dx + 2 \int \frac{dx}{(x^2-2x+4)^2} \\ &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2-2x+4} + 2 \int \frac{dx}{(x^2-2x+4)^2} \\ &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2-2x+4} + 2 \int \frac{dx}{[(x-1)^2+3]^2}. \end{aligned}$$

Haciendo $x-1 = \sqrt{3} \tan u$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{(3x-1) dx}{(x^2-2x+4)^2} &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2-2x+4} + 2 \int \frac{\sqrt{3} \sec^2 u du}{9 \sec^4 u} \Big|_{u=\arctan \frac{x-1}{\sqrt{3}}} \\ &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2-2x+4} + \frac{1}{3\sqrt{3}} (u + \sen u \cos u) \Big|_{u=\arctan \frac{x-1}{\sqrt{3}}} \\ &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2-2x+4} \\ &\quad + \frac{1}{3\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{x-1}{\sqrt{3}} + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+4}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-2x+4}} \right) + k_2. \end{aligned} \quad (40)$$

Haciendo sustituciones en (38) a partir de (39) y (40) tenemos que

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^4 - 7x^3 + 28x^2 - 26x + 41}{(x+3)(x^2-2x+4)^2} &= 2 \ln|x+3| + \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{x-1}{\sqrt{3}} \\ &\quad - \frac{3}{2(x^2-2x+4)} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x-1}{x^2-2x+4} + k. \end{aligned}$$

En resumen, para calcular $\int \frac{U(x)}{V(x)} dx$ en que $U(x)$ y $V(x)$ son polinomios en los que el grado de $U(x)$ es menor que el de $V(x)$, factorizamos $V(x)$ de acuerdo con el teorema 4 y en seguida usamos el teorema 5 para transformar $\int \frac{U(x)}{V(x)} dx$ en una suma de integrales que podamos obtener según los métodos de este capítulo; para calcular $\int \frac{U(x)}{V(x)} dx$ cuando el grado de $U(x)$ es mayor o igual que el de $V(x)$, aplicamos $\frac{U(x)}{V(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{V(x)}$; de acuerdo con el teorema 3, y usamos el método descrito para obtener $\int \frac{R(x)}{V(x)} dx$ en que el grado de $R(x)$ es menor que el de $V(x)$.

EJERCICIOS

Calcule cada una de las integrales indefinidas.

1. $\int \frac{5x+3}{x^2+4x+4} dx.$
2. $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx.$
3. $\int \frac{2x^2-1}{x^3-x} dx.$
4. $\int \frac{dx}{x^3+5x^2+4x}.$
5. $\int \frac{2x+1}{x^3-7x+6} dx.$
6. $\int \frac{x^3}{x^3-9} dx.$
7. $\int \frac{dx}{x(a^2-x^2)}; a > 0.$
8. $\int \frac{dx}{(x^2-4)(x^2-9)}.$
9. $\int \frac{dx}{x^3+x^2}.$
10. $\int \frac{x^2+6x-1}{x^3-7x^2+15x-9} dx$
11. $\int \frac{x^2-3x-8}{x^3-2x+1} dx.$
12. $\int \frac{x dx}{(1-x^2)^2}.$
13. $\int \frac{x^2+1}{(x+2)^2} dx.$
14. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+3)}.$
15. $\int \frac{x+1}{x^3+4x} dx.$
16. $\int \frac{x^3+1}{x^5+2x^3+x} dx.$
17. $\int \frac{6x^2 dx}{(x^2+1)^2}.$
18. $\int \frac{3x^2+1}{x^3+x^2+x} dx.$
19. $\int \frac{x^3+2x^2+5x+8}{x(x^2+4)^2} dx.$
20. Demuestre que

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln \left| \frac{x + \frac{b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}{x + \frac{b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \right| + k.$$

si $b^2 - 4ac > 0$.

21. Demuestre que

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \arctan \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + k$$

si $b^2 - 4ac < 0$.

22. Demuestre que

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = -\frac{2}{2ax+b} + k$$

si $b^2 - 4ac = 0$.

7.6 Fórmulas de reducción. A menudo resulta más conveniente usar un tipo de ecuaciones conocidas como *fórmulas de reducción*, para calcular integrales indefinidas como $\int \frac{dx}{(x^2+4)^n}$ ó $\int \cos^6 x dx$, que los métodos descritos en las secciones precedentes de este capítulo. Mediante el uso de alguna fórmula de reducción, una integral dada queda expresada en términos de una integral que se puede calcular usando alguna de las fórmulas elementales de la Sec. 7.1.

La obtención de la mayor parte de las fórmulas de reducción se basa en la

integración por partes. Deduiremos dos fórmulas de reducción en los ejemplos 1 y 2 y esto proporcionará una base para las deducciones de fórmulas de reducción que habrá de hacer el estudiante en los ejercicios.

Ejemplo 1. Demuestre que

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2} \left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3) \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} \right] \quad (41)$$

donde n es un entero positivo diferente de 1.

Solución. Observemos que

$$\frac{1}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1}{a^2} \frac{a^2+x^2-x^2}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{a^2+x^2}{(a^2+x^2)^n} - \frac{x^2}{(a^2+x^2)^n} \right]$$

así es que

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1}{a^2} \left[\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} - \int \frac{x^2 dx}{(a^2+x^2)^n} \right]. \quad (42)$$

Usaremos la integración por partes en $\int \frac{x^2 dx}{(a^2+x^2)^n}$ en donde

$$u = x, \quad dv = \frac{x dx}{(a^2+x^2)^n},$$

$$du = dx, \quad v = -\frac{1}{2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}},$$

para obtener

$$\int \frac{x^2 dx}{(a^2+x^2)^n} = -\frac{x}{2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}.$$

Si sustituimos este resultado en (42) tendremos

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} &= \frac{1}{a^2} \left[\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{x}{2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} \right] \\ &= \frac{1}{2(n-1)a^2} \left[\frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + (2n-3) \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} \right]. \end{aligned}$$

La fórmula de reducción (41) nos permite reemplazar el problema del

valor de $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ por el de $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$. Mediante aplicaciones repetidas de (41), el exponente del denominador del integrando se reducirá sucesivamente de uno en uno hasta que lleguemos a la

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + k.$$

Ejemplo 2. Demuestre que

$$\int \operatorname{sen}^n x \, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx \quad (43)$$

donde n es un entero positivo.

Solución. Usaremos la integración por partes, en que

$$u = \operatorname{sen}^{n-1} x, \quad dv = \operatorname{sen} x \, dx$$

$$du = (n-1) \operatorname{sen}^{n-2} x \cos x \, dx, \quad v = -\cos x,$$

para obtener

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^n x \, dx &= -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x \, dx \\ &= -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1) \left(\int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx - \int \operatorname{sen}^n x \, dx \right). \end{aligned}$$

De esto se sigue que

$$n \int \operatorname{sen}^n x \, dx = -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx$$

ó

$$\int \operatorname{sen}^n x \, dx = \frac{-\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx.$$

Observemos aquí que por aplicaciones repetidas de la fórmula (43), el cálculo de $\int \operatorname{sen}^n x \, dx$, se puede al reducir de $\int dx$ ó de $\int \operatorname{sen} x \, dx$ según que n sea par o impar, respectivamente.

EJERCICIOS

1. Use la fórmula de reducción (41) para calcular $\int \frac{dx}{(x^2+4)^2}$.
2. Use la fórmula de reducción (43) para calcular $\int \operatorname{sen}^6 x \, dx$.
3. Demuestre la fórmula de reducción

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$$

para n entero positivo.

4. Use la fórmula de reducción del ejercicio 3 para calcular $\int \cos^4 x \, dx$.
5. Demuestre la fórmula de reducción

$$\int \tan^n x \, dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x \, dx$$

para n entero positivo distinto de 1. *Sugestión:* Use la identidad $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$.

6. Demuestre la fórmula de reducción

$$\int \cot^n x \, dx = \frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x \, dx$$

para n entero positivo distinto de 1.

7. Demuestre que $\int x^n e^x \, dx = x^n e^x - \int x^{n-1} e^x \, dx$.

En cada uno de los ejercicios del 8 al 10 use la fórmula de reducción adecuada para calcular la integral dada.

$$8. \int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$$

$$9. \int \tan^5 x \, dx.$$

$$10. \int \cot^4 x \, dx.$$

7.7 Tablas de integrales. Los métodos y procedimientos para obtener integrales indefinidas que se han analizado en este capítulo y en los precedentes, nos permiten calcular una gran proporción de las integrales comúnmente presentes en las aplicaciones del cálculo. En la práctica, un ingeniero o un científico que desee obtener una integral indefinida que no sea muy simple, usualmente se remitirá a alguna tabla que dé el cálculo de un gran número de integrales. Estas tablas se llaman *tablas de integrales*. El estudiante de matemáticas o de un campo que use de las aplicaciones del cálculo, debe poseer una buena tabla clásica de integrales. Algunas tablas clásicas se pueden encontrar en los libros siguientes:

A Short Table of Integrals, B. O. Pierce, Ginn and Company, Boston, Mass.
Handbook of Mathematical Tables and Formulas, R. S. Burington, Handbook Publishers, Sandusky, Ohio.

Mathematical Tables from Handbook of Chemistry and Physics, C. D. Hodgeman, Chemical Rubber Publishing Company, Cleveland, Ohio.

Tables of Integrals and Other Mathematical Data, H. B. Dwight, The Macmillan Company, New York.

Para usar inteligentemente una tabla de integrales debemos estar familiarizados con los métodos de simplificación que se dieron en este capítulo. Además, debemos poner cuidadosa atención en las restricciones de los valores de las constantes que aparecen en la fórmula y en las restricciones del conjunto sobre el que es válido el resultado; de otro modo se puede incurrir en serios errores en la solución. La integral que deseamos calcular, con frecuencia no aparecerá en la tabla de integrales; se hará necesario entonces, una transformación antes de que la tabla se pueda usar.

Debe usarse una tabla de integrales para ahorrar tiempo en los cálculos pero no habrá de ser una muleta o un sustituto para la habilidad en el manejo de las técnicas expuestas en este capítulo.

EJERCICIOS ADICIONALES AL CAPITULO 7

En cada uno de los ejercicios del 1 al 20 calcule la integral indefinida dada.

$$1. \int \frac{x \, dx}{ax+b}.$$

$$2. \int \frac{ax+b}{cx+d} \, dx.$$

$$3. \int \frac{x^2+1}{(x^3+3x-7)^2} \, dx.$$

$$4. \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

5. $\int \frac{x^2}{x-2} dx.$

7. $\int \frac{4x+5}{x^2+2x+2} dx.$

9. $\int (2x+3) \ln x dx.$

10. $\int \frac{x^4-2x^3-2x^2+5x+16}{x^3-2x^2-5x+16} dx.$

11. $\int \frac{6x+3}{x^2+4x+13} dx.$

13. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x+2}} dx.$

15. $\int x^2 \arctan x dx.$

17. $\int e^{2x} \cos bx dx.$

19. $\int x^4 \sin x dx.$

6. $\int \frac{\sin x \cos x}{a+b \cos^2 x} dx.$

8. $\int \frac{3x-5}{2x^2+6x+1} dx.$

12. $\int \frac{x^3}{a^2+x^2} dx.$

14. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4+x^2}}.$

16. $\int x^2 \sin 2x dx.$

18. $\int x^3 (\ln x)^2 dx.$

20. $\int \frac{162+6x^2}{81-x^2} dx.$

21. Sea R la región limitada por las gráficas de $y = (x-1)/(x^2-4)$, $y = 0$, $x = 3$ y $x = 6$. Halle el área de R hasta tres decimales.

22. La región R del ejercicio 21 se hace girar alrededor del eje X . Encuentre el volumen del sólido de revolución generado, hasta tres decimales.

23. Si la pendiente de una curva C , en cualquier punto $P(x, y)$ de ella, es igual a $4x/(4-x^2)$, encuentre una ecuación de C si C ha de pasar por el punto $(\sqrt{3}, 0)$.

24. Encuentre el área limitada por la curva cerrada que es la gráfica de $3x^2 - 10xy + 10y^2 = 2$.

25. Demuestre que

$$\int x^n \cos ax dx = \frac{x^n}{a} \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax dx.$$

26. Demuestre que si $m \neq -n$, entonces

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx.$$

Las fórmulas que dan los valores numéricos de

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x dx \quad \text{e} \quad \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx,$$

en que m y n son enteros mayores que 1, son conocidas como fórmulas de Wallis. Se le pide al estudiante que establezca esas fórmulas, en los ejercicios 27 y 28.

27. Use la fórmula (43) para demostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)(n-3) \cdots 4 \cdot 2}{n(n-2) \cdots 5 \cdot 3} & \text{si } n \text{ es impar y mayor que 1,} \\ \frac{(n-1)(n-3) \cdots 3 \cdot 1}{n(n-2) \cdots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} & \text{si } n \text{ es par y mayor que 0.} \end{cases}$$

28. Use la fórmula del ejercicio 3 de la Sec. 7.6 para demostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)(n-3) \cdots 4 \cdot 2}{n(n-2) \cdots 5 \cdot 3} & \text{si } n \text{ es impar y mayor que 1,} \\ \frac{(n-1)(n-3) \cdots 3 \cdot 1}{n(n-2) \cdots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} & \text{si } n \text{ es par y mayor que 0.} \end{cases}$$

29. Use las fórmulas de Wallis del ejercicio 27 para encontrar el valor de

$$(a) \int_0^{\pi/2} \sin^8 x dx; \quad (b) \int_0^{\pi/2} \sin^{10} x dx.$$

30. Use las fórmulas de Wallis del ejercicio 28 para encontrar el valor de

$$(a) \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta; \quad (b) \int_0^{\pi/2} \cos^7 x dx.$$

Aplicaciones adicionales de la derivación e integración

8.1 Razones relacionadas. Consideremos la función

$$F = \{(x, w) \mid w = F(x)\},$$

y supongamos que F es derivable en el intervalo S . Como se indicó en la Sec. 3.13, llamaremos frecuentemente $D_x w$ a "la razón de cambio de w con respecto a x ".

Ocorre a menudo que la variable independiente es el tiempo y se representa por t . Si $w = F(t)$, y t representa tiempo, entonces $D_t w$, la razón de cambio de w con respecto a t , se llama simplemente **razón de cambio de w** .

Ejemplo 1. Un avión sale de un campo con dirección al Norte a las 2:00 P.M. a una velocidad de 100 kms. por hora. Un segundo avión sale del mismo campo con dirección hacia el Este a las 3:00 P.M., a una velocidad de 150 kms. por hora. ¿A qué razón está aumentando la distancia entre ellos a las 4:00 P.M.?



Fig. 8.1

Solución. Sea t el tiempo en horas después de las 3:00 P.M. cuando los aviones están en la posición de A y B (ver Fig. 8.1) y sea w la distancia cuando los aviones están en las posiciones A y B . Entonces

$$AO = 150t, \quad BO = 100(t + 1).$$

Y

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{[150t]^2 + [100(t + 1)]^2} \\ &= 100\sqrt{(\frac{3}{2}t)^2 + (t + 1)^2} = 100\sqrt{\frac{9}{4}t^2 + t^2 + 2t + 1} \end{aligned}$$

$$\text{o} \quad w = 100\sqrt{1\frac{3}{4}t^2 + 2t + 1} = 50\sqrt{13t^2 + 8t + 4}.$$

De esta igualdad encontramos que

$$D_t w = 25 \cdot \frac{26t + 8}{(13t^2 + 8t + 4)^{1/2}}$$

para valores permitidos de t . A las 4:00 P.M. el valor t es 1, y

$$D_t w \Big|_1 = 25 \cdot \frac{26(1) + 8}{(13 + 8 + 4)^{1/2}} = 25 \cdot \frac{34}{5} = 170 \text{ km. por hora.}$$

Algunas veces se da una ecuación de la forma

$$y = F(x)$$

y además $x = G(t)$, $t \in S_1$. Entonces

$$y = F[G(t)],$$

y suponiendo que G es derivable en S_1 y que F es derivable en $S_2 = \{x \mid x = G(t), t \in S_1\}$, tenemos por la regla de la cadena (Sec. 3.9) que

$$D_t y = D_x y D_t x, \quad t \in S_1.$$

Es obvio, que si para $t_0 \in S_1$ dos de los valores

$$D_t y \Big|_{t_0}, \quad D_x y \Big|_{t_0}, \quad D_t x \Big|_{t_0},$$

se conocen, el tercer valor se puede determinar.

Ejemplo 2. Un recipiente tiene la forma de cono circular recto, tiene un radio de 6 unidades y una altura de 24 con eje vertical y vértice hacia abajo. Se vierte agua

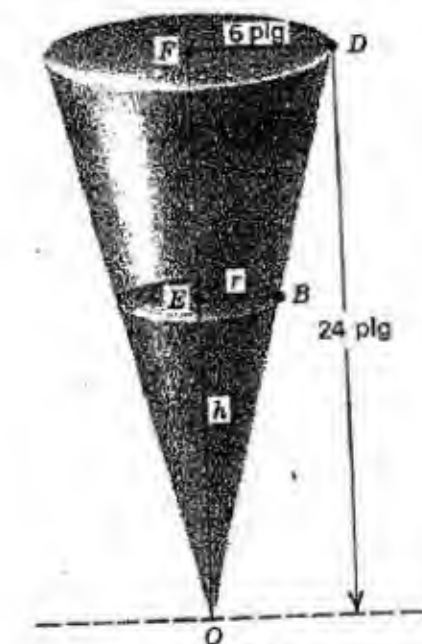


Fig. 8.2

en el cono a una razón uniforme de 25π unidades cúbicas por minuto. ¿Con qué rapidez está subiendo la superficie del agua cuando ésta tiene 10 unidades de profundidad?

Solución. Representemos el recipiente en la Fig. 8.2. Supongamos que el nivel del agua está a h unidades por encima del fondo del cono, y sea r el radio de la superficie circular del agua. Si v es el volumen del agua en el recipiente cuando la profundidad es h , tenemos

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

De los triángulos OEB y OFD obtenemos

$$\frac{r}{h} = \frac{6}{24} \quad \text{ó} \quad r = \frac{1}{4}h.$$

En consecuencia,

$$v = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{1}{16} h^3 = \frac{\pi}{48} h^3. \quad (1)$$

De la naturaleza del ejemplo suponemos que la igualdad (1) se verifica para toda $t \in [t_1; t_2]$, siendo t_1 el valor del tiempo cuando el agua empieza a fluir

y t_2 cuando se termina de llenar el recipiente. Por (1) y por la hipótesis de que h es la correspondiente de t bajo una función que es derivable en $[t_1; t_2]$, por ejemplo

$$h = G(t),$$

tenemos de acuerdo con la regla de la cadena que

$$D_t v = D_h v D_t h, \quad \text{ó} \quad D_t v = D_h \left(\frac{\pi}{48} h^3 \right) D_t h,$$

ó

$$D_t v = \frac{\pi}{16} h^2 D_t h. \quad (2)$$

Como el agua está fluyendo en el recipiente a una razón uniforme de 25 unidades cúbicas por minuto, tenemos

$$D_t v = 25\pi \text{ unidades cúbicas por minuto}$$

en $[t_1; t_2]$. Queremos encontrar

$$D_t h \Big|_{t_0} = G'(t_0),$$

donde t_0 es el valor del tiempo en el instante en que $h = G(t) = 10$ unidades. Al sustituir los valores de $D_t v$ y h en (2), obtenemos

$$25\pi = \frac{\pi}{16} (100) D_t h \Big|_{t_0}.$$

Por tanto,

$$D_t h \Big|_{t_0} = 4 \text{ unidades por minuto.}$$

Ejemplo 3. Una burbuja esférica de jabón se infla a razón de 1.6π cms. cúbicos por minuto. Encuentre la razón con la cual el radio está creciendo cuando éste es de 2 cms.

Solución. Sean v y r el volumen y radio de la burbuja. Por la naturaleza de este ejemplo suponemos que las igualdades

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3$$

y

$$r = G(t)$$

se verifican para $t \in [t_1; t_2]$, t_1 es el valor del tiempo cuando la burbuja empieza a inflarse y t_2 un instante antes de que la burbuja revienta. Además, suponemos que $D_t v$ y $D_t r$ existen en $[t_1; t_2]$. Si usamos la regla de la cadena obtenemos

$$D_t v = D_r v D_t r$$

ó

$$D_t v = 4\pi r^2 D_t r. \quad (3)$$

El enunciado del problema nos dice que

$$D_t v = 1.6\pi \text{ centímetros cúbicos por minuto para}$$

$[t_1; t_2]$. Queremos encontrar

$$D_t r \Big|_{t_0} = G'(t_0),$$

donde t_0 es el valor del tiempo para el cual $r = 2$ cms. Sustituyendo los valores dados en (3), obtenemos

$$1.6\pi = 4\pi(4) D_t r \Big|_{t_0};$$

en consecuencia

$$D_t r \Big|_{t_0} = 0.1 \text{ cms. por segundo.}$$

EJERCICIOS

1. La longitud del lado de un cuadrado aumenta con una razón uniforme de 0.3 cms. por segundo. Encuentre la razón con la cual el área aumenta en el instante en que el lado tiene 15 cms. de largo.

2. Un punto se mueve sobre la parábola con ecuación $y = 2x^2$ de tal manera que x aumenta con una razón uniforme de 3 unidades por segundo. Encuentre la razón de cambio de la ordenada y cuando $x = 2$.

3. Un punto se mueve sobre la curva con ecuación $y = x^2 - 6x$. Encuentre el punto sobre la curva en el cual la razón de cambio de la ordenada es 4 veces la razón de cambio de la abscisa.

4. El volumen v del agua que fluye a un recipiente en un tiempo t (en minutos) está dado por $v = 2t^2 - 2t + 3$. Encuentre $D_t v$, la razón de cambio de v . Encuentre $D_t v \Big|_1$; $D_t v \Big|_2$; $D_t v \Big|_3$.

5. La razón en litros por minutos con la cual fluye agua en un recipiente es $D_t v = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 4$, donde v es el volumen del agua en el tanque para un valor t del tiempo. Cuando $t = 6$ el tanque contiene 6,000 litros, ¿cuántos litros contendrá cuando $t = 12$?

6. Una escalera de 5 mts. de largo descansa en una pared vertical. Si el extremo inferior de la escalera se aleja del pie de la pared a razón de 1 mt. por segundo, ¿con qué rapidez descende el extremo superior cuando el inferior está a 2 mts de la pared?

7. Un hombre camina a razón de 4 kms. por hora hacia la base de una torre de 25 mts. de altura, ¿con qué razón se aproxima a la cima de la torre cuando está a 20 mts. de su base?

8. Un tren sale de una estación en cierto momento y viaja hacia el norte a 50 kms. por hora. Un segundo tren sale hacia el este de la misma estación 2 horas después y va a 60 kms. por hora. Encuentre la razón a la cual los dos trenes se separan 1.5 horas después de que el segundo tren deja la estación.

9. Un tanque con la forma de cono circular recto tiene 1.2 mts. de radio y 3 mts. de altura. Su eje está vertical y su vértice hacia abajo. Se bombea agua al tanque a razón de 0.33 mts. cúbicos por minuto. ¿A qué razón está subiendo la superficie del agua cuando su profundidad es de 2.66 mts.?

10. Un paracaidista descende a razón de 4 mts. por segundo, y un granjero corre hacia el punto donde caerá a razón de 3.33 mts. por segundo. ¿Con qué razón está la distancia entre ellos cambiando cuando ésta es de 33.3 mts. y el paracaidista está a 20 mts. del suelo?

11. Un hombre de 1.8 mts. se aleja de un foco que está a 6 mts. sobre el suelo a razón de 3 kms. por hora. Encuentre (a) la razón con que la sombra cambia; (b) la razón con la cual el extremo de su sombra se mueve.

12. Se deja caer arena a razón de 0.25 mts. cúbicos por minuto sobre una pila cónica cuya altura es 2 tercios del radio de la base. ¿Con qué razón está la altura de la pila aumentando cuando el radio de la base es 2 mts.?

13. Un globo se suelta a 200 mts. de un observador. El globo sube a razón de 33.3 mts. por minuto. Encuentre la razón con la cual aumenta el ángulo de elevación de la visual del observador 8 minutos después de que el globo se soltó.

14. Una escalera de 5 mts. de alto descansa en una pared vertical. Si el extremo superior se desliza a una razón de 0.6 mts. por segundo, encuentre la razón de cambio del ángulo de elevación de la escalera en el instante que el extremo inferior está a 3 mts. de la pared.

8.2 Representación paramétrica. Sea x la correspondiente de t bajo la función U cuyo dominio es D_U y sea y la correspondiente de t bajo la función V cuyo dominio es D_V ;

$$U = \{(t, x) \mid x = U(t), t \in D_U\},$$

$$V = \{(t, y) \mid y = V(t), t \in D_V\}.$$

entonces

$$R = \{(U(t), V(t)) \mid t \in D_U \cap D_V\},$$

ó

$$R = \{(x, y) \mid x = U(t), y = V(t), t \in D_U \cap D_V\}, \quad (4)$$

es una relación en $Re \times Re$, y decimos que el par de ecuaciones

$$x = U(t), \quad y = V(t), \quad t \in D_U \cap D_V \quad (5)$$

es una **representación paramétrica** de la relación R . Si G es el conjunto de puntos que forman la gráfica de la relación R , decimos que G es la gráfica de las ecuaciones (5). Decimos también que las ecuaciones (5) son una **representación paramétrica** del conjunto de puntos G , ó que las ecuaciones (5) son **ecuaciones paramétricas** del conjunto de puntos G .

En las representaciones (4) y (5), t se llama **parámetro**. Si (5) es una representación paramétrica de una relación R , entonces para cada valor de $t \in D_U \cap D_V$ el par (x, y) determinado por (5) pertenecerá a R y para cada par $(x, y) \in R$ habrá al menos un valor de $t \in D_U \cap D_V$ tal que

$$x = U(t), \quad y = V(t).$$

La relación R definida por (4) no es en general una función, sin embargo, para ciertas selecciones de la función U la relación R es una función.

Por ejemplo, si

$$R_1 = \{(x, y) \mid x = t^2, y = t, t \in Re\}, \quad (6)$$

entonces podemos escribir

$$R_1 = \{(x, y) \mid x = y^2, x \in [0; +\infty)\}.$$

Note que R_1 no es una relación funcional (vea Fig. 1.6).

Sin embargo, si

$$R_2 = \{(x, y) \mid x = t, y = t^2 - 1, t \in Re\},$$

entonces podemos escribir

$$R_2 = \{(x, y) \mid y = x^2 - 1, x \in \mathbb{R}\},$$

la cual es una función.

Ejemplo 1. Sea R_3 la relación con representación paramétrica

$$x = 5 \sin t, \quad y = 5 \cos t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Escriba R_3 en la forma (4); determine la gráfica de R_3 e identifique R_3 como una función o como una relación no funcional.

Solución. Aquí

$$R_3 = \{(x, y) \mid x = 5 \sin t, y = 5 \cos t, t \in \mathbb{R}\}.$$

Ya que

$$(5 \sin t)^2 + (5 \cos t)^2 = 25(\sin^2 t + \cos^2 t) = 25$$

para $t \in \mathbb{R}$, podemos escribir

$$R_3 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25, x \in [-5; 5], y \in [-5; 5]\},$$

y vemos que la gráfica de R_3 es el círculo con centro en el origen y radio 5 (vea Fig. 1.6). Por tanto, R_3 es una relación no funcional. En el ejemplo 1 vimos que la gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = 5 \sin t, \quad y = 5 \cos t, \quad t \in \mathbb{R}$$

es la gráfica de la ecuación

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Cuando las ecuaciones paramétricas (5) se han reemplazado por una ecuación S_{xy} que contiene solamente las variables x y y , decimos que el parámetro t ha sido eliminado de (5) y el proceso para obtener S_{xy} de las ecuaciones (5) se llama *eliminación del parámetro*. Algunas veces la eliminación necesita del uso de una o más identidades trigonométricas, como en el ejemplo 1.

Al referirnos de nuevo a la relación R definida por (4), de la cual (5) es una representación paramétrica, podemos obtener una condición bajo la cual R es una función. Si suponemos que en (4) y (5) la inversa de la función U en el conjunto $D_U \cap D_V$ es una función U^* , entonces podemos escribir la ecuación

$$x = U(t)$$

como

$$t = U^*(x)$$

donde el dominio de U^* es

$$D_{U^*} = \{x \mid x = U(t), t \in D_U \cap D_V\}.$$

Y podemos expresar $y = V(t)$ como

$$y = V[U^*(x)],$$

y

$$R = \{(x, y) \mid y = V[U^*(x)], x \in D_{U^*}\}$$

es una función (vea Sec. 1.6). Con esto hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 1. Si

$$x = U(t), \quad y = V(t), \quad t \in D_U \cap D_V$$

es una representación paramétrica de una relación R y si U es biunívoca en $D_U \cap D_V$, entonces R es una función.

Hemos visto que la relación R_1 definida por (6) no es una función, sin embargo la relación

$$R_4 = \{(x, y) \mid x = t^2, y = t, t \in [0; +\infty)\}$$

es una función. Para esta relación las funciones U y V en la representación paramétrica se pueden expresar como

$$U = \{(t, x) \mid x = t^2, t \in [0; +\infty)\}$$

y

$$V = \{(t, y) \mid y = t, t \in \mathbb{R}\}.$$

$U'(t) = 2t$ es positiva para $t \in (0; +\infty)$, entonces U es biunívoca en $[0; +\infty)$ y en consecuencia su inversa es la función

$$U^* = \{(x, t) \mid \sqrt{x} = t, x \in [0; +\infty)\}.$$

Entonces

$$R_4 = \{(x, y) \mid t = \sqrt{x}, y = t, t \in [0; +\infty)\},$$

y podemos expresar

$$R_4 = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x}, x \in [0; +\infty)\}.$$

La gráfica de R_4 se da en la Fig. 1.21.

Supongamos que

$$x = U(t), \quad y = V(t), \quad t \in S_1$$

es una representación paramétrica de una relación, y supongamos que U es biunívoca en S_1 . La relación es entonces la función

$$F = \{(x, y) \mid y = V[U^*(x)]\}$$

con dominio $S_2 = \{x \mid x = U(t), t \in S_1\}$. Si esta función F es derivable en S_2 , es conveniente tener una fórmula para $D_x F(x)$ en términos de $D_t U(t)$ y $D_t V(t)$. Tal fórmula se da en el teorema 2.

Teorema 2. Si las funciones

$$U = \{(t, x) \mid x = U(t), t \in S_1\}$$

y

$$V = \{(t, y) \mid y = V(t), t \in S_1\}$$

son derivables en S_1 , y si U es biunívoca en S_1 , entonces la función

$$F = \{(x, y) \mid x = U(t), y = V(t), t \in S_1\},$$

o en forma equivalente

$$F = \{(x, y) \mid y = V[U^*(x)], x \in S_2\},$$

donde $S_2 = \{x \mid x = (t), t \in S_1\}$, es derivable en el conjunto

$$S_2 = \{x \mid x \in S_2 \text{ y } D_1x \neq 0\}$$

$$D_2y = \frac{D_1y}{D_1x} \quad (7)$$

Demostración. Ya que $y = V[U^*(x)]$, por la regla de la cadena tenemos

$$D_2y = D_1y D_1x.$$

Además, como $D_1x \neq 0$ para $x \in S_2$, tenemos por (7) de la Sec. 4.4 que

$$D_1x = \frac{1}{D_1t},$$

y en consecuencia

$$D_2y = \frac{D_1y}{D_1x}.$$

Ejemplo 2. Demuestre que

$$x = t^3, \quad y = t^2, \quad t \in \mathbb{R}$$

es una representación paramétrica de una función F . Especifique F en la forma

$$F = \{(x, y) \mid y = F(x), x \in D_F\},$$

y encuentre $D_2F(x)$. Construya la gráfica de F y escriba una ecuación de la tangente a esta gráfica en el punto cuya primera coordenada es 8.

Solución. Como $D_1x = 3t^2$ es positiva para $t \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, vemos que $U(t) = t^3$ es creciente y por tanto biunívoca en \mathbb{R} .

En consecuencia, la inversa de $U = \{(t, x) \mid x = t^3, t \in \mathbb{R}\}$ es la función

$$U^* = \{(x, t) \mid t = \sqrt[3]{x}, x \in \mathbb{R}\},$$

y la representación paramétrica dada define la función

$$F = \{(x, y) \mid y = x^{2/3}, x \in \mathbb{R}\}.$$

Podemos encontrar $D_2F(x) = D_2y$ de dos maneras. De $y = x^{2/3}$, encontramos

$$D_2y = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}, \quad x \neq 0. \quad (8)$$

Por el uso de (7) tenemos que

$$D_2y = \frac{D_1y}{D_1x} = \frac{2t}{3t^2} = \frac{2}{3t}, \quad t \neq 0. \quad (9)$$

De la especificación de U^* tenemos $t = \sqrt[3]{x}$, y usando (9)

$$D_2y = \frac{2}{3x^{1/3}}, \quad x \neq 0.$$

La gráfica de F se da en la Fig. 8.3. La pendiente de la línea tangente a la gráfica de F en el punto cuya primera coordenada es 8 se da por $D_2F(x)]_8$. Por (8) tenemos

$$D_2F(x)]_8 = \frac{2}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3},$$

entonces, como $F(8) = 8^{2/3} = 4$, una ecuación de la línea tangente es $y - 4 = \frac{1}{3}(x - 8)$.

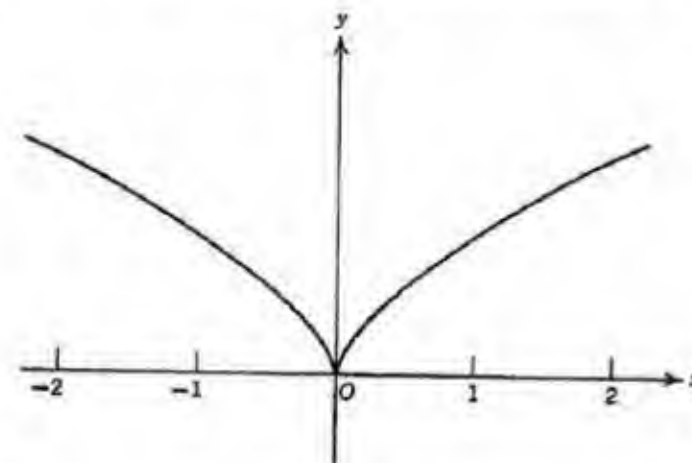


Fig. 8.3

La pendiente de la tangente se puede calcular directamente de (9) notando que cuando $x = 8$, el parámetro $t = 2$, por tanto

$$D_2y]_{x=8} = \frac{2}{3t}]_{t=2} = \frac{1}{3}.$$

Como en el ejemplo 2 el parámetro se pudo eliminar fácilmente de las ecuaciones paramétricas, especificamos F por una fórmula para $F(x)$ en términos de x y calculamos $D_2F(x)$ directamente de esta fórmula. La fórmula (7) nos ayuda a expresar $D_2F(x)$ en términos del parámetro aun no teniendo una fórmula para $F(x)$.

Ejemplo 3. Demuestre que

$$x = -2t^3 - 3t - 7, \quad y = 4t^2 - 7t + 4, \quad t \in \mathbb{R}$$

es una representación paramétrica de una función $F = \{(x, y) \mid y = F(x)\}$ y encuentre una expresión para D_2y en términos de t .

Solución. Como $D_1x = -6t^2 - 3$ es negativa para $t \in \mathbb{R}$, la inversa de $U = \{(t, x) \mid x = -2t^3 - 3t - 7, t \in \mathbb{R}\}$ es una función.

En consecuencia, la representación paramétrica dada define una función tal que al usar (7), encontramos que

$$D_2y = \frac{D_1y}{D_1x} = \frac{8t - 7}{-6t^2 - 3}.$$

Note que aunque en este caso es posible obtener una fórmula para $U^*(x)$, donde U^* es la inversa de $U = \{(t, x) \mid x = -2t^3 - 3t - 7, t \in \mathbb{R}\}$, es difícil hacerlo y nos conformamos con una fórmula que exprese $D_x y$ en términos de t .

Si nos dan las ecuaciones paramétricas,

$$x = U(t), \quad y = V(t)$$

donde U y V satisfacen las hipótesis del teorema 1, podemos encontrar $D_x^2 y$ como sigue. Recuerde que $D_x^2 y = D_x(D_x y)$ y observe que las ecuaciones

$$x = U(t), \quad D_x y = \frac{D_t y}{D_t x} = W(t),$$

dan una representación paramétrica de $D_x y$. Entonces al usar (7) obtenemos

$$D_x^2 y = D_x(D_x y) = \frac{D_t(D_x y)}{D_t x} \quad (10)$$

Podemos continuar de esta manera y obtener una fórmula para $D_x^3 y$ en términos de la primera y segunda derivadas de x y y con respecto a t , pero preferimos interpretar (10) como un método por el cual se puede obtener $D_x^2 y$ para una representación paramétrica particular.

Ejemplo 4. Encuentre $D_x y$ y $D_x^2 y$ para la función representada paramétricamente por medio de $x = \frac{t^2}{2}$, $y = 1 - t$, $t \in (0; +\infty)$.

Solución. En este caso

$$D_t x = t, \quad D_t y = -1.$$

y al usar (7) obtenemos

$$D_x y = \frac{-1}{t} = -t^{-1}.$$

En consecuencia, usando (10) tenemos

$$D_x^2 y = \frac{D_t(-t^{-1})}{D_t x} = \frac{-t^{-2}}{t} = -\frac{1}{t^3}.$$

Supongamos que U y V son funciones continuas en $[a; b]$ y que

$$x = U(t), \quad y = V(t), \quad t \in [a; b] \quad (11)$$

son las ecuaciones paramétricas para un conjunto de puntos G . El conjunto G es una curva, y si las ecuaciones paramétricas determinan una función F , podemos determinar la pendiente de la tangente (cuando exista) a esta curva en un punto, calculando $D_x F(x)$ en el punto referido. Aun cuando la relación determinada por las ecuaciones paramétricas (11) no sea una función, puede existir una tangente en cada punto de su gráfica (vea la relación R , considerada en el ejemplo 1). Definimos una línea tangente a la gráfica de (11) en el punto P como sigue.

Sea G el conjunto de puntos que forman la gráfica de las ecuaciones paramétricas (11). Seleccionemos dos números t_1 y $t_1 + \Delta t$, $\Delta t \neq 0$ que pertenezcan al intervalo $[a; b]$. Sea $P(x_1, y_1)$ el punto de G tal que

$$x_1 = U(t_1), \quad y_1 = V(t_1),$$

y sea $Q(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y)$ el punto de G para el cual

$$x_1 + \Delta x = U(t_1 + \Delta t), \quad y_1 + \Delta y = V(t_1 + \Delta t)$$

(vea Fig. 8.4). La pendiente de la línea que pasa por P y Q está dada por

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{V(t_1 + \Delta t) - V(t_1)}{U(t_1 + \Delta t) - U(t_1)}.$$

Si

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(t_1 + \Delta t) - V(t_1)}{U(t_1 + \Delta t) - U(t_1)} = M_P$$

existe, entonces definimos la tangente a G en P como la línea que pasa por P

y tiene pendiente M_P . Si $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(t_1 + \Delta t) - V(t_1)}{U(t_1 + \Delta t) - U(t_1)}$ no existe pero

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{U(t_1 + \Delta t) - U(t_1)}{V(t_1 + \Delta t) - V(t_1)} = 0,$$

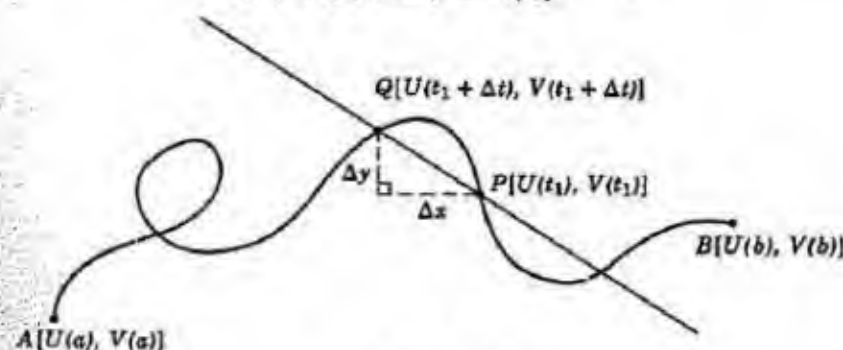


Fig. 8.4

entonces definimos la tangente a G en P como la línea que pasa por P y es perpendicular al eje x .

Como

$$\frac{V(t_1 + \Delta t) - V(t_1)}{U(t_1 + \Delta t) - U(t_1)} = \frac{\frac{V(t_1 + \Delta t) - V(t_1)}{\Delta t}}{\frac{U(t_1 + \Delta t) - U(t_1)}{\Delta t}},$$

vemos que si U y V son derivables en t_1 y si $D_t U(t_1) \neq 0$, entonces existe una tangente a G en P y la pendiente M_P de la tangente está dada por

$$M_P = \frac{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(t_1 + \Delta t) - V(t_1)}{\Delta t}}{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{U(t_1 + \Delta t) - U(t_1)}{\Delta t}} = \frac{D_t V(t_1)}{D_t U(t_1)}.$$

Si $D_t U(t)|_{t_1} = 0$ pero $D_t V(t)|_{t_1} \neq 0$, entonces la tangente a G en P existe y es perpendicular al eje x .

Con lo anterior hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 3. Si las funciones U y V son derivables en $[a; b]$ y $[U'(t)]^2 + [V'(t)]^2 \neq 0$ para $t \in [a; b]$, entonces la gráfica G de las ecuaciones paramétricas

$$x = U(t), \quad y = V(t), \quad t \in [a; b]$$

tiene una tangente en cada punto $*$ de G . La pendiente de la tangente en $P[U(t_1), V(t_1)]$ es

$$\frac{D_t y|_{t_1}}{D_t x|_{t_1}} \quad \text{si } D_t x|_{t_1} \neq 0,$$

si $D_t x|_{t_1} = 0$, entonces la tangente es perpendicular al eje x .

Ejemplo 5. Determine la pendiente de la tangente a la gráfica de

$$x = t^2, \quad y = t, \quad t \in [-2; 2] \quad (12)$$

en el punto donde $t = -1$ y en el punto donde $t = 1$. Determine los puntos para los cuales la tangente es perpendicular al eje x .

Solución. Las ecuaciones paramétricas (12) satisfacen la hipótesis del teorema 3, y en consecuencia la pendiente de la tangente en $P_1(1, -1)$ donde $t = -1$ es

$$\frac{D_t y|_{-1}}{D_t x|_{-1}} = \frac{1}{2t|_{-1}} = -\frac{1}{2},$$

y la pendiente de la tangente en $P_2(1, 1)$ donde $t = 1$ es

$$\frac{D_t y|_1}{D_t x|_1} = \frac{1}{2t|_1} = \frac{1}{2}.$$

La tangente será perpendicular al eje x cuando $D_t x = 2t = 0$. Como esto ocurre solamente para $t = 0$, el punto donde la tangente es perpendicular al eje x es $O(0, 0)$. La gráfica de (12) se muestra en la Fig. 8.5.

Note que la relación con representación paramétrica (12) no es una función, y por tanto el teorema 2 no es aplicable.

Usamos la expresión **curva continua** para un conjunto de puntos que tiene una representación paramétrica de la forma

$$x = U(t), \quad y = V(t), \quad t \in S.$$

donde S es un intervalo y U y V son continuas en S .

* Se debe mencionar que aunque la condición $[U'(t)]^2 + [V'(t)]^2 \neq 0$ (esto es que $U'(t)$ y $V'(t)$ no sean simultáneamente cero para un mismo valor de t) es suficiente para asegurar la existencia de una tangente, no es necesaria. Hay situaciones en las cuales $U'(t)$ y $V'(t)$ son ambas cero para un valor de t y la curva tiene tangente en ese punto. Por ejemplo, la curva con ecuaciones paramétricas $x = 1 - \cos t$, $y = t^2$, $t \in \mathbb{R}$, tiene tangente en $(0, 0)$, aunque $D_t x|_0 = 0$ y $D_t y|_0 = 0$.

Una representación paramétrica de una curva continua C ordena los puntos de C ; si t_1 y t_2 pertenecen a S y además $t_1 < t_2$, decimos que el punto $P_1[U(t_1), V(t_1)]$ precede al punto $P_2[U(t_2), V(t_2)]$. Dos o más valores diferentes del parámetro pueden dar el mismo punto P en C ; si ocurre esto decimos que P es un **punto múltiple**. Si C no tiene puntos múltiples es una **curva continua simple**.

Si S es un intervalo cerrado $[a; b]$, los puntos $A[U(a), V(a)]$ y $B[U(b), V(b)]$ son **puntos extremos** de C , A el **primer punto** y B el **último punto** de C (vea Fig. 8.4). Si el primer punto de C y el último de C coinciden, entonces C es una **curva cerrada**.

Si C es una curva cerrada sin puntos múltiples excepto los puntos extremos que coinciden, entonces C es una **curva cerrada simple**.

La palabra **curva** la usaremos para designar la unión de un número finito de curvas continuas unidas por sus extremos sucesivamente.

En un punto múltiple de una curva puede existir más de una tangente. Por ejemplo, consideremos la curva continua C que es la gráfica de

$$x = U(t) = t^3 - 4t, \quad y = V(t) = t^2 - 4, \quad t \in [-3; 3].$$

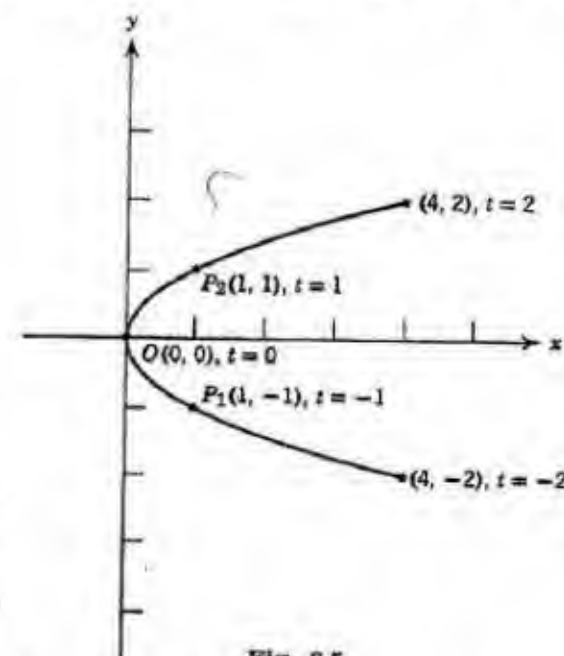


Fig. 8.5

Aquí encontramos que el origen $(0, 0)$ es un punto múltiple correspondiente a $t = -2$ y $t = 2$. Para $t = -2$ la pendiente de la tangente en P es

$$\frac{D_t y|_{-2}}{D_t x|_{-2}} = \frac{2(-2)}{3(-2)^2 - 4} = -\frac{1}{2}.$$

Para $t = 2$ la pendiente de la tangente en P es

$$\frac{D_t y|_2}{D_t x|_2} = \frac{2(2)}{3(2)^2 - 4} = \frac{1}{2}.$$

El primer punto de C es $A(U(-3), V(-3))$ ó $A(-15, 5)$, y el último punto de C es $B(U(3), V(3))$ ó $B(15, 5)$. La pendiente de la tangente es cero si

$$D_t y = 0 \text{ y } D_t x \neq 0,$$

esto es, cuando

$$2t = 0 \text{ y } 3t^2 - 4 \neq 0.$$

En el punto $(0, 4)$ donde $t = 0$ la tangente es paralela al eje x . La tangente es perpendicular al eje x cuando

$$D_t x = 0 \text{ y } D_t y \neq 0,$$

esto es, si

$$3t^2 - 4 = 0 \text{ y } 2t \neq 0.$$

En consecuencia hay dos puntos E y F , que corresponden a $t = -(2/\sqrt{3})$ y $t = 2/\sqrt{3}$ respectivamente, en los cuales la tangente es perpendicular al eje x . La gráfica de C se da en la Fig. 8.6.

A menudo encontramos conveniente expresar

$$x_t = \frac{dx}{dt}, \quad x_{tt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad y_t = \frac{dy}{dt}, \quad y_{tt} = \frac{d^2y}{dt^2},$$

cuando $x = U(t)$, $y = V(t)$, $t \in S$, es una representación paramétrica de una curva C . Sea

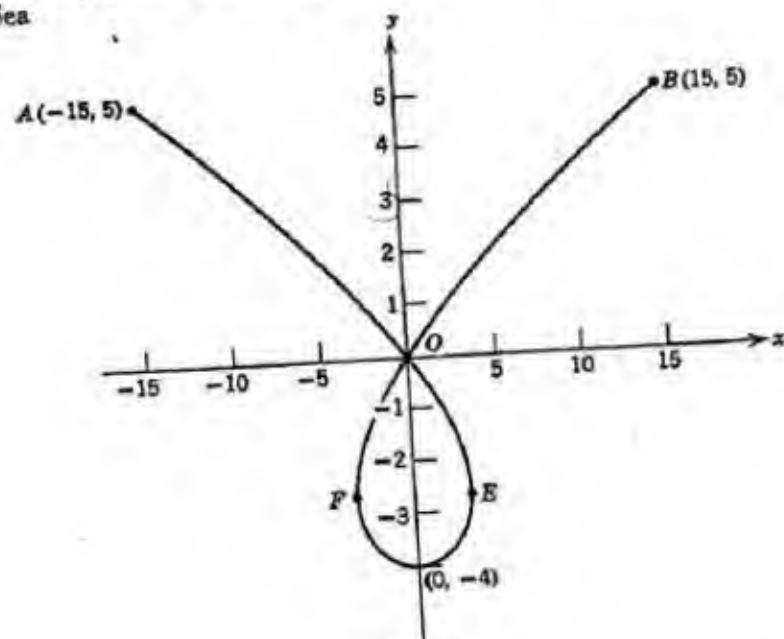


Fig. 8.6

m_t la pendiente de la tangente a la línea C en $P(U(t), V(t))$. Entonces por el teorema 3 tenemos, para $x_t \neq 0$, que

$$m_t = \frac{D_t y}{D_t x} = \frac{y_t}{x_t}.$$

Además, la razón de cambio de m_t con respecto a t está dada por

$$D_t(m_t) = D_t\left(\frac{y_t}{x_t}\right) = \frac{x_t y_{tt} - y_t x_{tt}}{x_t^2}.$$

Observe que si la representación paramétrica dada de C determina una función $F = \{(x, y) | y = F(x)\}$, entonces por la fórmula (7) tenemos

$$D_x y = \frac{D_t y}{D_t x} = \frac{y_t}{x_t},$$

y por la fórmula (10) tenemos

$$D_x^2 y = \frac{D_t(D_x y)}{D_t x} = \frac{D_t(y_t/x_t)}{D_t x} = \frac{x_t y_{tt} - y_t x_{tt}}{x_t^3}.$$

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 4 la representación paramétrica dada determina una relación $R = \{(x, y) | x = U(t), y = V(t)\}$. Elimine t de las ecuaciones $x = U(t)$ y $y = V(t)$, determine una ecuación en x y y de la gráfica de la relación R , y construya la gráfica.

1. $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in \mathbb{R}$, $a > b$.
2. $x = 2t + 1$, $y = t^2 - 4$, $t \in \mathbb{R}$.
3. $x = \sin t$, $y = 1 - \cos 2t$, $t \in \mathbb{R}$. Precaución: Note que $x \in [-1; 1]$.
4. $x = 3 \sec t$, $y = 6 \tan t$, $t \in (-\pi/2; \pi/2)$.

En cada uno de los ejercicios del 5 al 10 demuestre que la representación paramétrica dada define una función $F = \{(x, y) | y = F(x)\}$; encuentre una especificación para F de la forma $y = F(x)$, halle $D_x y$ por los métodos usados en el ejemplo 2, y construya la gráfica de F . Además, encuentre una ecuación de la tangente a la gráfica de F en un punto $P_1(x_1, y_1)$ dado.

5. $x = 2t$, $y = 6/t$, $t \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $P_1(2, 6)$.
6. $x = t - 1$, $y = t^2/2$, $t \in \mathbb{R}$; $P_1(1, 4)$.
7. $x = 3t^2$, $y = 4t$, $t \in [0; +\infty)$; $P_1(3, 4)$.
8. $x = 2e^t$, $y = 5e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$; $P_1(2, 5)$.
9. $x = t + 1$, $y = t^2 + 6t + 5$, $t \in \mathbb{R}$; $P_1(-4, 0)$.
10. $x = 4/t$, $y = t^2 + 2$, $t \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $P_1(2, 6)$.

En cada uno de los ejercicios del 11 al 14 demuestre que la representación paramétrica dada define una función $F = \{(x, y) | y = F(x)\}$ encuentre una expresión para $D_x y$ en términos del parámetro usando la fórmula (7), y halle una expresión para $D_x^2 y$ en términos del parámetro usando la fórmula (10).

11. $x = t^3 + 4t$, $y = 3t^2 + 5t - 9$, $t \in \mathbb{R}$.
12. $x = \tan \theta$, $y = 2 \sin \theta$, $\theta \in (-\pi/2; \pi/2)$.
13. $x = e^t$, $y = 1 + t^2$, $t \in \mathbb{R}$.
14. $x = 2t$, $y = \frac{1}{2}t^2$, $t \in \mathbb{R}$.

15. Verifique que $x^2 - y^2 = 4$, $x > 0$ es una ecuación de la relación determinada por las ecuaciones paramétricas $x = e^t + e^{-t}$, $y = e^t - e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$. Por medio del teorema 3 verifique que la gráfica C de esta relación tiene una tangente en cada punto, y encuentre una ecuación de esta tangente en el punto donde $t = 1$ y en los puntos donde $t = -1$; $t = 2$; $t = -2$.

16. Verifique que $(y + 4)^2 = (x + 1)^3$ es una ecuación de la relación determinada por las ecuaciones paramétricas $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - 4$, $t \in \mathbb{R}$. Por

390/APLICACIONES ADICIONALES

medio del teorema 3 verifique que la gráfica C de esta relación tiene una tangente en cada punto, y encuentre una ecuación de esta tangente en el punto donde $t = 1$, $t = -1$, $t = 2$, y $t = -2$.

17. Verifique que $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ es una ecuación de la relación determinada por las ecuaciones paramétricas $x = 3(1 - \cos \theta)$, $y = 2 \sin \theta$, $\theta \in \mathbb{R}$. Grafique esta relación.

18. Demuestre que $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ es una ecuación de la relación determinada por las ecuaciones paramétricas $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \sin^3 \theta$, $\theta \in \mathbb{R}$.

19. Para la curva que es la gráfica de $x = t(4 - t^2)$, $y = t^2(4 - t^2)$, $t \in [-3, 3]$, demuestre que $(0, 0)$ es un punto triple de la gráfica, encuentre la pendiente de cada una de las tres tangentes a la curva en ese punto, y los puntos de la curva que corresponden a cada uno de los siguientes valores del parámetro: -1 y 1 . Grafique la curva.

20. Para la curva con ecuaciones paramétricas $x = t + t^2$, $y = t - t^2$, $t \in [-3, 3]$ encuentre los puntos donde la tangente es paralela al eje x , los puntos donde es perpendicular al eje x . Halle los puntos extremos de la curva y los puntos correspondientes a cada uno de los siguientes valores del parámetro -2 , -1 , 0 , 1 y 2 . Trace la gráfica.

21. Una cicloide es la trayectoria de un punto sobre la circunferencia de un círculo de radio a cuando el círculo rueda sin deslizarse sobre una línea recta. Si C representa el centro del círculo (Fig. 8.7) y Q el punto de contacto con el eje x , demuestre que

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta), \quad \theta \in [0; 2\pi]$$

son las ecuaciones paramétricas de la cicloide.

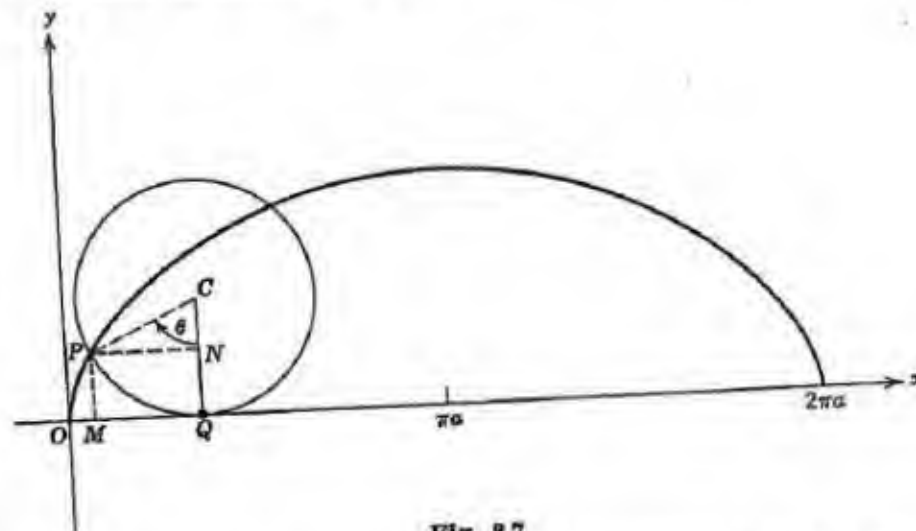


Fig. 8.7

Sugerencia: Como el círculo gira sin deslizamiento, $OQ = \text{arc } QP$; pero $\text{arc } QP = a\theta$, entonces $OQ = a\theta$. De la Fig. 8.7,

$$x = OM = OQ - MQ = a\theta - PN = a\theta - a \sin \theta;$$

$$y = MP = a - NC = a - a \cos \theta.$$

22. Demuestre que para la cicloide del ejercicio 21

$$D_x y = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \quad \text{y} \quad D_x^2 y = -\frac{1}{a(1 - \cos \theta)^{3/2}}.$$

23. En el punto donde $\theta = \pi/2$ encuentre una ecuación de la tangente y una ecuación de la normal a la cicloide con ecuaciones $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$, $\theta \in [0; 2\pi]$.

24. Continúe con la derivación indicada en (10) y demuestre que

$$D_x^2 y = \frac{D_x x D_x^2 y - D_x y D_x^2 x}{(D_x x)^3}$$

En cada uno de los ejercicios del 25 al 28 encuentre $D_x y$ y $D_x^2 y$ para la función especificada por la representación paramétrica dada.

25. $x = t - 1$, $y = t^2 + 1$, $t \in \mathbb{R}$.

26. $x = 2t^2 + 5t$, $y = 2t^3 - 7t$, $t \in \mathbb{R}$.

27. $x = 4 \cos \theta$, $y = 5 \sin \theta$, $\theta \in (0; \pi/2)$.

28. $x = \frac{1}{2t-3}$, $y = t^2 - 5$, $t \in (\frac{3}{2}; +\infty)$.

8.3 Vectores y movimiento curvilíneo en un plano. Las cantidades físicas que necesitan dirección y magnitud para su especificación, tales como fuerza y velocidad son ejemplos de *vectores*. Un vector se representa por un segmento de línea recta con dirección y longitud dadas. (Vea Fig. 8.8). En la figura, P_1 es el punto inicial y P_2 el punto terminal del vector, y la cabeza de la flecha indica la dirección del vector.



Fig. 8.8

Un par ordenado de números reales (a_1, a_2) se puede usar para determinar el vector representado por el segmento rectilíneo que une el origen con el punto

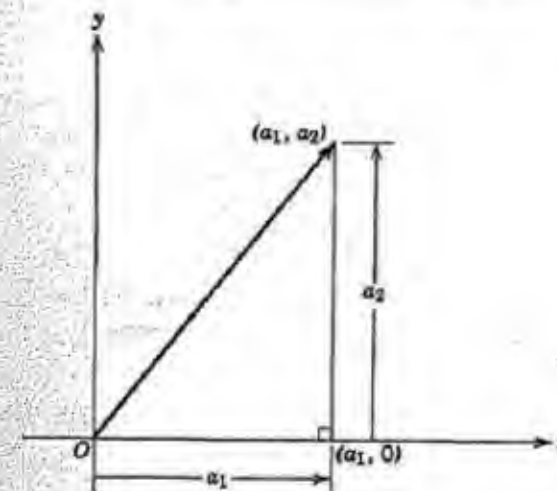


Fig. 8.9

392/APLICACIONES ADICIONALES

(a_1, a_2) en un sistema de coordenadas rectangulares, como se indica en la Fig. 8.9. El vector determinado por el par ordenado de números reales (a_1, a_2) tiene la propiedad de que si partimos del punto inicial, recorremos una distancia dirigida a_1 paralela al eje x , y después recorremos una distancia dirigida a_2 paralela al eje y , llegamos al punto terminal.

Inversamente, supongamos que se da el vector o el segmento dirigido BC , de la Fig. 8.10. Al dibujar líneas paralelas a los ejes de coordenadas por el punto inicial B y por el punto terminal C , podemos encontrar la pareja ordenada (a_1, a_2) que determina el vector; $a_1 = c_1 - b_1$, $a_2 = c_2 - b_2$. Por tanto dado un punto P , hay una correspondencia biunívoca entre los vectores bidimensionales con P como punto inicial y pares ordenados de números reales, y en consecuencia llamaremos vector a una pareja de números reales.

Un vector \mathbf{a} (de dos dimensiones) es un par ordenado de números reales (a_1, a_2) , y la representamos $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$. La magnitud $|\mathbf{a}|$ de \mathbf{a} está dada por $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

La dirección de \mathbf{a} es la dirección del origen al punto (a_1, a_2) a lo largo de la recta que une estos puntos. Esta dirección está determinada por el menor ángulo

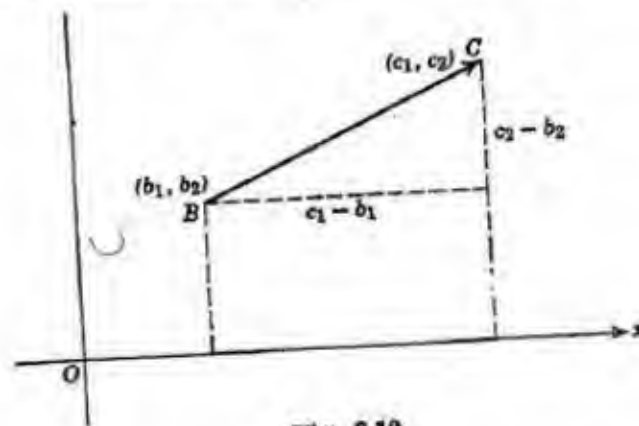


Fig. 8.10

positivo θ cuyo lado inicial es la parte positiva del eje x y cuyo lado terminal es el segmento que une el origen con (a_1, a_2) . Al referirnos a la Fig. 8.11 vemos que

$$\sin \theta = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}; \quad \cos \theta = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}.$$

Llamaremos a a_1 y a_2 componentes escalares del vector \mathbf{a} . El vector cuyas componentes escalares son ceros se llama el vector cero y se representa por $\mathbf{0}$; esto es $\mathbf{Q} = (0, 0)$.

Las operaciones básicas del álgebra de vectores son la multiplicación de un vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ por un número real c ;

$$c\mathbf{a} = (ca_1, ca_2);$$

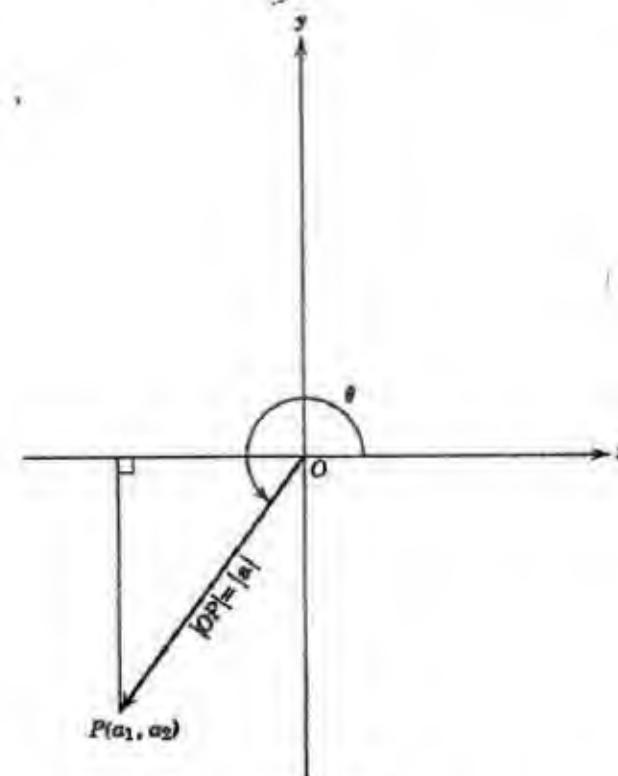


Fig. 8.11

y la suma de dos vectores $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2).$$

Consideremos la figura (en Fig. 8.12) determinada por los puntos $(0, 0)$, (a_1, a_2) , (b_1, b_2) y completemos el paralelogramo que tienen estos tres puntos como vértices. Se sugiere al lector demostrar que el cuarto vértice es el punto $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, y por tanto la diagonal del paralelogramo representa la suma

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

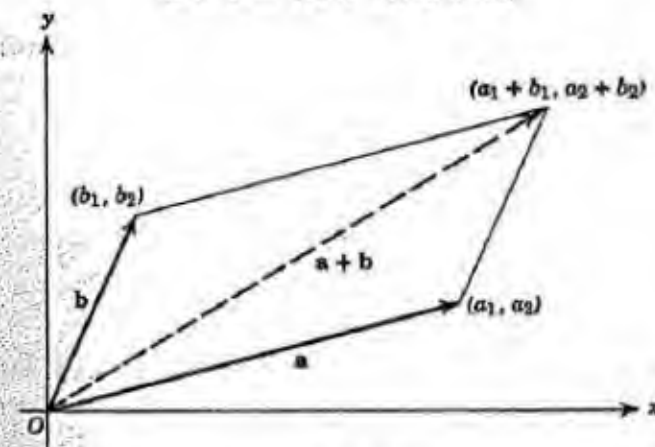


Fig. 8.12

del vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$. La suma de dos vectores frecuentemente se llama su *resultante*.

Al hablar del vector $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ como la suma o resultante de los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} , diremos que \mathbf{a} y \mathbf{b} son los *vectores componentes* de $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, y que $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ se *descompone* en los vectores componentes \mathbf{a} y \mathbf{b} . Podemos descomponer un vector \mathbf{a} en componentes en dos direcciones distintas no paralelas. En particular, un vector componente de \mathbf{a} puede ser paralelo al eje x y el otro paralelo al eje y ; estos son los vectores $(a_1, 0)$ y $(0, a_2)$ respectivamente:

$$(a_1, a_2) = (a_1, 0) + (0, a_2).$$

El vector $(a_1, 0)$ se llama *componente horizontal* de \mathbf{a} y al vector $(0, a_2)$ se le llama *componente vertical* de \mathbf{a} .

A los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ se les conoce como los **vectores unitarios** (en dos dimensiones). En forma más precisa $(1, 0)$ es el vector unitario en la dirección

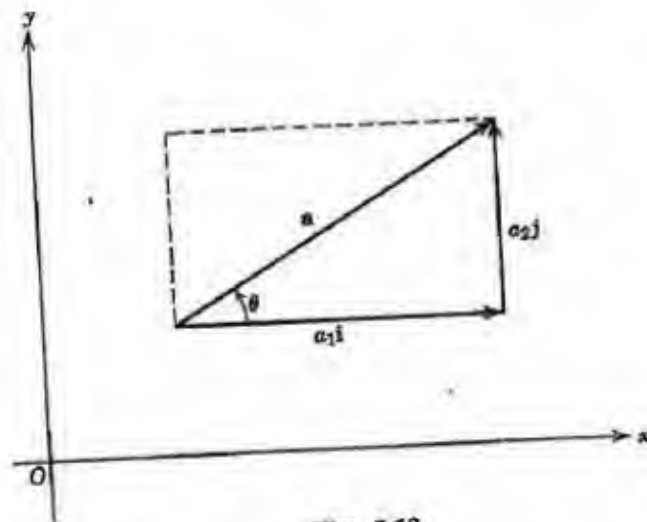


Fig. 8.13

positiva del eje x y $(0, 1)$ es el vector unitario en la dirección positiva del eje y . Representaremos estos vectores unitarios por \mathbf{i} y \mathbf{j} :

$$\mathbf{i} = (1, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1).$$

Si $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, entonces

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}.$$

En otras palabras, el vector componente horizontal de $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ es $a_1\mathbf{i}$ y el vector componente vertical de \mathbf{a} es $a_2\mathbf{j}$ (vea Fig. 8.13).

Supongamos que un punto $P(x, y)$ se mueve a lo largo de una curva plana C de tal manera que las coordenadas de P en un tiempo t están dadas por la representación paramétrica

$$x = U(t), \quad y = V(t), \quad t \in S,$$

donde S es un intervalo y las funciones U y V son derivables en S . Llamaremos al vector

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (U(t), V(t))$$

vector de posición del punto P en un tiempo t . El vector

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

se llama **vector velocidad** del punto P en un tiempo t . El vector componente horizontal de \mathbf{V} es $(dx/dt)\mathbf{i}$ y el vector componente vertical de \mathbf{V} es $(dy/dt)\mathbf{j}$. Por conveniencia se representan

$$x_t = \frac{dx}{dt} \quad \text{y} \quad y_t = \frac{dy}{dt}$$

entonces

$$\mathbf{V} = (x_t, y_t) = x_t\mathbf{i} + y_t\mathbf{j}.$$

La magnitud del vector velocidad en un tiempo t ,

$$|\mathbf{V}| = \sqrt{x_t^2 + y_t^2};$$

se llama la **rapidez** del punto en movimiento un tiempo t .

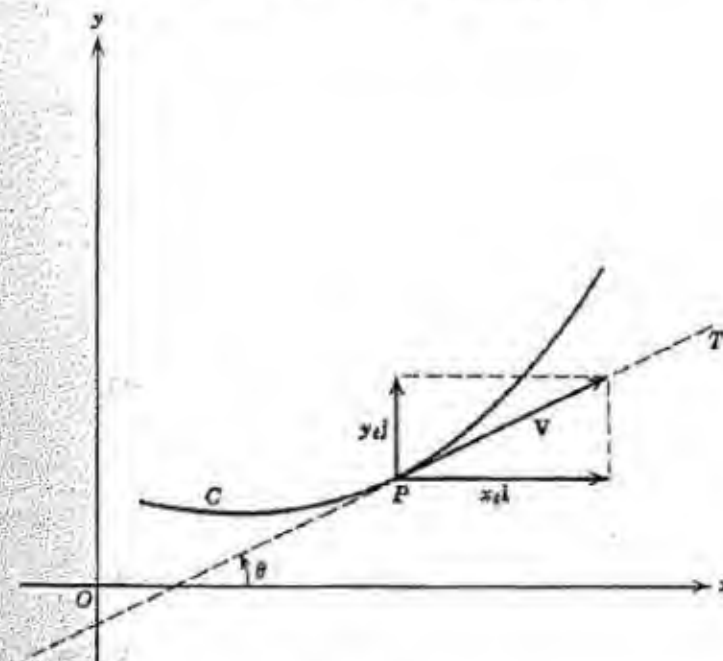


Fig. 8.14

Es costumbre tomar P como el punto inicial del vector velocidad de P en un tiempo t . Construyamos el vector de $x_t\mathbf{i}$ con P como punto inicial (Fig. 8.14);

la magnitud de $x_i \mathbf{i}$ es $|x_i|$ y la dirección de $x_i \mathbf{i}$ está determinada por el signo de x_i (esta dirección es a la derecha si x_i es positiva, a la izquierda si x_i es negativa). En forma semejante, construyamos el vector vertical $y_i \mathbf{j}$ con P como punto inicial. La resultante de los dos vectores es el vector rapidez \mathbf{V} .

Si al menos uno de x_i y y_i es distinto de cero, la trayectoria C del punto móvil tiene una tangente en $(U(t), V(t))$. Si $x_i = 0$ y $y_i \neq 0$, entonces la tangente y el vector velocidad son verticales en P . Si $|\mathbf{V}| \neq 0$, el ángulo θ , que el vector velocidad forma con la dirección positiva del eje x , se determina por

$$\sin \theta = \frac{y_i}{|\mathbf{V}|}, \quad \cos \theta = \frac{x_i}{|\mathbf{V}|}.$$

Como para $x_i \neq 0$

$$\tan \theta = \frac{y_i}{x_i} = \frac{D_t y}{D_t x},$$

tenemos por el teorema 3 que el vector velocidad está sobre la tangente a la curva C en el punto P (Vea Fig. 8.14).

Ejemplo 1. Un punto $P(x, y)$ se mueve sobre una curva C de tal manera que sus coordenadas en un tiempo t están dadas por las ecuaciones paramétricas.

$$x = 2t, \quad y = 4t^2 - 2, \quad t \in [t_1; t_2],$$

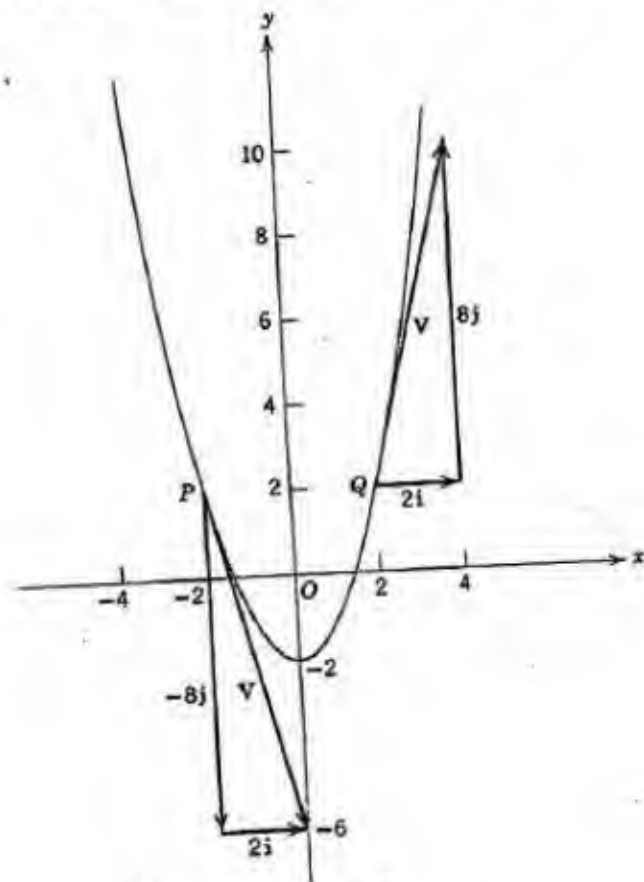


Fig. 8.15

y en consecuencia el vector de posición de P en un tiempo t es

$$\mathbf{R} = (2t)\mathbf{i} + (4t^2 - 2)\mathbf{j}.$$

Encuentre una ecuación en términos de x y y de la curva C , y grafique C . Encuentre el vector rapidez \mathbf{V} del punto P en un tiempo t ; cuando $t = -1$, y cuando $t = 1$. Dé la velocidad en un tiempo t ; cuando $t = -1$ y cuando $t = 1$. Construya la gráfica del vector velocidad para $t = -1$ y para $t = 1$.

Solución. De la ecuación $x = 2t$ obtenemos $t = x/2$; sustituyendo esta expresión para t en $y = 4t^2 - 2$ obtenemos $y = x^2 - 2$ como una ecuación de la trayectoria del punto. La gráfica de esta curva se da en la Fig. 8.15. Además,

$$x_t = \frac{dx}{dt} = 2; \quad y_t = \frac{dy}{dt} = 8t.$$

Por tanto

$$\mathbf{V} = 2\mathbf{i} + (8t)\mathbf{j} = (2, 8t),$$

y

$$|\mathbf{V}| = \sqrt{x_t^2 + y_t^2} = 2\sqrt{1 + 16t^2}.$$

Para $t = -1$ encontramos $x = -2$, $y = 2$, $x_t = 2$, $y_t = -8$. Por tanto, $\mathbf{V} = (2, -8) = 2\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$ y la rapidez $|\mathbf{V}| = 2\sqrt{17}$.

El vector velocidad en cada uno de los puntos $P(-2, 2)$ y $Q(2, 2)$ se muestra en la Fig. 8.15.

Consideremos de nuevo la situación general de un punto $P(x, y)$ que se mueve sobre una curva C de tal manera que el vector de posición de P en un tiempo t es

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (U(t), V(t)),$$

y el vector velocidad de P en un tiempo t es

$$\mathbf{V} = x_t \mathbf{i} + y_t \mathbf{j} = (x_t, y_t).$$

Supongamos que $\frac{d(x_t)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ y $\frac{d(y_t)}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$ existen en un intervalo S . Entonces el vector

$$\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d(x_t)}{dt} \mathbf{i} + \frac{d(y_t)}{dt} \mathbf{j} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right)$$

se llama **vector aceleración** del punto P en un tiempo t . Representaremos

$$x_{tt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{y} \quad y_{tt} = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

entonces

$$\mathbf{A} = (x_{tt}, y_{tt}) = x_{tt} \mathbf{i} + y_{tt} \mathbf{j}.$$

Es usual tomar P como el punto inicial del vector aceleración de P en el tiempo t . Al construir el vector horizontal $x_{tt} \mathbf{i}$ con P como punto inicial; la magnitud de $x_{tt} \mathbf{i}$ es $|x_{tt}|$ y la dirección de $x_{tt} \mathbf{i}$ se determina por el signo de x_{tt} . En forma similar, construimos el vector vertical $y_{tt} \mathbf{j}$ con P como punto inicial. La resultante de los dos vectores así constituidos es el vector aceleración \mathbf{A} de P (Fig. 8.16). La magnitud del vector aceleración es

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{x_{tt}^2 + y_{tt}^2}.$$

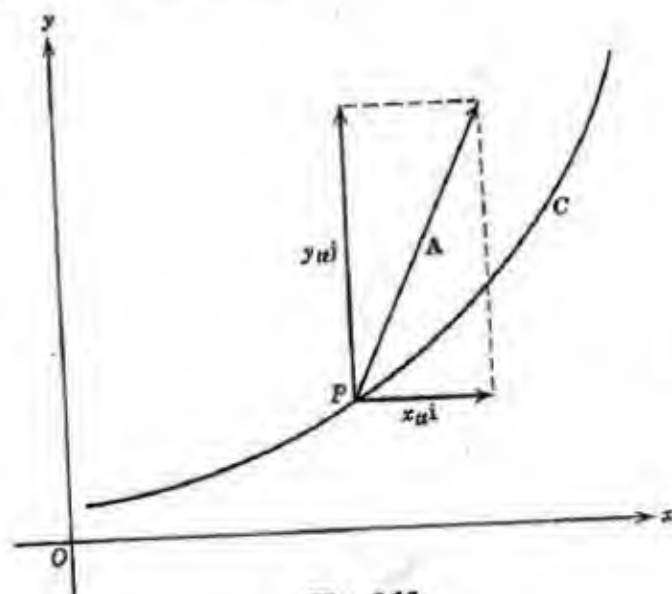


Fig. 8.16

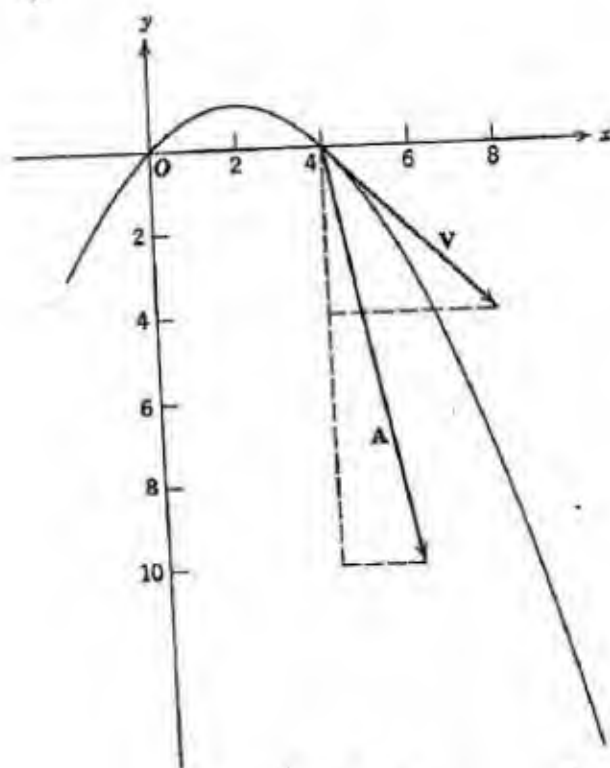


Fig. 8.17

Si $|\mathbf{A}| \neq 0$ el ángulo ϕ que \mathbf{A} forma con la dirección positiva del eje x se determina por

$$\sin \phi = \frac{y_{tt}}{|\mathbf{A}|}, \quad \cos \phi = \frac{x_{tt}}{|\mathbf{A}|}.$$

El vector aceleración no es colineal con la tangente, como lo es el vector velocidad.

Ejemplo 2. Un punto $P(x, y)$ se mueve de tal manera que sus coordenadas están dadas por la representación paramétrica

$$x = t^2; \quad y = t^2 - \frac{t^4}{4}; \quad t \in [t_1; t_2]$$

y en consecuencia el vector de posición de P es

$$\mathbf{R} = t^2\mathbf{i} + \left(t^2 - \frac{t^4}{4}\right)\mathbf{j}.$$

Encuentre una ecuación en términos de x y y de la curva C , trayectoria del punto P , y grafique C . Encuentre el vector velocidad y el vector aceleración de P en un tiempo t , y cuando $t = 2$. Construya la gráfica de los vectores velocidad y aceleración en el punto donde $t = 2$.

Solución. Al eliminar t de las ecuaciones paramétricas dadas, obtenemos $y = x - (x^2/4)$ que es una ecuación de la trayectoria. Además

$$x_t = \frac{dx}{dt} = 2t; \quad y_t = \frac{dy}{dt} = 2t - t^3;$$

$$x_{tt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 2; \quad y_{tt} = \frac{d^2y}{dt^2} = 2 - 3t^2.$$

En consecuencia

$$\mathbf{V} = (2t)\mathbf{i} + (2t - t^3)\mathbf{j} = (2t, 2t - t^3),$$

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + (2 - 3t^2)\mathbf{j} = (2, 2 - 3t^2).$$

Para $t = 2$, encontramos $x = 4, y = 0, x_t = 4, y_t = -4, x_{tt} = 2, y_{tt} = -10$. Por tanto

$$\mathbf{V} = (4, -4) = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{A} = (2, -10) = 2\mathbf{i} - 10\mathbf{j}.$$

La gráfica de C , con los vectores velocidad y aceleración en el punto $(4, 0)$ se muestran en la Fig. 8.17.

EJERCICIOS

- Si $\mathbf{a} = (2, 3)$ y $\mathbf{b} = (4, -5)$ calcule
(a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, (b) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, (c) $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, (d) $4\mathbf{a}$.
- Demuestre que la suma de dos vectores es conmutativa, esto es $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.
- Demuestre que la adición de vectores es asociativa, esto es, que $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.
- Para cualquier vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ demuestre que $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ y $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$.
- Demuestre que:

(a) $(r+s)a = ra + sa$; (b) $r(sa) = (rs)a$; (c) $r(a+b) = ra + rb$, donde a y b son vectores y r y s son números reales.

En cada uno de los ejercicios del 6 al 11 se dan las coordenadas de un punto $P(x, y)$ mediante una representación paramétrica, en un tiempo t , $t \in [t_1; t_2]$. En cada uno de los ejercicios encuentre una ecuación en términos de x y y de la trayectoria C , y encuentre los vectores velocidad y aceleración en un tiempo t . En cada caso grafique C y sobre esta gráfica construya los vectores velocidad y aceleración en el punto que corresponda al valor de t dado.

6. $x = 2t^3, y = t^3; t = 1$.

7. $x = 4t^2, y = 4t; t = -1$.

8. $x = 4 \sin t, y = 4 \cos t; t = 3\pi/4$.

9. $x = t^3, y = t^2; t = 2$.

10. $x = 4 \cos 3t, y = 5 \sin 3t; t = \pi/12$.

11. $x = 2t, y = 3e^t; t = 0$.

12. Si las coordenadas del punto $P(x, y)$ en un tiempo t están dadas por las ecuaciones paramétricas $x = 4 \cos 3t, y = 5 \sin 3t$ (vea ejercicio 10), encuentre los puntos de la trayectoria donde la rapidez es máxima; y donde es mínima.

13. Un punto $P(x, y)$ se mueve sobre el círculo con ecuación $x^2 + y^2 = 100$ en contra de las manecillas del reloj con una velocidad constante de 6 unidades por segundo. Encuentre las componentes escalares x_t y y_t del vector velocidad en el punto $(6, 8)$. Grafique la curva del movimiento y en el punto $(6, 8)$ construya el vector velocidad V .

Sugerencia. Por derivación implícita con respecto a t de la ecuación $x^2 + y^2 = 100$ obtenemos $x(x_t) + y(y_t) = 0$. Si usamos esta igualdad, los valores de x y y dadas, y $x_t^2 + y_t^2 = 36$ podemos determinar x_t y y_t .

14. Un punto se aleja del origen con una velocidad constante de 5 mts por segundo sobre la parte de la parábola $y^2 = 4x$ que está en el primer cuadrante. Encuentre las componentes escalares x_t y y_t del vector velocidad en el punto $(4, 4)$ y las componentes x_{tt} y y_{tt} del vector aceleración. Grafique la trayectoria y construya el vector aceleración en el punto $(4, 4)$.

15. Un punto $P(x, y)$ se mueve de tal manera que los componentes escalares del vector velocidad en un tiempo t son

$$x_t = 2t, \quad y_t = 3t^2.$$

Si $x = 5$ y $y = 6$ cuando $t = 2$, encuentre las ecuaciones paramétricas de la trayectoria.

Sugerencia. Recordemos que

$$x_t = \frac{dx}{dt} \quad \text{y} \quad y_t = \frac{dy}{dt},$$

entonces

$$\frac{dx}{dt} = 2t \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2.$$

En cada uno de los ejercicios del 16 al 19 se dan las componentes escalares del vector velocidad de un punto $P(x, y)$ en un tiempo t y un par de valores de x y y correspondientes a un valor de t . Para cada ejercicio encuentre las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de P .

16. $x_t = 4, y_t = -(2/t^2), t \in (0; 4]; (x, y) = (8, 1)$ cuando $t = 2$.

17. $x_t = \sin t, y_t = \cos t, t \in [0; 2\pi]; (x, y) = (0, 0)$ cuando $t = 0$.

18. $x_t = -2 \sin t, y_t = 2 \cos t, t \in [0; 2\pi]; (x, y) = (2, 0)$ cuando $t = 0$.

19. $x_t = 2 \sin t, y_t = 3 \cos t, t \in [0; 2\pi]; (x, y) = (0, 4)$ cuando $t = 0$.

20. Un punto P se mueve sobre la parte superior de una elipse con ecuación $(x^2/4) + (y^2/9) = 1$, partiendo del punto $(2, 0)$ cuando $t = 0$. La componente escalar horizontal del vector velocidad en un tiempo t es $-2t$. Encuentre las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del movimiento y el valor del tiempo para el cual P pasa por $(-2, 0)$.

8.4 proyectiles. Un objeto que se lanza al aire se llama **proyectil**. Demostraremos que si no tomamos en cuenta la resistencia del aire y del viento, y suponemos que solamente la gravedad actúa sobre el proyectil, que parte con un movimiento no vertical, entonces su trayectoria es una parábola.

Supongamos que ha sido lanzado o disparado un proyectil desde una posición dada, que se escoge como origen, con una velocidad inicial v_0 y con una inclinación α con el plano horizontal. Construyamos por O un sistema de coordenadas bidimensional en el plano vertical determinado por la trayectoria del proyectil, con el eje x horizontal y el eje y vertical (Fig. 8.18).

Como consideramos nula la resistencia del aire, es obvio que la componente escalar horizontal del vector aceleración es cero y la componente escalar vertical del vector aceleración es $-g$ (g representa la constante de aceleración de un cuerpo que cae libremente, y vale aproximadamente 9.8 mts. por cada segundo). Por tanto

$$A = (x_{tt}, y_{tt}) = (0, -g).$$

De las igualdades

$$x_{tt} = \frac{d(x_t)}{dt} = 0 \quad \text{y} \quad y_{tt} = \frac{d(y_t)}{dt} = -g,$$

obtenemos

$$x_t = c_1 \quad \text{y} \quad y_t = -gt + c_2.$$

Cuando $t = 0$, $x_t = v_0 \cos \alpha$ y $y_t = v_0 \sin \alpha$. Por tanto $c_1 = v_0 \cos \alpha$ y $c_2 = v_0 \sin \alpha$. Entonces

$$x_t = v_0 \cos \alpha \quad \text{y} \quad y_t = -gt + v_0 \sin \alpha,$$

o

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin \alpha.$$

Al resolver estas ecuaciones diferenciales obtenemos

$$x = (v_0 \cos \alpha)t + c_3 \quad \text{y} \quad y = -\frac{gt^2}{2} + (v_0 \sin \alpha)t + c_4.$$

Como $x = 0$, cuando $t = 0$ y $y = 0$ cuando $t = 0$, se deduce que $c_3 = 0$ y $c_4 = 0$. Por tanto,

$$x = (v_0 \cos \alpha)t \quad \text{y} \quad y = -\frac{gt^2}{2} + (v_0 \sin \alpha)t$$

son las ecuaciones paramétricas que dan las coordenadas del proyectil en un tiempo t , y por tanto son las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del proyectil. Al eliminar t de estas ecuaciones paramétricas obtenemos

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \quad (13)$$

como ecuación en x y y de la trayectoria del proyectil. Esta ecuación es de la forma

$$y = ax - bx^2, \quad a > 0, \quad b > 0,$$

y es por tanto una ecuación de una parábola con eje paralelo al eje y y concavidad hacia abajo.

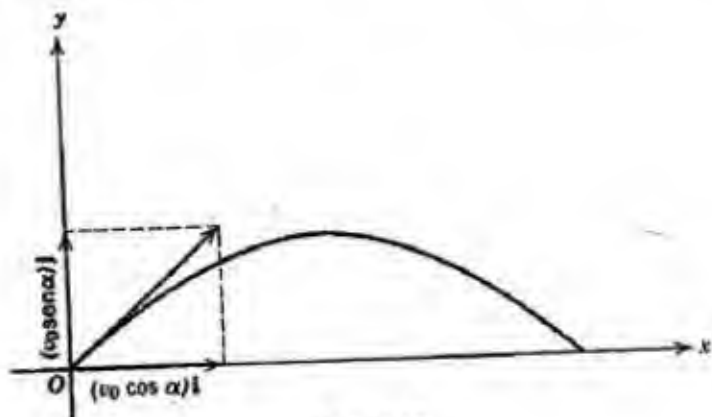


Fig. 8.18

EJERCICIOS

En este conjunto de ejercicios se supone que $g = 9.81$ mts. por segundo y la resistencia del aire nula.

1. Un proyectil tiene una velocidad inicial de 60 mts. por segundo a lo largo de una línea que forma un ángulo de 45° con la horizontal. Determine las ecuaciones paramétricas y una ecuación en x y y de la trayectoria y grafique ésta. Encuentre el vector velocidad en un tiempo t y cuando $t = 3$. Construya sobre la gráfica el vector velocidad en el punto donde $t = 3$.

2. El *alcance* de un proyectil es la distancia horizontal de O al punto donde el proyectil llega al suelo, suponga que el suelo es un plano horizontal que pasa por O (vea Fig. 8.18). Demuestre que el alcance R de un proyectil es

$$R = v_0^2 \frac{\sin 2\alpha}{g},$$

y que el alcance es dos veces la abscisa del punto más alto de la trayectoria.

3. El *tiempo de vuelo* de un proyectil es el tiempo transcurrido desde su partida hasta que llega al suelo. Demuestre que sobre un plano horizontal el tiempo de vuelo T es

$$T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Demuestre que el tiempo que requiere un proyectil para completar su vuelo es dos veces el tiempo que toma para llegar a su punto más alto.

4. Demuestre que la rapidez $|V|$ de un proyectil en un tiempo t es

$$|V| = v_0^2 - 2(v_0 g \sin \alpha)t + g^2 t^2.$$

5. Una bala se dispara con una velocidad inicial de 500 mts. por segundo y con un ángulo de 30° con la horizontal. Encuentre las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de la bala, el tiempo de vuelo, y el alcance de la misma.

6. Demuestre que el alcance máximo de un proyectil es cuando $\alpha = 45^\circ$ y este alcance máximo R es $R = v_0^2/g$.

8.5 Coordenadas polares. La interpretación geométrica de las relaciones que hemos usado se basa en la correspondencia entre pares ordenados de números reales y puntos en un sistema de coordenadas rectangulares, y hemos graficado las relaciones en un sistema de coordenadas rectangulares. Cada par ordenado de números reales se puede hacer corresponder con un punto en otras clases de sistemas de coordenadas. Todo lo que se requiere para tener un sistema de coordenadas (bidimensional) es una regla que asocie a cada par ordenado de números reales un único punto. El sistema de coordenadas bidimensional más común después del sistema de coordenadas rectangulares es el *sistema de coordenadas polares*, que ahora describimos.

Sea O un punto fijo llamado **origen** y OM una línea fija que parte de O a la que llamaremos **eje polar** (Fig. 8.19). En el sistema de coordenadas polares determinado por O y el eje polar OM , el punto correspondiente a un par ordenado de números reales (a, b) , es el punto P a una distancia dirigida a de O y sobre la línea L que pasa por O y forma un ángulo dirigido con el eje polar de b radianes. La dirección positiva sobre L es la dirección del origen O a lo largo del lado terminal del ángulo de b radianes (Fig. 8.20). Si b es positivo, el ángulo se mide en contra de las manecillas de un reloj a partir del eje polar; si b es negativa el ángulo se mide en favor de las manecillas del reloj a partir del eje polar.

Los puntos que corresponden a los pares $(4, \pi/6)$, $(-2, 2\pi/3)$ y $(3, -\pi/4)$ se muestran en la Fig. 8.21 (a), (b) y (c) respectivamente. Se deduce de estas ilustraciones que al graficar un par ordenado (a, b) en un sistema de coordenadas polares,



Fig. 8.19

primero determinamos la línea L que forma un ángulo de b radianes con el eje polar y después medimos una distancia dirigida a a partir del origen O sobre la línea dirigida L .

Si P es el punto que corresponde al par ordenado (r, θ) en un sistema de coordenadas polares, decimos que el par (r, θ) son las **coordenadas polares** de P y usaremos $P(r, \theta)$, para designar el punto. Si P es el punto que corresponde al par ordenado (x, y) en un sistema de coordenadas rectangulares decimos que la pareja (x, y) son las **coordenadas rectangulares** de P .

En un sistema de coordenadas rectangulares dado, cada punto tiene uno y sólo un par de coordenadas rectangulares; sin embargo, en un sistema de

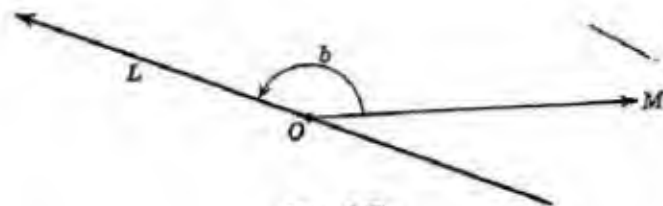


Fig. 8.20

coordenadas polares dado, cada punto tiene un número ilimitado de pares de coordenadas polares. El punto con coordenadas polares (r, θ) tiene también como coordenadas polares a $(r, \theta + 2\pi n)$ y $(-r, \theta + (2n + 1)\pi)$, donde n es cualquier entero.

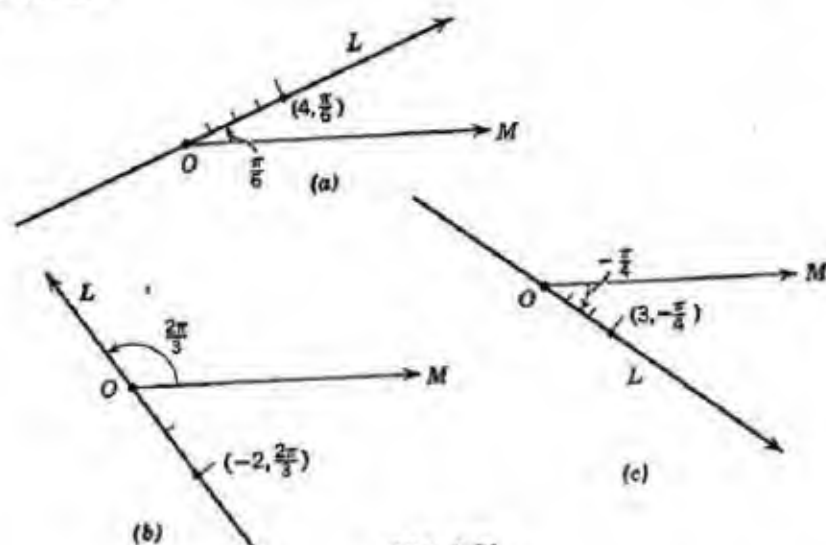


Fig. 8.21

La gráfica de una relación R en un sistema de coordenadas polares es un conjunto de puntos G con las propiedades siguientes

- Si $(r, \theta) \in R$, entonces $P(r, \theta) \in G$,
- Si $P \in G$, entonces algún par de coordenadas polares de P pertenece a R .

Si $S_{r,\theta}$ es una proposición con las variables r y θ , la gráfica de la proposición $S_{r,\theta}$ en coordenadas polares es la gráfica en coordenadas polares de la relación $R = \{(r, \theta) \mid S_{r,\theta}\}$.

Ejemplo, la gráfica de $r = 4$ es la gráfica de la relación $\{(r, \theta) \mid r = 4\}$, y esta gráfica es el círculo con centro en el origen y radio 4 (Fig. 8.22); la gráfica de $\theta = \pi/4$ es la gráfica de la relación $\{(r, \theta) \mid \theta = \pi/4\}$ y esta gráfica es la línea que pasa por el origen y forma un ángulo de $\pi/4$ radianes con el eje polar (Fig. 8.23).

Ejemplo 1. Construya la gráfica de la ecuación $r = 3(1 + \cos \theta)$.

Solución. Como la gráfica de $r = 3(1 + \cos \theta)$ es la gráfica de

$$R = \{(r, \theta) \mid r = 3(1 + \cos \theta)\},$$

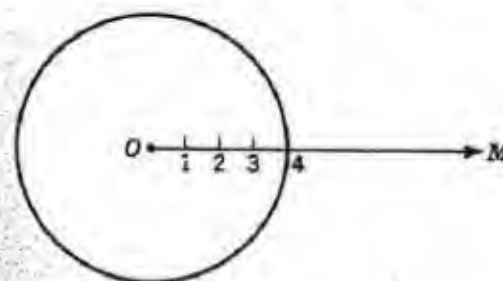


Fig. 8.22

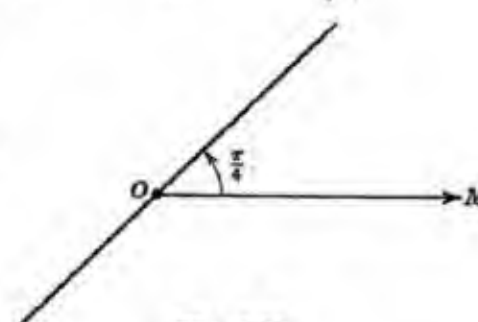


Fig. 8.23

determinamos algunos de los pares ordenados que pertenecen a R , graficamos estos pares como coordenadas polares, y unimos estos puntos por medio de una curva sencilla. Los pares ordenados que pertenecen a R se pueden encontrar asignando valores a θ y calculando los valores correspondientes de r , como se muestra en la tabla siguiente.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos \theta$	1	0.87	0.5	0	-0.5	-0.87	-1
r	6	5.61	4.5	3	1.5	0.39	0

θ	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos \theta$	-0.87	-0.5	0	0.5	0.87	1
r	0.39	1.5	3	4.5	5.61	6

Si graficamos los puntos correspondientes a los pares ordenados (r, θ) de esta tabla y los unimos obtenemos la curva suave de la Fig. 8.24.

Si una curva es la gráfica de una de las ecuaciones

$$r = a(1 + \cos \theta), \quad r = a(1 - \cos \theta)$$

$$r = a(1 + \sin \theta), \quad r = a(1 - \sin \theta)$$

se llama *cardioide*. En el ejemplo 1 construimos la cardioide con ecuación $r = a(1 + \cos \theta)$ donde $a = 3$. Si una cardioide tiene otra de las ecuaciones dadas, es similar a la curva de la Fig. 8.24 pero está orientada en forma diferente en el sistema de coordenado.

Supongamos que un sistema de coordenadas rectangulares y un sistema de coordenadas polares se colocan en un plano de tal manera que el origen del sistema

406/APLICACIONES ADICIONALES

polar coincide con el origen del sistema rectangular y el eje polar coincide con la parte positiva del eje x . Consideremos el punto P con coordenadas rectangulares (x, y) y coordenadas polares (r, θ) . Sea P el punto terminal del vector \mathbf{a} con punto inicial en O . Al examinar la Fig. 8.25 vemos que el vector \mathbf{a} se puede expresar como

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

$$\text{o} \quad \mathbf{a} = (r \cos \theta)\mathbf{i} + (r \sin \theta)\mathbf{j}.$$

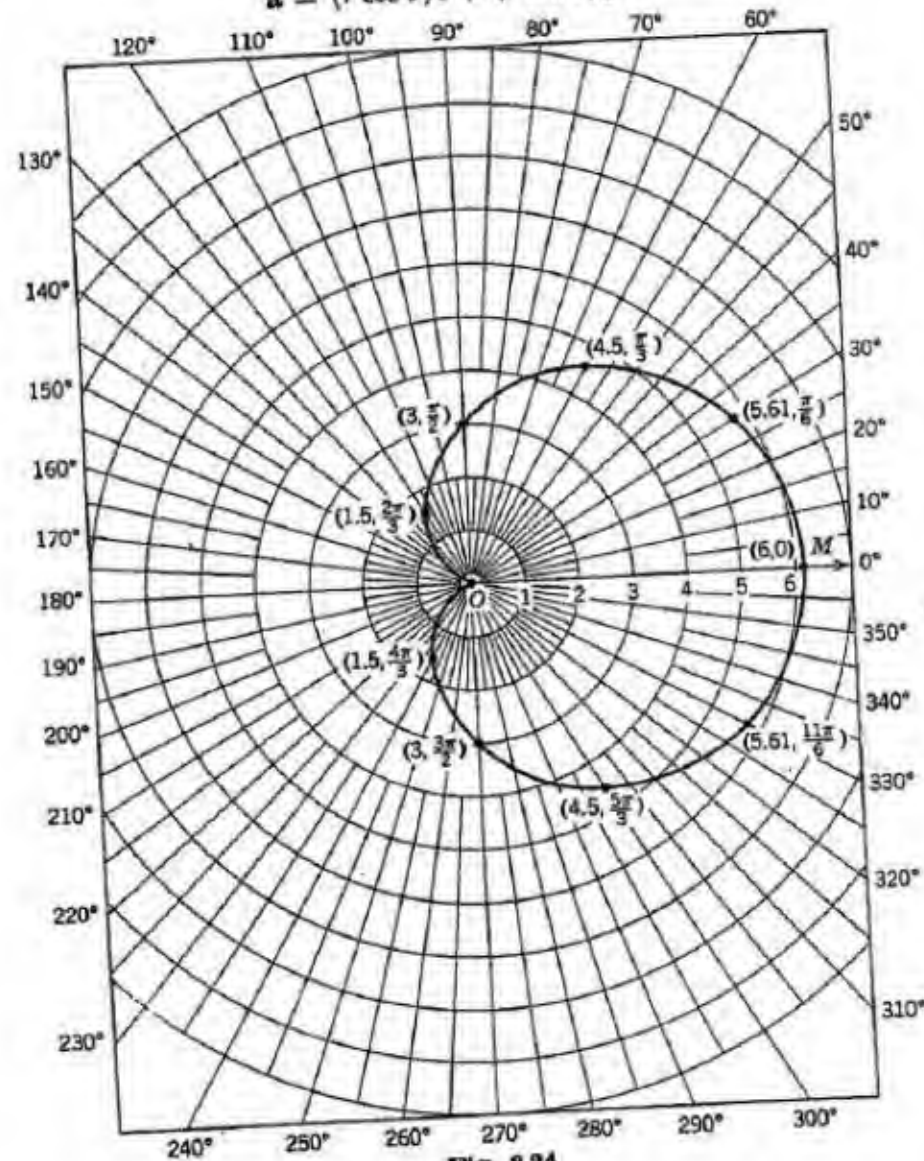


Fig. 8.24

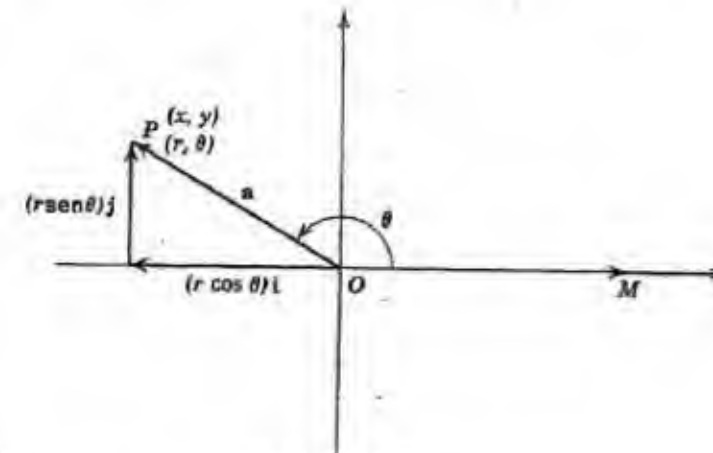
Por tanto, tenemos las igualdades

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \quad (14)$$

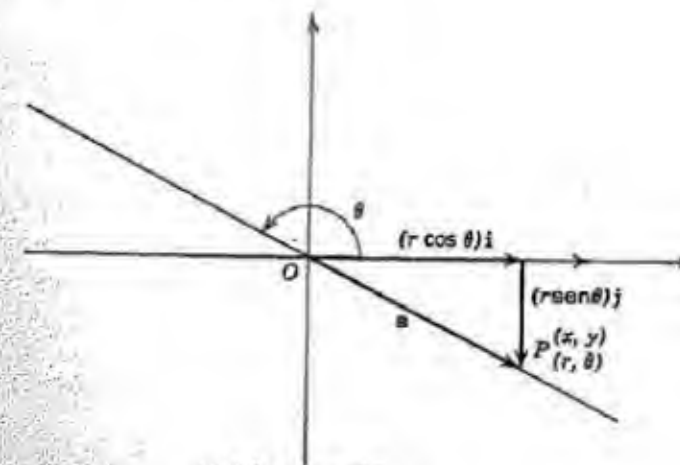
Las ecuaciones (14) se pueden usar para encontrar las coordenadas rectangulares de un punto cuando conocemos un par de coordenadas polares del

COORDENADAS POLARES/407

punto. (Por supuesto, se supone que los dos sistemas de coordenadas se colocan como se describió anteriormente). Cuando conocemos las coordenadas rectangulares de un punto, se pueden usar las ecuaciones (14) para encontrar un par de coordenadas polares de dicho punto. Entonces, si tenemos una ecuación en coordenadas rectangulares, para un conjunto de puntos C podemos usar las ecuaciones (14) para encontrar una ecuación para el mismo conjunto de puntos en coordenadas polares.



$$(a) |\mathbf{a}| = r, r > 0$$



$$(b) |\mathbf{a}| = -r, r < 0$$

Fig. 8.25

Ejemplo 2. Encuentre una ecuación en coordenadas polares de la curva C para la cual $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ es una ecuación en coordenadas rectangulares y grafique esta curva.

Solución. Al usar las ecuaciones (14) la ecuación dada se transforma en

$$r^2 - 2ar \cos \theta = 0 \quad \text{o} \quad r(r - 2a \cos \theta) = 0;$$

408/APLICACIONES ADICIONALES

esto es, C es la gráfica de la relación

$$R = \{(r, \theta) \mid r = 0 \text{ y/o } r = 2a \cos \theta\} \\ = \{(r, \theta) \mid r = 0\} \cup \{(r, \theta) \mid r = 2a \cos \theta\}.$$

Ya que el par ordenado $(0, \pi/2)$ satisface a la ecuación $r = 2a \cos \theta$, la gráfica de $r = 0$ se incluye en la gráfica de $r = 2a \cos \theta$, entonces podemos escribir

$$R = \{(r, \theta) \mid r = 2a \cos \theta\}$$

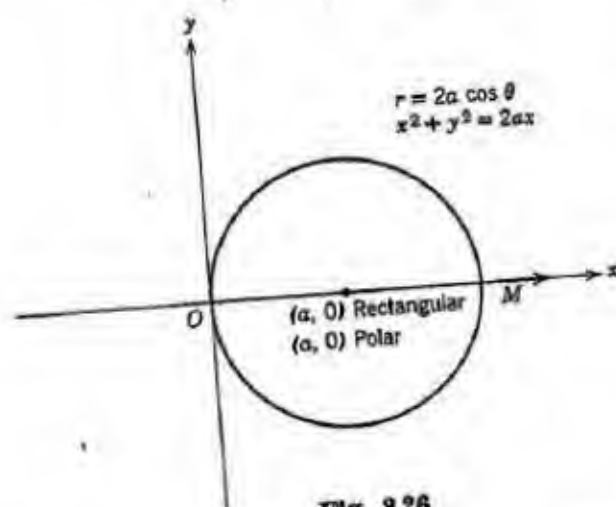


Fig. 8.26

y $r = 2a \cos \theta$ es una ecuación en coordenadas polares de C . La gráfica de C se muestra en la Fig. 8.26, y es un círculo.

De las ecuaciones (14) tenemos

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ r^2 = x^2 + y^2. \quad (15)$$

6

Además, para $r \neq 0$,

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\pm \sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\pm \sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}. \quad (16)$$

Si para un conjunto de puntos G tenemos una ecuación en coordenadas polares, podemos usar (14), (15) y (16) para encontrar una ecuación para G en coordenadas rectangulares.

Ejemplo 3. Encuentre una ecuación en coordenadas rectangulares de la curva C para la cual $r = 2a \sin \theta$ es una ecuación en coordenadas polares, y grafique esta curva.

Solución. Considere la gráfica de la ecuación

$$r^2 = 2ar \sin \theta, \quad (17)$$

que se obtiene al multiplicar ambos miembros de la ecuación dada por r . La gráfica de (17) es la gráfica de la relación

$$R = \{(r, \theta) \mid r^2 - 2ar \sin \theta = 0\} = \{(r, \theta) \mid r(r - 2a \sin \theta) = 0\} \\ = \{(r, \theta) \mid r = 0 \text{ y/o } r - 2a \sin \theta = 0\}.$$

Observamos que el par ordenado $(0, 0)$ satisface a la ecuación $r - 2a \sin \theta = 0$, y en consecuencia la gráfica de $r = 0$ (el origen) se incluye en la gráfica de $r - 2a \sin \theta = 0$. Entonces la gráfica de (17) es la misma gráfica que la de la ecuación dada $r = 2a \sin \theta$. Usando las ecuaciones (14) y (15) transformamos la ecuación (17) en

$$x^2 + y^2 = 2ay,$$

que es una ecuación de C en coordenadas rectangulares. La curva C es un círculo cuyo centro tiene coordenadas rectangulares $(0, a)$, coordenadas polares $(a, \pi/2)$ y cuyo radio es a (Fig. 8.27).

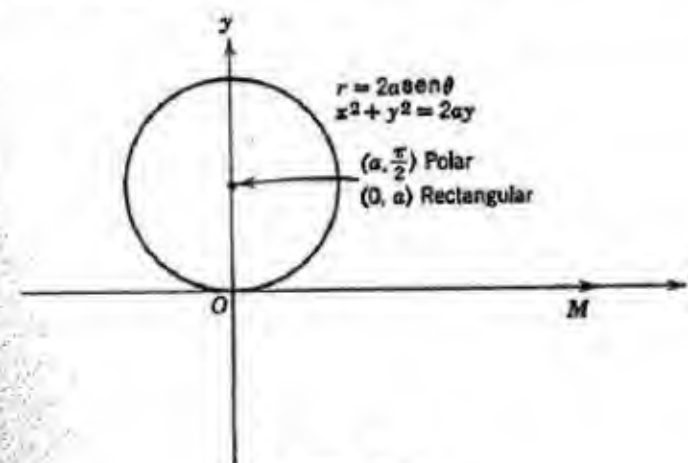


Fig. 8.27

Como ejemplos adicionales de gráficas en coordenadas polares daremos la gráfica de la *espiral de Arquímedes* con ecuación

$$r = 2\theta, \quad \theta \in [0; 2\pi]$$

y la *rosa de cuatro hojas* con ecuación

$$r = a \cos 2\theta.$$

Ver Figs. 8.28 y 8.29.

La gráfica de cualquiera de las ecuaciones

$$r = a \sin n\theta, \quad r = a \cos n\theta,$$

donde n es un entero positivo, se llama *rosa de n hojas* si n es un entero impar y *rosa de $2n$ hojas* si n es un entero par.

En el párrafo siguiente usaremos la fórmula

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta \quad (18)$$

410/APLICACIONES ADICIONALES

para el área A de un sector circular donde r es el radio del sector y θ es el ángulo del sector en radianes. (Esta fórmula se obtuvo en la Sec. 2.2).

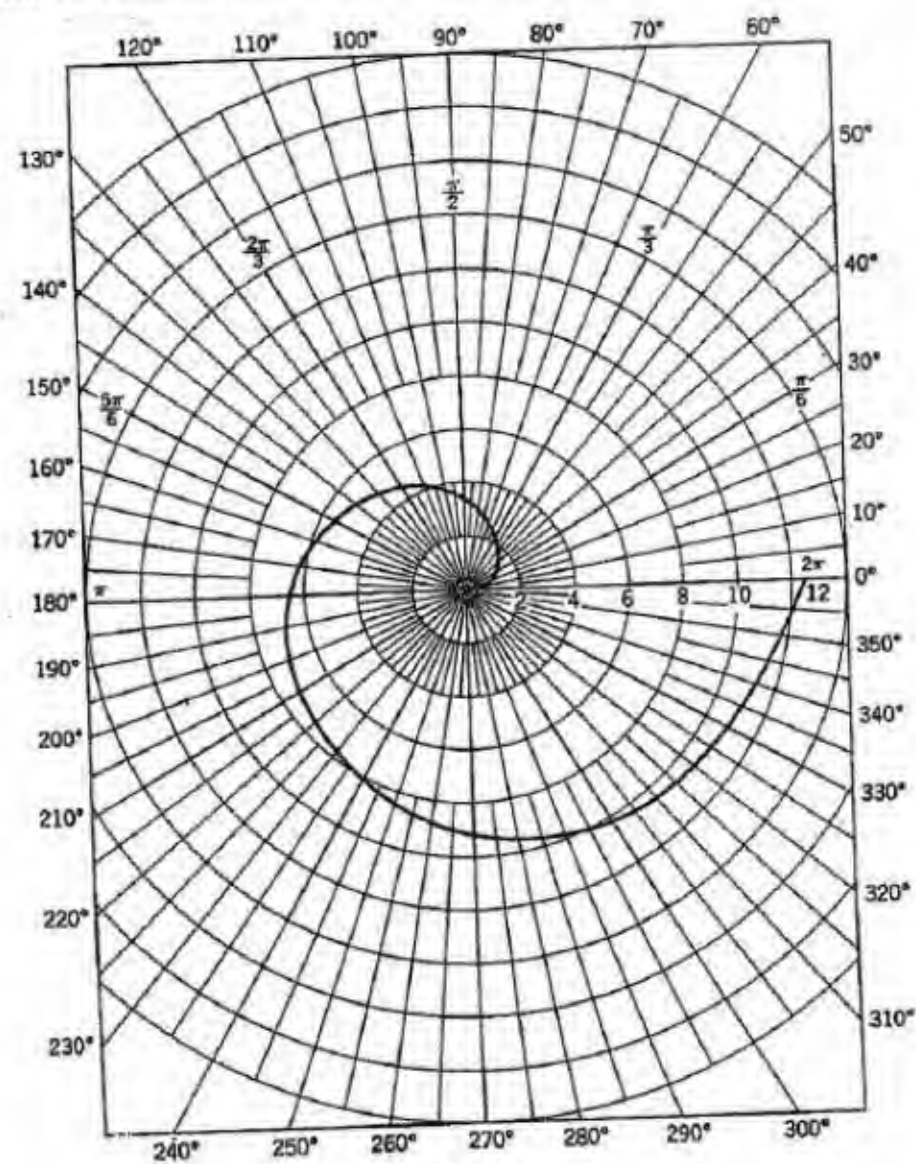


Fig. 8.28

Sea F una función tal que

$$F(\theta) \geq 0 \text{ para } \theta \in [a; b], b - a \leq 2\pi.$$

Sea D la región limitada por las gráficas (en coordenadas polares) de las ecuaciones

$$r = F(\theta), \theta \in [a; b]; \theta = a; \text{ y } \theta = b$$

(vea Fig. 8.30). Esto es, D es la gráfica de la relación

$$R = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq F(\theta), \theta \in [a; b]\}.$$

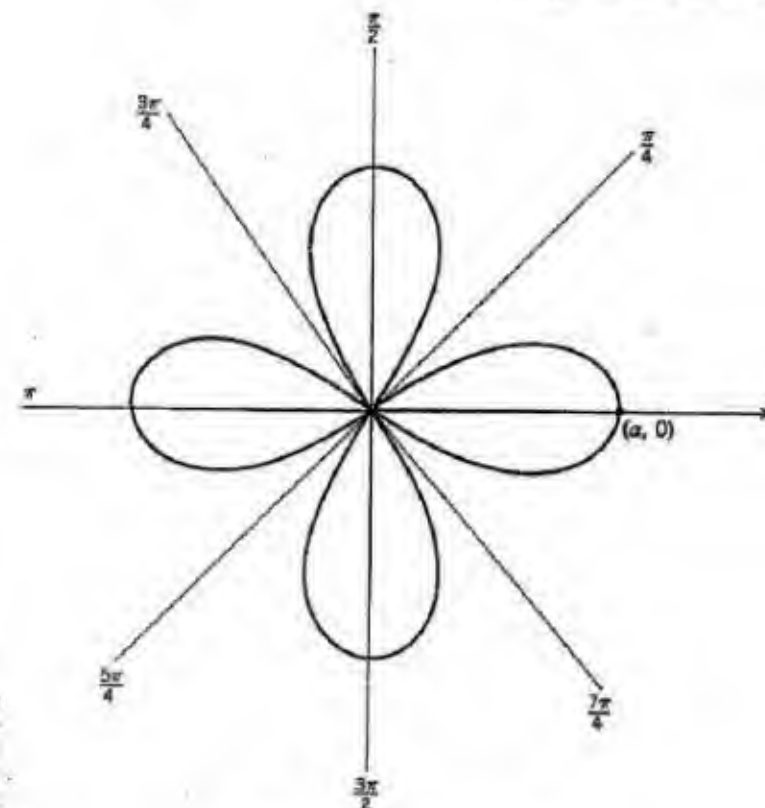
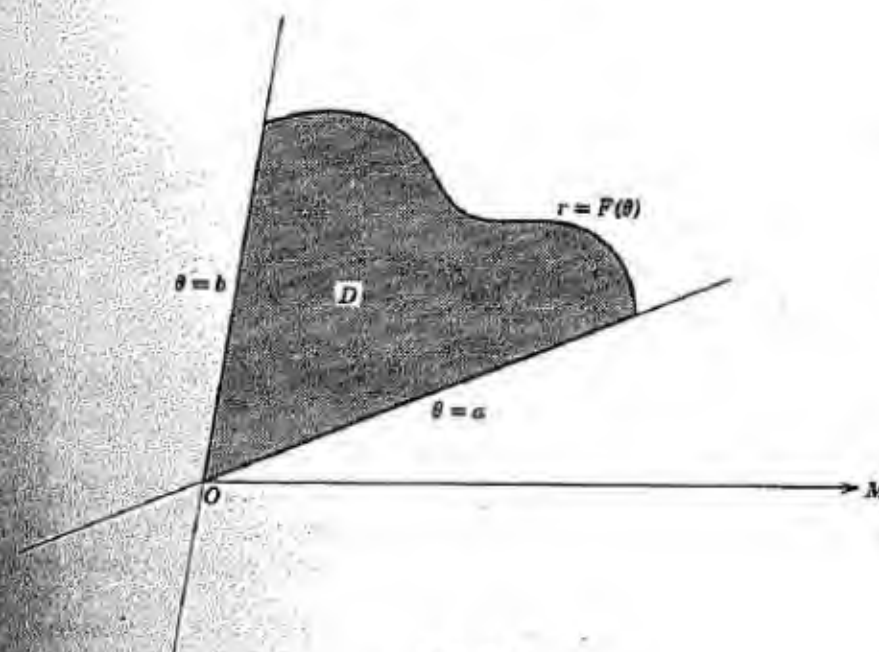
Fig. 8.29 $r = a \cos 2\theta$ 

Fig. 8.30

412/APLICACIONES ADICIONALES

Deseamos determinar, si es posible, el área A de la región D .

Sea P_n una partición (vea Sec. 5.3) de $[a; b]$ en n subintervalos determinada por el conjunto

$$\{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{i-1}, \theta_i, \dots, \theta_{n-1}, \theta_n\},$$

y sea

$$\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Sea $\{t_1, t_2, t_3, \dots, t_i, \dots, t_{n-1}, t_n\}$ un aumento de la partición P_n con

$$\theta_{i-1} \leq t_i \leq \theta_i \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

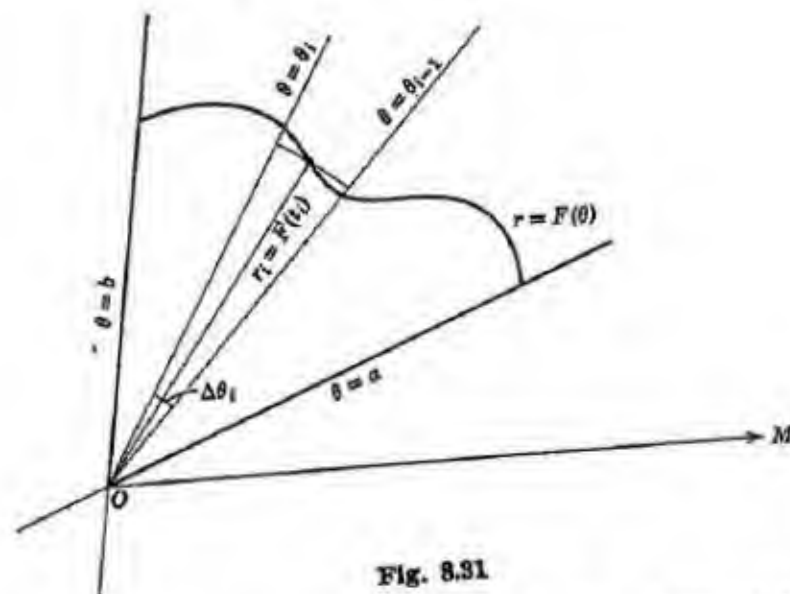


Fig. 8.31

Con el origen O como centro construimos n sectores circulares, el i -ésimo sector circular tiene radio $r_i = F(t_i)$ y ángulo $\Delta\theta_i$ (vea Fig. 8.31). El área del i -ésimo sector circular es

$$\frac{1}{2} r_i^2 \Delta\theta_i$$

y la suma

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\theta_i$$

de las áreas de los n sectores circulares es una aproximación del área A de la región D .

Al aumentar el número de subintervalos y disminuir la longitud de cada subintervalo de la partición P_n podemos obtener una suma más próxima al área A , y procediendo como en la Sec. 5.8 concluimos que, si la región D tiene un área A , entonces

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b [F(\theta)]^2 d\theta. \quad (19)$$

COORDENADAS POLARES/413

Por el teorema 1 de la Sec. 5.4 sabemos que si F es continua en $[a; b]$ entonces el área A existe.

Al usar el resultado (19) para calcular el área de una región debemos estar seguros que la región está limitada por las gráficas de

$$r = F(\theta), \quad \theta \in [a; b]; \quad \theta = a; \quad \text{y} \quad \theta = b;$$

y que F es una función tal que $F(\theta) \geq 0, \theta \in [a; b], b - a \leq 2\pi$.

Ejemplo 4. Encuentre el área A limitada por un lazo de la curva con ecuación

$$r^2 = a^2 \sin 2\theta.$$

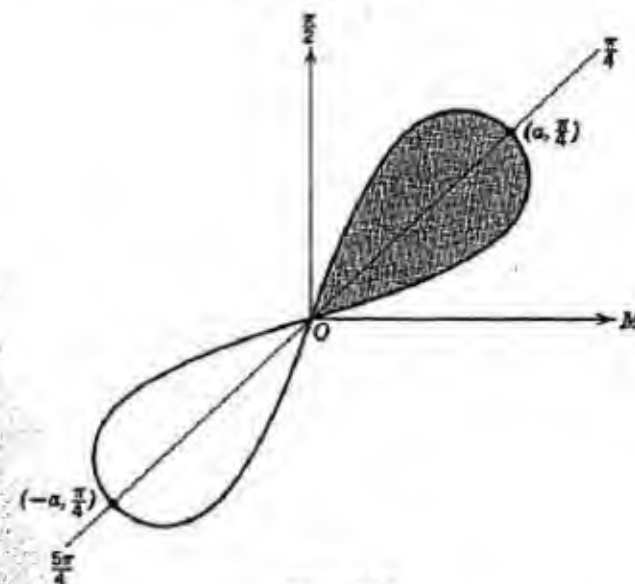


Fig. 8.32

Solución. La gráfica de la ecuación se da en la Fig. 8.32. Se quiere calcular el área del lazo sombreado. Note que este lazo encierra una región D limitada por las gráficas de

$$r = F(\theta) = a\sqrt{\sin 2\theta}, \quad \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]; \quad \theta = 0; \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Por tanto, al aplicar (19) tenemos

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} a^2 \sin 2\theta d\theta = \frac{a^2}{4} \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d(2\theta)$$

$$A = \frac{a^2}{4} [-\cos 2\theta]_0^{\pi/2} = \frac{a^2}{2}.$$

Consideremos ahora dos funciones F y G que tienen la propiedad de que

$$G(\theta) \leq F(\theta), \quad \theta \in [a; b], \quad b - a \leq 2\pi,$$

414/APLICACIONES ADICIONALES

y sea D la región limitada por las gráficas de las cuatro ecuaciones

$$r = G(\theta), \quad \theta \in [a; b]; \quad r = F(\theta), \quad \theta \in [a; b]; \quad \theta = a; \quad \theta = b$$

(vea Fig. 8.33). Por un procedimiento similar al que condujo el resultado (19) encontramos que si el área A del dominio D existe, entonces

$$A = \int_a^b \frac{1}{2} [F(\theta)^2 - G(\theta)^2] d\theta. \quad (20)$$

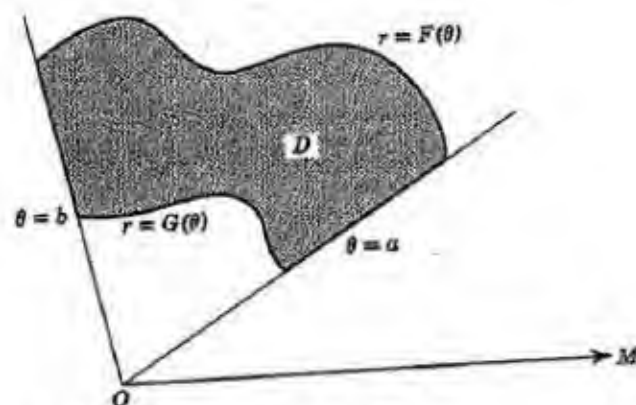


Fig. 8.33

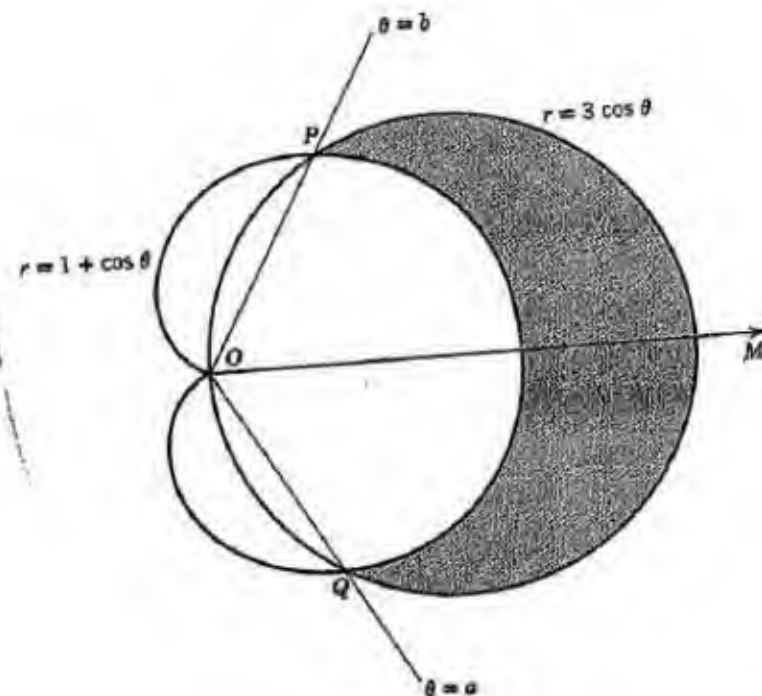


Fig. 8.34

COORDENADAS POLARES/415

Ejemplo 5. Encuentre el área de la región que está dentro del círculo con ecuación $r = 3 \cos \theta$ y fuera de la cardioides con ecuación $r = 1 + \cos \theta$.

Solución. La región cuya área se busca es la sombreada en la Fig. 8.34; vemos que está limitada por las gráficas de las cuatro ecuaciones

$$r = 3 \cos \theta, \quad \theta \in [a; b]; \quad r = 1 + \cos \theta, \quad \theta \in [a; b]; \quad \theta = a; \quad \theta = b.$$

Debemos encontrar los números a y b ; esto es debemos encontrar los puntos de intersección P y Q del círculo y la cardioides. El punto $(0, 0)$ es por supuesto un punto de intersección pero no interesa en este caso. Establezcamos

$$3 \cos \theta = 1 + \cos \theta,$$

y encontramos que si θ_1 es un ángulo que satisface la ecuación $\cos \theta = \frac{1}{2}$, entonces $(3 \cos \theta_1, \theta_1)$ será un punto de ambas curvas. Se deduce que

$$P\left(\frac{3}{2}; \frac{\pi}{3}\right) \text{ y } Q\left(\frac{3}{2}; -\frac{\pi}{3}\right)$$

son puntos de intersección, y la región cuya área queremos encontrar está limitada por las gráficas de

$$r = F(\theta) = 3 \cos \theta, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]; \quad r = G(\theta) = 1 + \cos \theta,$$

$$\theta \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]; \quad \theta = -\frac{\pi}{3}; \quad \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Al usar (20) tenemos

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1}{2} [(3 \cos \theta)^2 - (1 + \cos \theta)^2] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (4 \cos 2\theta - 2 \cos \theta + 3) d\theta \\ &= \frac{1}{2} [2 \sin 2\theta - 2 \sin \theta + 3\theta]_{-\pi/3}^{\pi/3} = \pi. \end{aligned}$$

EJERCICIOS

1. Grafique en un sistema de coordenadas polares cada uno de los siguientes puntos: $A(4, \pi/3)$, $B(-4, \pi/4)$, $C(5, 4\pi/3)$, $E(-4, \pi)$, $F(5, \pi/2)$, $G(3, -\pi)$.
2. Dé otros tres pares de coordenadas polares para cada uno de los puntos del ejercicio 1.
3. Encuentre las coordenadas rectangulares para cada uno de los puntos del ejercicio 1, suponiendo que los sistemas de coordenadas rectangulares y polares están superpuestas para que las ecuaciones (14) se verifiquen.
4. Encuentre un par de coordenadas polares para cada uno de los puntos cuyas coordenadas rectangulares son: $A(-2\sqrt{3}, 2)$, $B(-4, 4)$, $C(0, -2)$, $D(5, -5\sqrt{3})$, $E(-\sqrt{3}, -1)$.

En cada uno de los ejercicios del 5 al 10 construya la gráfica de la ecuación

416/APLICACIONES ADICIONALES

dada en un sistema de coordenadas polares; dé la ecuación en coordenadas rectangulares de la gráfica.

5. $r = 5$.

7. $\theta = \pi/3$.

9. $r = 6 \sin \theta$.

6. $r = -3$.

8. $\theta = 4\pi/3$.

10. $r = 8 \cos \theta$.

En cada uno de los ejercicios del 11 al 14 construya la gráfica de la ecuación dada en un sistema de coordenadas polares.

11. $r = 4 \sin 2\theta$ (rosa de 4 hojas).

12. $r = 2 \sin 3\theta$ (rosa de 3 hojas).

13. $r^2 = 9 \cos 2\theta$ (lemniscato).

14. $r = 2 \cos \theta - 1$ (limaçon).

En cada uno de los ejercicios del 15 al 18 la ecuación de una curva en coordenadas rectangulares. Encuentre una ecuación de esta curva en coordenadas polares. Grafique la curva en coordenadas polares o rectangulares.

15. $y^2 = 6x$.

17. $2x + 4y - 5 = 0$.

19. Use el método de la Sec. 8.5 para encontrar el área del círculo con ecuación $r = 2a \cos \theta$.

20. Un vector del origen de un sistema de coordenadas a un punto P se llama **radio vector** de P .

(a) Encuentre el área barrida por el radio vector de un punto P cuando el punto se mueve sobre una curva cuya ecuación en coordenadas polares es $r = a\theta$ desde el punto $(0, 0)$ al punto $(2\pi a, 2\pi)$.

(b) ¿Cuál es el área adicional barrida si el punto se mueve sobre la curva desde $(2\pi a, 2\pi)$ a $(4\pi a, 4\pi)$?

21. Grafique la cardioide con ecuación $r = a(1 - \cos \theta)$ y seleccione cuál de las siguientes expresiones da su área total:

(a) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta$; (b) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta$; (c) $2 \int_0^{\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta$.

Encuentre esta área.

En cada uno de los ejercicios del 22 al 25 encuentre el área de la región limitada por las gráficas de la ecuación dada. Grafique las curvas e indique la región.

22. $r = a \sec \theta$; $\theta = 0$, y $\theta = \pi/4$.

23. $r = 1/\theta$; $\theta = 1$, y $\theta = 2$.

24. $r = \theta$; $\theta = 0$, y $\theta = \pi/2$.

25. $r = 4/(1 + \cos \theta)$; $\theta = -\pi/2$, y $\theta = \pi/2$.

En cada uno de los ejercicios del 26 al 30 se da la ecuación de una curva; encuentre el área de la región limitada por dicha curva.

26. $r = a(1 + \cos \theta)$.

28. $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ (lemniscato).

29. $r = a \sin 3\theta$ (rosa de tres hojas).

30. $r = a \cos 2\theta$ (rosa de cuatro hojas).

31. Encuentre el área de la región que está fuera del círculo con ecuación $r = 2a \cos \theta$ y dentro de la cardioide con ecuación $p = a(1 + \cos \theta)$.

32. Encuentre el área de la región que está dentro del círculo con ecuación $r = \sin \theta$ y fuera de la cardioide con ecuación $r = 1 - \cos \theta$.

LONGITUD DE UNA CURVA/417

33. Encuentre el área que está dentro del círculo con ecuación $r = 4 \cos \theta$ y fuera del círculo con ecuación $r = 2$.

34. Encuentre el área limitada por la parábola con ecuación $r = 6/(1 - \cos \theta)$ y su lado recto.

8.6 Longitud de una Curva. En el capítulo 5 se definió el área de una región mediante una suma del tipo que se usó en la definición de la integral definida. En esta sección consideraremos el problema de definir la longitud de una curva, y veremos que en ciertos casos la longitud está dada por medio de una integral definida.

Suponemos conocida la longitud del segmento de recta que une los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ que es $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Sea C una curva continua simple que une los puntos A y B , como se muestra en la Fig. 8.35. Sea $\{P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}\}$ un conjunto de $(n-1)$ puntos ordenados de C entre A y B como se muestra en la Fig. 8.36, y construyamos los n segmentos de recta $AP_1, P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}B$. Las longitudes de estos segmentos se representarán por $L_1, L_2, L_3, \dots, L_n$ respectivamente y p_n representará la máxima

de estas longitudes. La longitud $S_n = \sum_{i=1}^n L_i$ de la poligonal inscrita en la curva

C es seguramente menor que la cantidad a la que llamaremos "longitud" de C . Es obvio que S_n se puede aproximar a la longitud de C aumentando el número de puntos de la curva y haciendo la longitud de cada segmento de la poligonal más pequeña. Basándonos en lo anterior establecemos la siguiente definición.

Si existe un número real L con la propiedad de que para cada $\epsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^n L_i - L \right| < \epsilon$$

para cualquier selección de puntos $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}$ satisfaciendo que $p_n < \delta$, el número L se llama **longitud de la curva C** que une los puntos A y B .

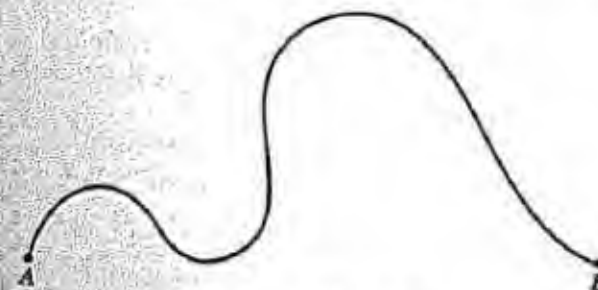


Fig. 8.35

Si una curva C tiene longitud L , se denomina **curva rectificable**.

Si los puntos A y B coinciden, la curva C es una curva cerrada simple y la definición de longitud comprende también este caso. Si C tiene un número

418/APLICACIONES ADICIONALES

finito de puntos múltiples, se formará de la unión de un número finito de curvas cerradas simples y de un número finito de curvas simples; entonces la longitud C es la suma de las longitudes (si existen) de las curvas simples y de las curvas cerradas simples.

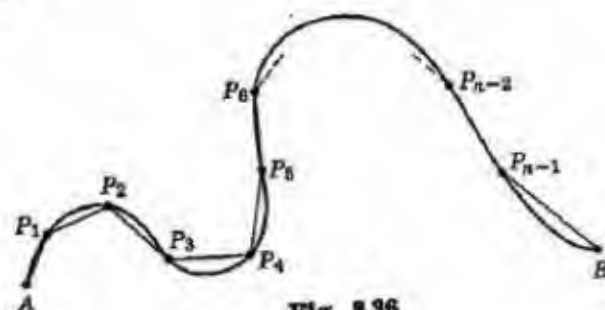


Fig. 8.36

Sea F una función con dominio $[a; b]$, supongamos que F' es continua en $[a; b]$, y consideremos la curva C gráfica de F . Veremos que C tiene una longitud L que se puede expresar como una integral definida. Sea P_n una partición de $[a; b]$ determinada por el conjunto $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n\}$ donde $x_0 = a$ y $x_n = b$; esto es,

$$P_n = \{[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{i-1}; x_i], \dots, [x_{n-1}; x_n]\}. \quad (21)$$

Entonces los puntos

$$A(x_0, F(x_0)), P_1(x_1, F(x_1)), P_2(x_2, F(x_2)), \dots, P_i(x_i, F(x_i)), \dots, P_{n-1}(x_{n-1}, F(x_{n-1})), B(x_n, F(x_n))$$

determinan una poligonal inscrita en C cuya longitud es

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (F(x_i) - F(x_{i-1}))^2}.$$

Ya que F' es continua $[a; b]$, la función F satisface la hipótesis del teorema del valor medio para derivadas (Sec. 3.10) en cada intervalo $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Por tanto existe un conjunto de números $\{t_1, t_2, t_3, \dots, t_i, \dots, t_n\}$ con las propiedades de que $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ y

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

en consecuencia

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [F'(t_i)(x_i - x_{i-1})]^2}$$

o

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [F'(t_i)]^2} (x_i - x_{i-1}). \quad (22)$$

Como F' es continua, por el teorema 10, de la Sec. 2.3 $(F')^2$ e $1 + (F')^2$ son continuas en $[a; b]$. Por lo anterior y por el teorema 6(v) de la Sec. 2.1 se

LONGITUD DE UNA CURVA/419

deduce que $[1 + (F')^2]^{1/2}$ es continua en $[a; b]$; esto es, la función G especificada por $G(x) = \sqrt{1 + [F'(x)]^2}$ es continua en $[a; b]$. Por tanto, por el teorema 1 de la Sec. 5.4 sabemos que $\int_a^b \sqrt{1 + [F'(x)]^2} dx$ existe; esto es, dado $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [F'(t_i)]^2} (x_i - x_{i-1}) - \int_a^b \sqrt{1 + [F'(x)]^2} dx \right| < \epsilon \quad (23)$$

para todas las particiones P_n y aumentos T_n con la norma de $P_n < \delta$. Nótese que la suma que se usa en (23) es la suma S_n dada por (22), además, la norma de la partición P_n tal y como se da en (21) se puede hacer menor que cualquier $\delta > 0$ haciendo que la longitud máxima de los segmentos $AP_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}B$ sea suficientemente pequeña. Por tanto, el número $\int_a^b \sqrt{1 + [F'(x)]^2} dx$ tiene la propiedad requerida por la longitud L de la curva C . Con lo anterior hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 4. Si C es la gráfica de una función F en un intervalo $[a; b]$ y si F' es continua en $[a; b]$, entonces C tiene una longitud L y

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [F'(x)]^2} dx. \quad (24)$$

Ejemplo 1. Encuentre la longitud de la parte de la parábola con ecuación $y = 4 - x^2$ que está en la parte superior del eje x (vea Fig. 8.37).

Solución. La curva cuya longitud deseamos determinar es la gráfica de

$$F = \{(x, y) | y = 4 - x^2, x \in [-2; 2]\}.$$

Como $F(x) = 4 - x^2$, $F'(x) = -2x$, vemos que F' es continua en $[-2; 2]$; por tanto se puede aplicar el teorema 4 y tenemos

$$L = \int_{-2}^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx.$$

Al usar la sustitución trigonométrica $x = \frac{1}{2} \tan \theta$ (vea Sec. 7.4) obtenemos

$$\begin{aligned} L &= \int_{\arctan(-4)}^{\arctan 4} \frac{1}{2} \sec^3 \theta d\theta = \frac{1}{4} \left[\sec \theta \tan \theta + \ln |\sec \theta + \tan \theta| \right]_{\arctan(-4)}^{\arctan 4} \\ &= 2\sqrt{17} + \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt{17} + 4}{\sqrt{17} - 4} = 2\sqrt{17} + \frac{1}{2} \ln (\sqrt{17} + 4). \end{aligned}$$

Para una curva C que es la gráfica de la ecuación $y = F(x)$, $x \in [a; b]$, donde F satisface la hipótesis del teorema 4, la ecuación (24) toma la forma

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (25)$$

420/APLICACIONES ADICIONALES

En forma semejante, si C es la gráfica de la ecuación $x = G(y)$, $y \in [c; d]$, donde G es una función cuya derivada G' es continua sobre $[c; d]$ tenemos

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy. \quad (26)$$

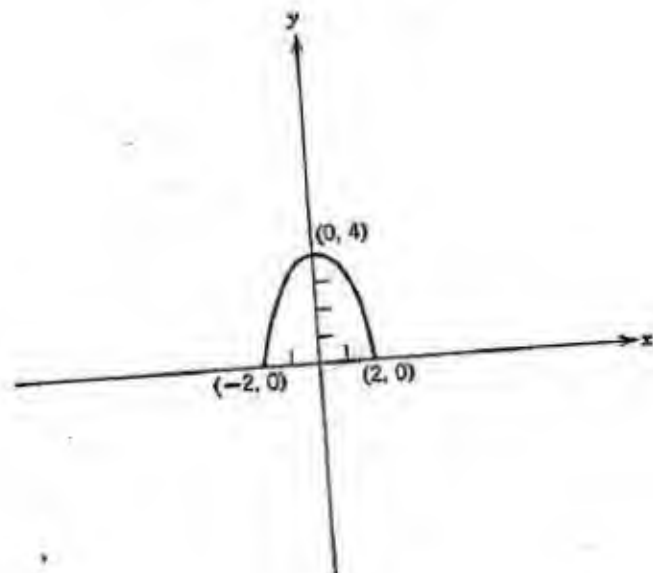


Fig. 8.37

Cuando usemos las ecuaciones (24), (25) y (26) debemos estar seguros que la función cuya gráfica se considera satisface la hipótesis del teorema 4. Por ejemplo, supongamos que deseamos encontrar la longitud de la curva C que es la gráfica de $y = \sqrt{x}$, $x \in [0; 1]$. Aquí podemos considerar C como la gráfica de la función F tal que $F(x) = \sqrt{x}$ y $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Sin embargo, F' no es continua en 0 y en consecuencia el teorema 4 no se aplica. Sin embargo podemos encontrar la longitud de C usando el teorema 4 si consideramos C como la gráfica de $x = G(y) = y^2$, $y \in [0; 1]$. Note que G' es continua en $[0; 1]$, y por tanto podemos usar (26) para encontrar

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_0^1 \sqrt{1 + 4y^2} dy.$$

Entonces si procedemos como en el ejemplo 1, obtenemos

$$L = \frac{1}{4} \left[\sec \theta \tan \theta + \ln |\sec \theta + \tan \theta| \right]_{\theta=0}^{\theta=\arctan 2} \\ = \frac{1}{4} [2\sqrt{5} + \ln(\sqrt{5} + 2)].$$

LONGITUD DE UNA CURVA/421

Si C es la gráfica de $y = F(u)$ para $u \in [a; b]$ y además F' es continua en $[a; b]$ y si $x \in (a; b)$, entonces la longitud s de la parte de C entre $A(a, F(a))$ y $P(x, F(x))$ se puede expresar en términos de x mediante

$$s = \int_a^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du. \quad (27)$$

La función S definida por

$$S(x) = s = \int_a^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du$$

se llama **función de longitud de arco** para la curva C .

Por la ecuación (27) y el teorema 9 de la Sec. 5.7 obtenemos

$$D_x s = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad (28)$$

esto es, la derivada de la función longitud de arco S es la función S' tal que

$$S'(x) = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Al recordar la definición de diferencial vemos que

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

o

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}. \quad (29)$$

Llamaremos ds a la **diferencial de la longitud de arco**; (29) es una fórmula que da la diferencial de la longitud de arco para una curva que sea la gráfica en coordenadas rectangulares, de una función con derivada continua en el intervalo considerado.

Como consecuencia de (29) ocasionalmente expresaremos la longitud de una curva C por la ecuación

$$L = \int_a^b ds = \int_{A(a, c)}^{B(b, d)} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}. \quad (30)$$

La fórmula (30) sugiere que si la curva C tiene la representación paramétrica

$$x = G(t), \quad y = H(t), \quad t \in [t_1; t_2]$$

donde $a = G(t_1)$, $b = G(t_2)$, $c = H(t_1)$, $d = H(t_2)$, entonces, como $dx = G'(t) dt$ y $dy = H'(t) dt$, la longitud L de C se puede obtener por

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[G'(t) dt]^2 + [H'(t) dt]^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[G'(t)]^2 + [H'(t)]^2} dt.$$

Como anterior hemos establecido el teorema 5.

422/APLICACIONES ADICIONALES

Teorema 5. Si C es una curva con un número finito de puntos múltiples y con representación paramétrica

$$x = G(t), \quad y = H(t), \quad t \in [t_1; t_2] \quad (31)$$

donde G' y H' son continuas en $[t_1; t_2]$, entonces C tiene una longitud L y

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[G'(t)]^2 + [H'(t)]^2} dt. \quad (32)$$

La demostración de este teorema se deja al estudiante en el ejercicio 27 de esta sección.

Para una curva con representación paramétrica (31) la fórmula para la diferencial de longitud de arco que corresponde a la fórmula (29) es

$$ds = \sqrt{[G'(t)]^2 + [H'(t)]^2} dt. \quad (33)$$

El teorema 5 nos capacita para encontrar la longitud de una curva cerrada o una curva con un número finito de puntos múltiples, ninguna de las cuales es de la gráfica de una función, supuesto que la curva tiene una representación paramétrica que satisface las condiciones de continuidad del teorema.

Ejemplo 2. Encuentre la longitud de la circunferencia de un círculo de radio 4.

Solución. Ya que un círculo no es la gráfica de una función no podemos usar el teorema 4, en consecuencia debemos dividir el círculo en partes que sean gráficas de funciones. Lo más sencillo será considerar el semicírculo mostrado en la Fig. 8.38, que es la gráfica de la función

$$F = \{(x, y) \mid y = \sqrt{16 - x^2}, x \in [-4; 4]\},$$

encontrar la longitud de este semicírculo, y multiplicarla por dos. $F(x) = \sqrt{16 - x^2}$ y $F'(x) = -\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}$. Como $F'(x)$ no está definida en -4 y 4 , F' no es continua en $[-4; 4]$, y entonces el teorema 4 no se puede aplicar. Sin embargo,

$$x = G(t) = 4 \cos t, \quad y = H(t) = 4 \sin t, \quad t \in [0; 2\pi]$$

es una representación paramétrica del círculo, y ya que $G'(t) = -4 \sin t$, $H'(t) = 4 \cos t$, sabemos que G' y H' son ambas continuas en $[0; 2\pi]$. En consecuencia, se puede usar el teorema 5 y encontramos

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{16 \sin^2 t + 16 \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} 4 dt = 8\pi.$$

Ejemplo 3. Encuentre la longitud de la curva que es gráfica de

$$x = G(t) = \cos^3 t, \quad y = H(t) = \sin^3 t, \quad t \in [0; \pi].$$

Solución. Aquí

$$G'(t) = -3 \cos^2 t \sin t \quad \text{y} \quad H'(t) = 3 \sin^2 t \cos t,$$

y vemos que G' y H' son continuas en $[0; \pi]$. Por el teorema 5 tenemos

$$L = \int_0^\pi \sqrt{9 \cos^4 t \sin^2 t + 9 \sin^4 t \cos^2 t} dt$$

ó

$$L = 3 \int_0^\pi \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} dt. \quad (34)$$

Notamos que,

$$\sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} = \cos t \sin t, \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],$$

pero

$$\sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} = -\cos t \sin t, \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right].$$

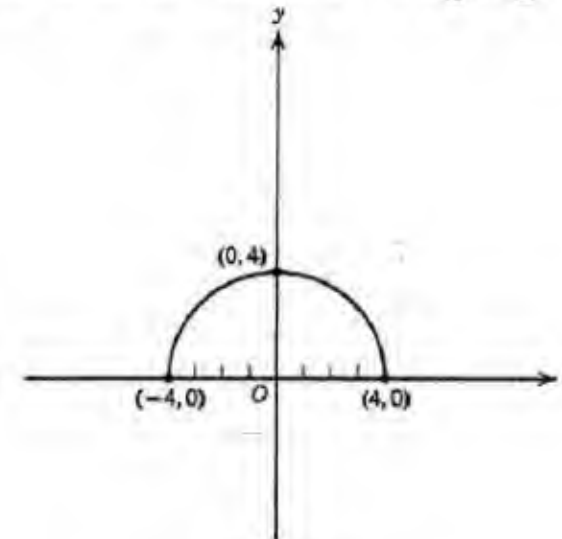


Fig. 8.38

Por tanto la ecuación (34) se transforma en

$$L = 3 \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt - 3 \int_{\pi/2}^\pi \sin t \cos t dt$$

$$L = 3 \left[\frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{\pi/2} - 3 \left[\frac{\sin^2 t}{2} \right]_{\pi/2}^\pi = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3.$$

La curva se muestra en la Fig. 8.39. Una ecuación en x y y de esta curva es

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1, \quad y \in [0; 1].$$

Observe que dy/dx no existe para $x = 0$, y en consecuencia el teorema 4 no se puede usar para calcular la longitud de la curva.

424/APLICACIONES ADICIONALES

Supongamos que un sistema de coordenadas polares se superpone a un sistema de coordenadas rectangulares como se describe en la Sec. 8.5. Sea C una curva que es la gráfica de $r = F(\theta)$, $\theta \in [\alpha; \beta]$, donde F es una función tal que F' es continua en $[\alpha; \beta]$ y consideremos el problema de determinar la longitud

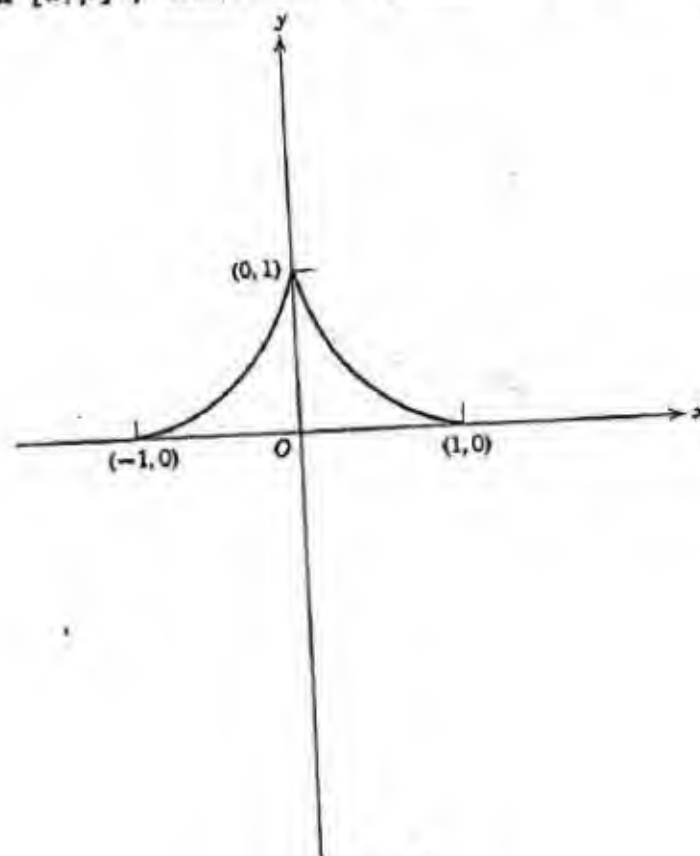


Fig. 8.39

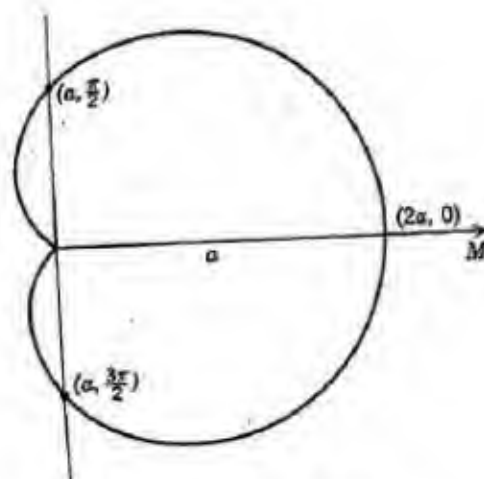


Fig. 8.40

LONGITUD DE UNA CURVA/425

L de C . Por la ecuación (14) de la Sec. 8.5 vemos que C tendrá la representación paramétrica

$$x = G(\theta) = r \cos \theta, \quad y = H(\theta) = r \sin \theta, \quad \theta \in [\alpha; \beta]$$

donde $r = F(\theta)$. Entonces

$$G'(\theta) = \cos \theta D_\theta r - r \sin \theta, \quad H'(\theta) = \sin \theta D_\theta r + r \cos \theta,$$

y

$$[G'(\theta)]^2 + [H'(\theta)]^2 = [D_\theta r]^2 + r^2.$$

En consecuencia, si usamos (32) tenemos

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (D_\theta r)^2} d\theta$$

ó

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

La fórmula para el diferencial de longitud de arco para una curva en coordenadas polares que corresponde a (29) es

$$ds = \sqrt{r^2(d\theta)^2 + (dr)^2}.$$

Ejemplo 4. Encuentre la longitud de la cardioide con ecuación $r = a(1 + \cos \theta)$.

Solución. La gráfica de esta cardioide se muestra en la Fig. 8.40. $dr/d\theta = -a \sin \theta$ y la longitud L de la curva es

$$\begin{aligned} L &= 2 \int_0^\pi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = 2 \int_0^\pi \sqrt{a^2(1 + \cos \theta)^2 + (-a \sin \theta)^2} d\theta \\ &= 2a \int_0^\pi \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos \theta} d\theta = 4a \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8a \left[\sin \frac{\theta}{2} \right]_0^\pi. \end{aligned}$$

Por tanto

$$L = 8a$$

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 6 encuentre la longitud de la gráfica de la función especificada. *Nota.* Si F' no es continua en el intervalo dado, proceda como en el ejercicio 2, usando una representación paramétrica adecuada de la gráfica de F .

1. $F = \{(x, y) \mid y = \ln \sin x, x \in [\pi/4; \pi/2]\}$.
2. $F = \{(x, y) \mid y = x^{3/2}, x \in [0; 5]\}$.
3. $F = \{(x, y) \mid y = x^{2/3}, x \in [-1; 1]\}$.
4. $F = \{(x, y) \mid 9y^2 = 8(x-1)^2, x \in [-2; 4]\}$.
5. $F = \{(x, y) \mid x = \frac{1}{2}(y+2)^{2/3}, y \in [2; 7]\}$.

Sugerencia: Use la fórmula (26).

6. $F = \{(x, y) \mid y = 6(x-1)^{3/2}, x \in [1; 5]\}$.

En cada uno de los ejercicios del 7 al 10 encuentre la longitud de la curva cuya representación paramétrica se describe.

7. $x = 2(1 - \cos t), y = 2 \sin t, t \in [0; 2\pi]$.

8. $x = 3t^2, y = 3t^3, t \in [0; \sqrt{5}]$.

9. $x = \frac{1}{2}t^2 - t, y = \frac{4}{3}t^{3/2}, t \in [0; 2]$.

10. $x = 2\sqrt{3}t^2, y = 4t - t^3, t \in [0; 2]$.

11. Encuentre la longitud de la parte de la parábola con ecuación $y^2 = 16x$ que está entre las líneas con ecuaciones $x = 0$ y $x = 4$.

12. Las coordenadas en un tiempo $t \geq 0$ de un punto $P(x, y)$ que se mueve están especificadas por $x = 1 - \cos 2t$ y $y = \cos 2t$. Encuentre la longitud de la trayectoria del punto. Demuestre que la trayectoria es una porción de parábola.

13. Encuentre el perímetro del lazo de la curva con ecuación $9y^2 = x(x-3)^2$. Trace la curva.

14. Una elipse se puede representar paramétricamente por $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta, \theta \in [0; 2\pi]$. Establezca una integral I cuyo valor sea la longitud de la elipse con eje mayor y menor 10 y 8 respectivamente. La integral no se puede calcular usando el teorema fundamental del cálculo, ya que no existe una función elemental F tal que $F'(\theta)$ sea igual al integrando de I . La integral I es una de las integrales llamadas *elípticas*.

15. Encuentre la longitud de la curva con representación paramétrica $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t, t \in [0; 2]$.

16. Encuentre la longitud de la parte de la curva con ecuación $6xy = x^4 + 3$ entre el punto con mínima ordenada y el punto con abscisa 2.

17. Encuentre la longitud de la curva con ecuación $y = e^x$ entre los puntos $(0, 1)$ y $(1, e)$ usando y como variable de integración. Esto es, use la fórmula (26).

18. Encuentre la longitud de la gráfica de $y = (a/2)(e^{x/a} + e^{-x/a}), a > 0$ de $(0, 0)$ a (x_1, y_1) .

19. Los cables de un puente colgante forman una parábola. Si la distancia entre la parte superior de los extremos de cable es de 300 mts. y el punto más bajo de los cables está a 30 mts. abajo de la parte superior de los soportes, encuentre la longitud del cable entre los soportes.

20. Encuentre la longitud de uno de los arcos de la cicloide con representación $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$.

21. Un punto se mueve en un plano sobre la curva con representación paramétrica $x = \frac{1}{2}t^2 - t, y = \frac{4}{3}t^{3/2}$, donde t representa el tiempo en segundos. Encuentre la distancia recorrida en los primeros 2 segundos.

22. Encuentre la longitud de la curva C que es la gráfica de $x = t - \cos t, y = \sin t, t \in [0; 3\pi]$.

23. Encuentre la longitud de la gráfica de $r = a\theta$ desde el origen al extremo de la primera revolución.

24. Encuentre la longitud de la gráfica de $r = e^{4\theta}$ desde el punto donde $\theta = 0$ al punto donde $\theta = 2\pi$.

25. Encuentre la longitud de la gráfica de $r = a \sin^3(\theta/3)$.

26. Encuentre la longitud de la cardioide con ecuación $r = a(1 + \sin \theta)$.

27. Dé una demostración del teorema 5. *Sugerencia:* Construya una poligonal inscrita en C mediante una partición P_n de $[t_1; t_2]$ y considere los segmentos que unen los puntos

$Q_{i-1}[F(t_{i-1}), G(t_{i-1})]$ y $Q_i[F(t_i), G(t_i)], i = 1, 2, \dots, n$.

La longitud de la poligonal será

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{[F(t_i) - F(t_{i-1})]^2 + [G(t_i) - G(t_{i-1})]^2}.$$

Aplique el teorema del valor medio para derivadas y el teorema 10 de la Sec. 5.7, y después use el método que se empleó en la demostración del teorema 4 de la Sec. 8.6.

8.7 Área de una superficie de revolución. En la Sec. 5.9 discutimos los volúmenes de sólidos de revolución generados al girar una región plana alrededor de un eje fijo. En esta sección consideraremos el problema de encontrar el área de una superficie generada al girar una curva C alrededor de un eje fijo. Restringiremos nuestra consideración a superficies donde la curva C es la gráfica, en $[a; b]$ de una función F cuya derivada F' es continua en $[a; b]$ y $F(x) \geq 0$ para $x \in [a; b]$ (Fig. 8.41). Sea S la superficie generada al girar una curva C alrededor del eje x y seleccionemos una partición P_n del intervalo $[a; b]$ determinada por el conjunto $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n\}$. El conjunto de puntos $Q_0(x_0, F(x_0)), Q_1(x_1, F(x_1)), \dots, Q_i(x_i, F(x_i)), \dots, Q_n(x_n, F(x_n))$ determina una poligonal inscrita en C , como se muestra en la Fig. 8.41. Si el segmento

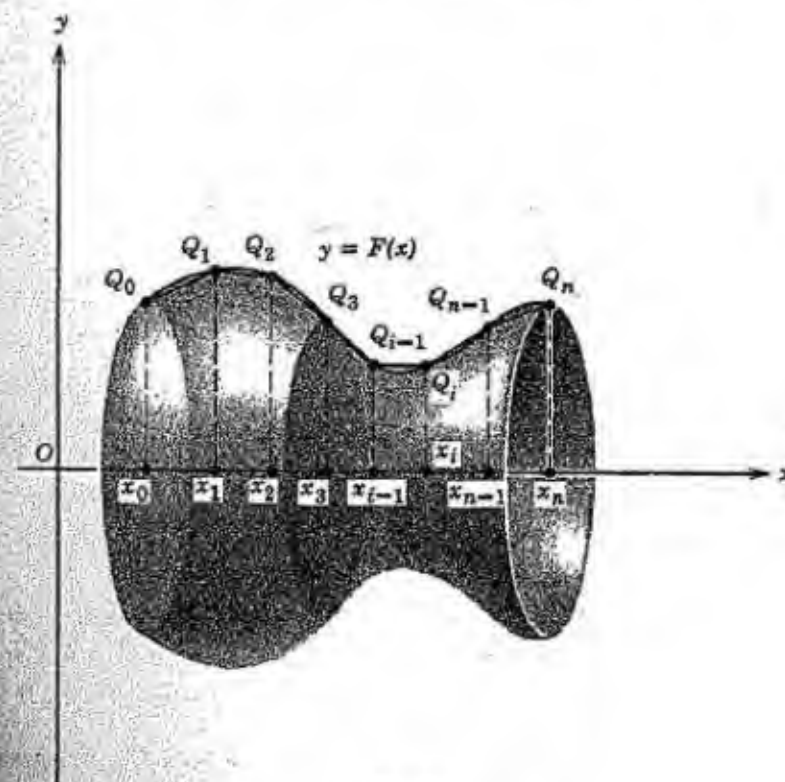


Fig. 8.41

$Q_{i-1}Q_i$ gira alrededor del eje x , la superficie generada es la superficie lateral de un cono truncado con $F(x_{i-1}), F(x_i)$ como radios de las bases y con lado

$$\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [F(x_i) - F(x_{i-1})]^2}$$

(vea Fig. 8.42). El área* de esta superficie lateral es

$$A_i = \pi[F(x_{i-1}) + F(x_i)]\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [F(x_i) - F(x_{i-1})]^2},$$

y la suma

$$\sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \pi[F(x_{i-1}) + F(x_i)]\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [F(x_i) - F(x_{i-1})]^2}$$

es una aproximación de la cantidad a la que llamaremos área de la superficie S .

Si existe un número A con la propiedad de que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^n A_i - A \right| < \varepsilon$$

para todas las particiones P_n con norma menor que δ , entonces a A se le llama **área de la superficie S** .

Como F es diferenciable en $[a; b]$, se puede aplicar el teorema del valor medio para derivadas a cada término de la suma $\sum_{i=1}^n A_i$ y existe un conjunto de números $\{t_1, t_2, t_3, \dots, t_i, \dots, t_n\}$ tal que $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ y

$$\sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \pi[F(x_{i-1}) + F(x_i)]\sqrt{1 + [F'(t_i)]^2} (x_i - x_{i-1}).$$

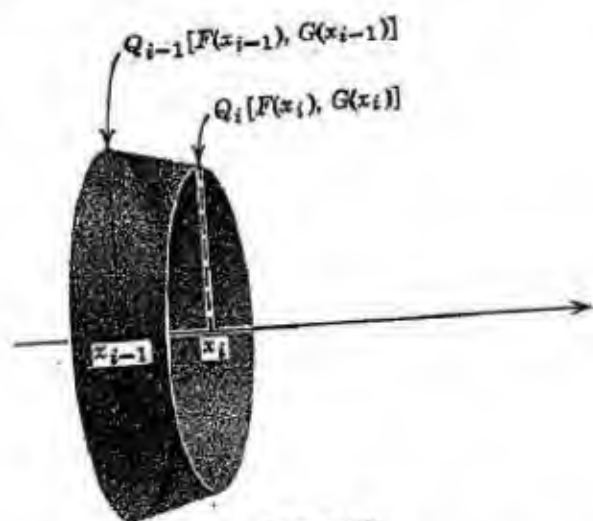


Fig. 8.42

* El área de la superficie lateral de un cono truncado es $\pi(r_1 + r_2)h$, donde r_1 y r_2 son los radios de las bases y h es el lado.

Por el teorema 10(ii) de la Sec. 5.7 se deduce que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^n \pi F(x_{i-1}) \sqrt{1 + [F'(t_i)]^2} (x_i - x_{i-1}) - \int_a^b \pi F(x) \sqrt{1 + [F'(x)]^2} dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$\left| \sum_{i=1}^n \pi F(x_i) \sqrt{1 + [F'(t_i)]^2} (x_i - x_{i-1}) - \int_a^b \pi F(x) \sqrt{1 + [F'(x)]^2} dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Para todas las particiones P_n con norma menor que δ . Por tanto,

$$\left| \sum_{i=1}^n A_i - 2 \int_a^b \pi F(x) \sqrt{1 + [F'(x)]^2} dx \right| < \varepsilon$$

para todas las particiones P_n con norma menor que δ , y en consecuencia

$$2\pi \int_a^b F(x) \sqrt{1 + [F'(x)]^2} dx$$

tiene la propiedad requerida del área A de la superficie S . Hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 6. Si F es una función $F(x) \geq 0$, cuya derivada F' es continua en $[a; b]$, y si C es la gráfica de $y = F(x)$, $x \in [a; b]$, entonces la superficie S generada al girar C alrededor del eje x tiene un área A y

$$A = 2\pi \int_a^b F(x) \sqrt{1 + [F'(x)]^2} dx \quad (35)$$

$$A = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (36)$$

Es conveniente recordar la fórmula (36) en la forma

$$A = 2\pi \int_{(a,c)}^{(b,d)} y \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \quad (37)$$

$$A = 2\pi \int_{(a,c)}^{(b,d)} y ds. \quad (38)$$

En la sección anterior la fórmula (30) sugirió la fórmula (32), y aquí la fórmula (37) proporciona un nuevo resultado si la curva C se da mediante una representación paramétrica, que se establece en el teorema 7, dado sin demostración.

Teorema 7. Si una curva C tiene una representación paramétrica

$$x = G(t), \quad y = H(t), \quad t \in [t_1; t_2]$$

430/APLICACIONES ADICIONALES

donde G' y H' son continuas y $H(t) \geq 0$ en $[t_1; t_2]$, y si C no tiene puntos múltiples para $t \in (t_1; t_2)$, entonces el área A de la superficie de revolución generada al girar C alrededor del eje x es

$$A = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} H(t) \sqrt{[G'(t)]^2 + [H'(t)]^2} dt. \quad (39)$$

Ejemplo 1. Sea C la parte de la gráfica de $y^2 = 4x$ entre los puntos $A(1, 2)$ y $B(4, 4)$. Encuentre el área de la superficie de revolución generada al girar C alrededor del eje x .

Solución. C es la gráfica de la función F especificada por $F(x) = 2\sqrt{x}$, $x \in [1, 4]$. Como $F'(x) = 1/\sqrt{x}$, F' es continua en $[1, 4]$, y si usamos la fórmula (35) tenemos

$$A = \int_1^4 2\pi \cdot 2\sqrt{x} \sqrt{1 + (1/x)} dx$$

$$\text{ó} \quad A = 4\pi \int_1^4 \sqrt{x+1} dx = 4\pi \cdot \frac{2}{3} (x+1)^{3/2} \Big|_1^4$$

Así

$$A = \frac{8\pi}{3} (5^{3/2} - 2^{3/2}).$$

Ejemplo 2. Encuentre el área de la superficie de una esfera de radio a .

Solución. Una esfera se puede considerar como la superficie de revolución generada al girar un semicírculo alrededor de su diámetro. En particular, consideremos el semicírculo que es la gráfica de la función

$$F = \{(x, y) \mid y = \sqrt{a^2 - x^2}, x \in [-a; a]\}.$$

entonces

$F(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ y $F'(x) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. Ya que $F'(x)$ no está definida en $-a$ y a , F' no es continua en $[-a; a]$, el teorema 6 no se puede aplicar. Sin embargo, usando la representación paramétrica $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $t \in [0; \pi]$ de la función F , podemos usar (39) y encontramos

$$A = 2\pi \int_0^\pi a \sin t \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2} dt,$$

ó

$$A = 2\pi a^2 \int_0^\pi \sin t dt = 2\pi a^2 [-\cos t]_0^\pi = 4\pi a^2.$$

Ejemplo 3. La curva que es la gráfica de la ecuación

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

(40)

se llama *hipocicloide*. En el ejemplo 3 de la Sec. 8.6 encontramos la longitud

SUPERFICIE DE REVOLUCION/431

de la mitad de la curva cuando $a = 1$. Encuentre el área de la superficie de revolución formada cuando la parte de la hipocicloide con ecuación (40) que está arriba del eje x gira alrededor del mismo.

Solución. Supongamos que una función $F = \{(x, y) \mid y = F(x)\}$ se determina implícitamente por (40), encontramos por diferenciación implícita que $F'(x) = dy/dx = -(y^{1/3}/x^{1/3})$. Ya que $F'(x)$ no está definida para $x = 0$, F' no es continua en $[-a; a]$, y no podemos usar el teorema 6. Por tanto buscaremos una representación paramétrica de la curva, y del ejemplo 3 de la Sec. 8.6 observamos que

$$x = G(t) = a \cos^3 t, \quad y = H(t) = a \sin^3 t, \quad t \in [0; \pi] \quad (41)$$

es una representación paramétrica. Ya que G' y H' son continuas y $y \geq 0$ en $[0; \pi]$ podemos usar (39) para encontrar

$$A = 2\pi \int_0^\pi a \sin^3 t \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt.$$

en consecuencia

$$A = 6\pi a^2 \int_0^\pi \sin^3 t \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} dt. \quad (42)$$

$\sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} = \cos t \sin t$ para $t \in [0; \pi/2]$; pero $\sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} = -\cos t \sin t$ para $t \in [\pi/2; \pi]$. Por tanto la ecuación (42) se transforma

$$A = 6\pi a^2 \left[\int_0^{\pi/2} \cos t \sin^4 t dt - \int_{\pi/2}^\pi \cos t \sin^4 t dt \right]$$

y

$$A = 6\pi a^2 \left\{ \frac{1}{5} \sin^5 t \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{5} \sin^5 t \Big|_{\pi/2}^\pi \right\} = \frac{12\pi a^2}{5}.$$

Si un sistema de coordenadas polares se superpone sobre un sistema de coordenadas rectangulares como se describió en la Sec. 8.6, con C como la gráfica* de $r = F(\theta)$, $\theta \in [\alpha; \beta]$, donde F es una función tal que F' es continua en $[\alpha; \beta]$, la fórmula (39) para el área de la superficie de revolución generada al girar C alrededor de la línea con ecuación $\theta = 0$ es

$$A = 2\pi \int_\alpha^\beta r \sin \theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

Se puede observar que la fórmula (39) se puede obtener mecánicamente de la fórmula (37) reemplazando x por $G(t)$ y por $H(t)$ en la representación paramétrica de la curva C . Este tipo de sustitución en una integral de la forma $\int_a^b U(x, y) dx$ ó $\int_c^d V(x, y) dy$ produce una integral en términos de un parámetro t que es válida bajo ciertas condiciones. Estas se expresan a continuación.

Supongamos que las integrales

* Suponemos que C no corta a la línea con ecuación $\theta = 0$.

$$\int_a^b U(x, y) dx \quad y \quad \int_c^d V(x, y) dy$$

existen, donde $U(x, y)$ y $V(x, y)$ son expresiones que contienen las variables x y y , además x y y están relacionadas de tal forma que $(x, y) \in \{(x, y) | S_{xy}\}$. Si la gráfica de S_{xy} es una curva que une los puntos (a, c) y (b, d) que tiene la representación paramétrica

$$x = G(t), \quad y = H(t), \quad t \in [t_1; t_2]$$

y si G' y H' son continuas en $[t_1; t_2]$ entonces

$$\int_a^b U(x, y) dx = \int_{t_1}^{t_2} U[G(t), H(t)] G'(t) dt$$

$$\int_c^d V(x, y) dy = \int_{t_1}^{t_2} V[G(t), H(t)] H'(t) dt.$$

Esto es las integrales $\int_a^b U(x, y) dx$ e $\int_c^d V(x, y) dy$ se pueden calcular reemplazando

$$\begin{array}{ll} x \text{ por } G(t), & y \text{ por } H(t), \\ dx \text{ por } G'(t) dt, & dy \text{ por } H'(t) dt, \end{array}$$

y usando t_1 y t_2 como límites de integración, con el punto (a, c) correspondiente al valor t_1 del parámetro y el punto (b, d) correspondiente al valor t_2 del parámetro.

Ejemplo 4. Encuentre el área de la región limitada por el eje x , las líneas con ecuaciones $x = 1$ y $x = 5$, y la curva C , que es la gráfica de la función $F = \{(x, y) | x = 1 + y^2, x \geq 0, y \geq 0\}$. Use el hecho de que C tiene la representación paramétrica $x = 1 + t^2, y = t, t \geq 0$.

Solución. Por la Sec. 5.8 sabemos que el área de la región (Fig. 8.43) se puede expresar como

$$A = \int_1^5 y dx,$$

donde $y = F(x)$. La parte de la curva C que limita a la región dada une al punto $A(1, 0)$ donde $t = 0$ y al punto $B(5, 2)$ donde $t = 2$; entonces esta parte tiene la representación $x = 1 + t^2, y = t, t \in [0; 2]$. Las condiciones para una sustitución se satisfacen, por tanto

$$A = \int_1^5 y dx = \int_0^2 t \cdot 2t dt = \int_0^2 2t^2 dt.$$

entonces

$$A = 2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^2 = \frac{16}{3}.$$

Ejemplo 5. Sea C la parte de la elipse con ecuación $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ donde $y \geq 0$. Encuentre el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor del eje x , la región limitada por C y el eje x .

Solución. Sabemos por la Sec. 5.9 que el volumen V del sólido de revolución es

$$V = \pi \int_{-a}^a y^2 dx$$

donde $(x, y) \in \{(x, y) | (x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1, x \in [-a; a], y \geq 0\}$. La curva C tiene la representación paramétrica $x = a \cos t, y = b \sin t, t \in [-\pi/2; \pi/2]$, entonces

$$V = \pi \int_{-a}^a y^2 dx = \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} b^2 \cos^2 t (a \cos t dt) = \pi ab^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 t dt.$$

En consecuencia

$$V = \pi ab^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 t) \cos t dt = \pi ab^2 \left[\sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$V = \pi ab^2 (1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}) = \frac{8}{3} \pi ab^2.$$

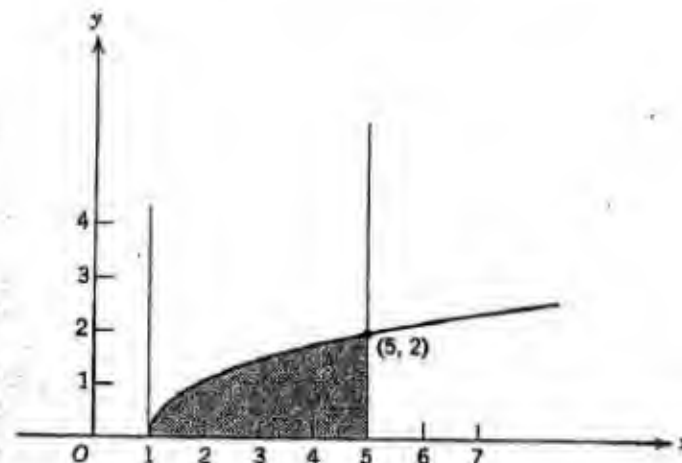


Fig. 8.43

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 10 se dan una ecuación y dos puntos. En cada ejercicio encuentre el área de la superficie de revolución generada al girar alrededor del eje x la parte de la gráfica de la ecuación que una los dos puntos dados.

1. $9y = x^3; (0, 0), (2, \frac{8}{9})$.

2. $x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0; (1, \sqrt{3}), (2, 0)$. *Sugerencia.* La parte del círculo que une a los dos puntos tiene la representación paramétrica $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, t \in [\pi/6; \pi/2]$.

3. $y^2 = 2x; (4, \sqrt{8}), (12, 2\sqrt{6})$.

4. $y^2 = 4x$; $(0, 0)$, $(24, 4\sqrt{6})$. Sugerencia. La curva que se gira tiene la representación paramétrica $x = t^2$, $y = 2t$, $t \in [0; 2\sqrt{6}]$.

5. $y = \sin x$; $(0, 0)$, $(\pi, 0)$.

6. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$; $(-1, \frac{1+e^{-2}}{2e})$, $(1, \frac{1+e^2}{2e})$.

7. $3y = x^3$; $(0, 0)$, $(3, 9)$.

8. $y = 4 - x^2$; $(-2, 0)$, $(2, 0)$.

9. $y = 9 - x^2$; $(0, 9)$, $(3, 0)$.

10. $y^2 = 4x$; $(1, 2)$, $(4, 4)$.

11. El reflector parabólico del faro de un automóvil tiene 30 cms de diámetro y 10 cms de profundidad. Encuentre su área.

12. Un arco de la cicloide con representación paramétrica $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ gira, alrededor del eje x . Encuentre el área de la superficie de revolución.

13. Una curva tiene representación paramétrica $x = t^3$, $y = t^2$. El arco que une los puntos donde $t = 0$ y $t = 2$ gira alrededor del eje x . Encuentre el área de la superficie de revolución.

14. Una curva tiene representación paramétrica $x = t$, $y = t^3$. El arco que une los puntos donde $t = 0$ y $t = 2$ gira alrededor del eje x . Encuentre el área de la superficie de revolución.

15. Encuentre el área de la región limitada por la curva con ecuaciones paramétricas $x = 2t - 1$, $y = 12t - 4t^2$ y el eje x .

16. Encuentre el área de la región limitada por un arco de la cicloide con ecuaciones paramétricas $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ y el eje x (Vea Fig. 8.7).

17. Encuentre el volumen del sólido de revolución generado al girar la región del ejercicio 16 alrededor del eje x .

18. Demuestre que la curva con ecuaciones paramétricas $x = a \sec \theta$, $y = b \tan \theta$ es una hipérbola. Use estas ecuaciones paramétricas para encontrar el área de la región limitada por la rama derecha y la línea con ecuación $x = 2a$.

19. Encuentre el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor del eje x la región del primer cuadrante limitada por un arco de la hipérbola con ecuaciones paramétricas $x = a \sec \theta$, $y = b \tan \theta$, el eje x y la línea con ecuación $x = 2a$.

20. Encuentre el área de la región limitada por la curva con ecuaciones paramétricas $x = t^2/4$, $y = 4t^3$, $t \geq 0$ y las líneas con ecuaciones $x = 1$, y $x = 4$.

21. La región limitada por la curva con representación paramétrica $x = 2t - 1$, $y = 12t - 4t^2$ y el eje x gira alrededor del eje x . Encuentre el volumen de la superficie de revolución.

22. Encuentre el área de la superficie de revolución generada al girar la parte superior de la gráfica $r = 1 + \cos \theta$ alrededor del eje polar.

23. Encuentre el área de la superficie de revolución generada al girar la parte superior de un lazo de la gráfica de $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ alrededor del eje polar.

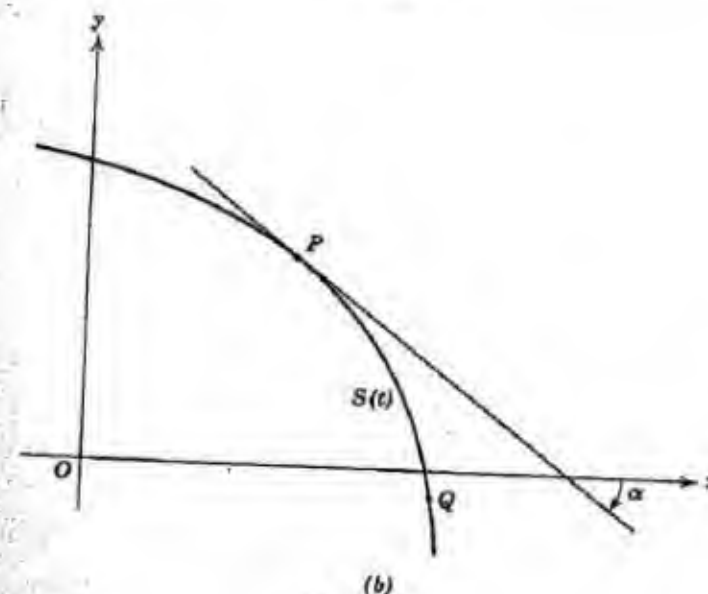
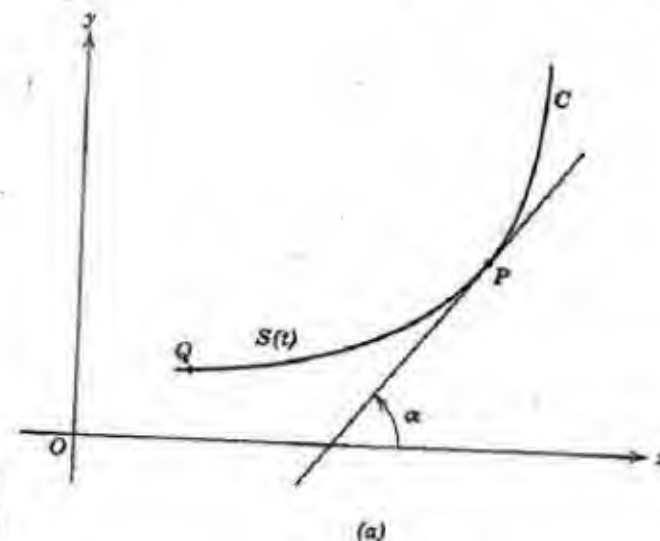


Fig. 8.44

8.8 Curvatura. Suponga que la curva C tiene la representación paramétrica

$$x = G(t), \quad y = H(t).$$

como en la Sec. 8.3, hagamos

$$x_t = D_t x = D_t G(t), \quad y_t = D_t y = D_t H(t),$$

$$x_{tt} = D_t^2 x = D_t^2 G(t), \quad y_{tt} = D_t^2 y = D_t^2 H(t).$$

Supongamos que x_{tt} y y_{tt} existen y que $x_t^2 + y_t^2 \neq 0$ en el intervalo $[t_1; t_2]$. Sean $s = S(t)$ la longitud del arco C del punto Q al punto $P(G(t), H(t))$ y

$$\alpha = A(s) = A[S(t)]$$

436/APLICACIONES ADICIONALES

al ángulo que la tangente a C en P forma con la dirección positiva del eje x , donde $-\pi/2 < \alpha \leq \pi/2$ (Fig. 8.44).

Si la razón de cambio de α con respecto a s en t existe, el valor absoluto de esta razón se llama **curvatura** de la curva C en el punto $P(G(t), H(t))$. Representaremos la curvatura por K ,

$$K = |D_s \alpha| = |D_s A(s)|. \quad (43)$$

Si para $t \in [t_1; t_2]$ se sabe que $\alpha \neq \pi/2$, entonces

$$\alpha = \arctan \frac{D_t y}{D_t x} = \arctan \frac{y_t}{x_t}. \quad (44)$$

Si suponemos la existencia de $D_t \alpha$, $D_t \alpha$ y $D_t s$, por la regla de la cadena (Sec. 3.9) tenemos que

$$D_t \alpha = D_s \alpha D_t s.$$

Pero

$$D_t s = \sqrt{x_t^2 + y_t^2} \neq 0,$$

Se deduce que

$$D_s \alpha = \frac{D_t \alpha}{D_t s}.$$

Por (44) encontramos

$$D_t \alpha = \frac{1}{1 + (y_t^2/x_t^2)} \cdot \frac{x_t y_{tt} - y_t x_{tt}}{x_t^2} = \frac{x_t y_{tt} - y_t x_{tt}}{x_t^2 + y_t^2}. \quad (45)$$

En consecuencia

$$K = \frac{|x_t y_{tt} - y_t x_{tt}|}{(x_t^2 + y_t^2)^{3/2}}. \quad (46)$$

Si para $t \in [t_1; t_2]$ se sabe que $\alpha \neq 0$, entonces

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x_t}{y_t}.$$

Note que en este caso α puede ser $\pi/2$ para algún $t_3 \in [t_1; t_2]$. Aquí

$$D_t \alpha = -\frac{1}{1 + (x_t^2/y_t^2)} \cdot \frac{y_t x_{tt} - x_t y_{tt}}{y_t^2} = \frac{x_t y_{tt} - y_t x_{tt}}{x_t^2 + y_t^2}.$$

Si usamos este resultado, $D_t s = \sqrt{x_t^2 + y_t^2}$, $D_s \alpha = \frac{D_t \alpha}{D_t s}$ y (43), obtenemos

$$K = \frac{|x_t y_{tt} - y_t x_{tt}|}{(x_t^2 + y_t^2)^{3/2}}. \quad (47)$$

Como este resultado es el mismo que (46), vemos que la curvatura K está dada por (46) para $t \in [t_1; t_2]$ aún si $\alpha = 0$ para algún $t_3 \in [t_1; t_2]$, y $\alpha = \pi/2$ para algún $t_4 \in [t_1; t_2]$.

Ejemplo 1. Para la elipse con representación paramétrica $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0; 2\pi]$, $a > b$, encuentre la curvatura (a) en cualquier punto; (b) en el punto donde $t = 0$; (c) en el punto donde $t = \pi/2$.

Solución. (a) En este caso

$$x_t = -a \sin t, \quad y_t = b \cos t,$$

$$x_{tt} = -a \cos t, \quad y_{tt} = -b \sin t.$$

Al usar (46) obtenemos

$$K = \frac{|ab \sin^2 t + ab \cos^2 t|}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}$$

como la curvatura en cualquier punto donde $t \in [0; 2\pi]$.

(b) En $t = 0$, obtenemos $K = ab/b^3 = a/b^2$. Además, para $t = 0$ encontramos $x = a$, $y = 0$, $\alpha = \pi/2$. Entonces $K = a/b^2$ es la curvatura en un extremo del eje mayor de la elipse.

(c) En $t = \pi/2$, obtenemos $K = ab/a^3 = b/a^2$. Además, para $t = \pi/2$ encontramos $x = 0$, $y = b$, $\alpha = 0$. Entonces $K = b/a^2$ es la curvatura en un extremo del eje menor.

Para una línea recta α es constante, en consecuencia $D_s \alpha = 0$, y $K = 0$; esto es, la curvatura de una recta es cero.

Para el círculo de radio a con representación paramétrica

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad t \in [0; 2\pi],$$

tenemos

$$x_t = -a \sin t, \quad y_t = a \cos t,$$

$$x_{tt} = -a \cos t, \quad y_{tt} = -a \sin t.$$

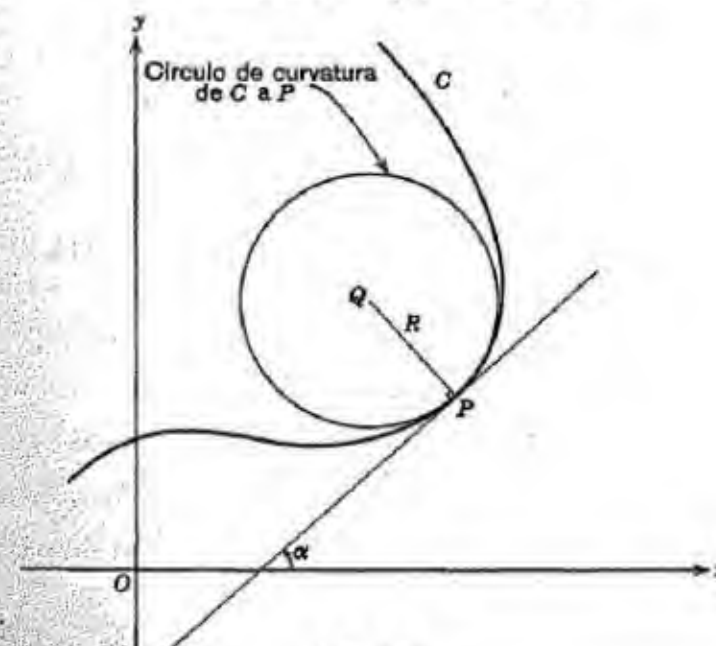


Fig. 8.45

Por (46) obtenemos

$$K = \frac{|a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t|}{(a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t)^{3/2}} = \frac{1}{a},$$

esto es, la curvatura de un círculo es constante, y en cualquier punto de la circunferencia, la curvatura es igual al recíproco del radio del círculo. Sea $P(G(t), H(t))$ un punto de C donde la curvatura no es cero. El **radio de curvatura** R de C en P es el recíproco de la curvatura de C en P ;

$$R = \frac{1}{K}.$$

El **centro de curvatura** de C en P es el punto Q de la normal a C en P en el lado cóncavo de C , cuya distancia a P es igual al radio de curvatura de R de C en P (Fig. 8.45). El **círculo de curvatura** de C en P es el círculo con centro en Q y radio R .

Ejemplo 2. Para la gráfica C de $x = G(t) = t$, $y = H(t) = \frac{1}{2}t^2$:

(a) encuentre la curvatura K en $P(G(t), H(t))$; (b) encuentre el valor de la curvatura K y el valor del radio de curvatura R en el punto P_1 donde $t = 4$, y dibuje el círculo de curvatura en este punto.

Solución. (a). En este caso

$$x_t = 1, \quad x_{tt} = 0, \quad y_t = t, \quad y_{tt} = 1.$$

Al sustituir en (46) obtenemos

$$K = \frac{\frac{1}{2} - 0}{[1 + (t^2/16)]^{3/2}} = \frac{16}{(t^2 + 16)^{3/2}}.$$

(b) Para $t = 4$, encontramos que $x = 4$, $y = 2$,

$$K = \frac{16}{(32)^{3/2}} = \frac{1}{8\sqrt{2}}, \quad y \quad R = \frac{1}{K} = 8\sqrt{2} \approx 11.31.$$

El centro de curvatura $Q_1(h, k)$ asociado con el punto $P_1(4, 2)$ es un punto de la normal a C en P_1 . Esta normal tiene por ecuación $x + y = 6$, como el lector puede verificar. El centro de curvatura $Q_1(h, k)$ está a $8\sqrt{2}$ unidades de P_1 en el lado cóncavo de la curva C .

Ya que Q_1 está sobre la normal tenemos que $h + k = 6$ y como Q_1 está a una distancia de $8\sqrt{2}$ de $(4, 2)$, tenemos que

$$(h - 4)^2 + (k - 2)^2 = 128.$$

Resolviendo estas dos ecuaciones para (h, k) obtenemos las soluciones $(-4, 10)$ y $(12, -6)$.

La solución $(-4, 10)$ está en el lado cóncavo de la curva C , entonces Q_1 es el punto $(-4, 10)$.

La gráfica de C y la gráfica del círculo de curvatura en $(4, 2)$ se muestran en la Fig. 8.46.

Algunas veces es conveniente tener fórmulas para las coordenadas del centro de curvatura en términos de las coordenadas del punto en donde se calcula la curvatura, o en términos del parámetro t .

Supongamos que la curvatura C tiene la representación paramétrica

$$x = x, \quad y = H(x), \quad (48)$$

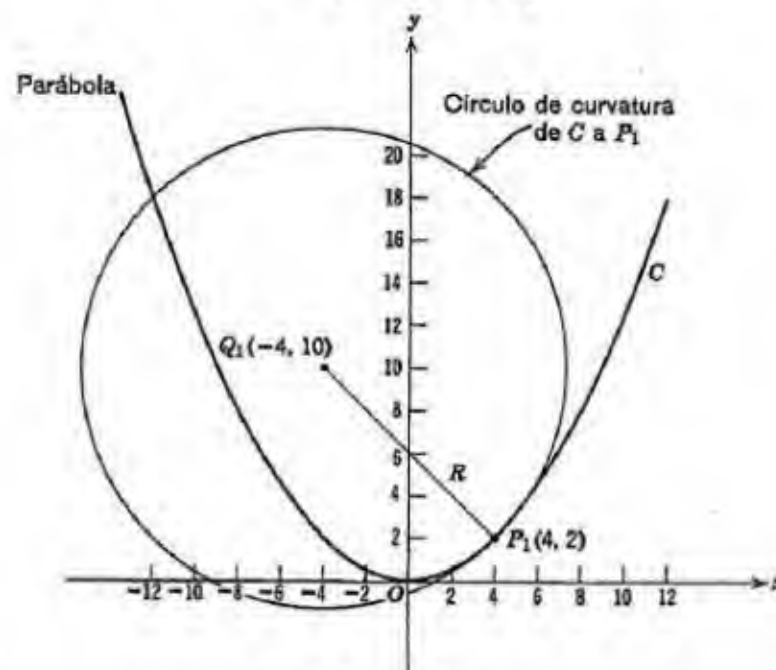


Fig. 8.46

esto es, supongamos, que C es la gráfica de la función

$$H = \{(x, y) \mid y = H(x)\}.$$

Entonces

$$x_s = 1, \quad x_{ss} = 0, \quad y_s = H'(x), \quad y_{ss} = H''(x),$$

y de la fórmula (46) tenemos que la curvatura K de la curva C en el punto $P(x, y)$ es

$$K = \frac{|H''(x)|}{\{1 + [H'(x)]^2\}^{3/2}}, \quad (49)$$

En consecuencia el radio de curvatura R de C en P es

$$R = \frac{\{1 + [H'(x)]^2\}^{3/2}}{|H''(x)|}. \quad (50)$$

Supongamos que la curvatura K de C en $P(x, y)$ existe y es diferente de cero, esto es $H''(x) \neq 0$. Sea α el ángulo definido al principio de esta sección

y sea $Q(h, k)$ el centro de curvatura de C en P . En el caso que se muestra en la Fig. 8.47

$$H''(x) > 0, \quad H'(x) > 0, \quad x > h, \quad y < k,$$

entonces $0 < \alpha < \pi/2$. Dibujamos QN y PM perpendiculares al eje x . Note que $\angle SQP = \alpha$. De la Fig. 8.47 vemos que

$$h = ON = OM - SP = x - R \sin \alpha,$$

$$k = NQ = MP + SQ = y + R \cos \alpha.$$

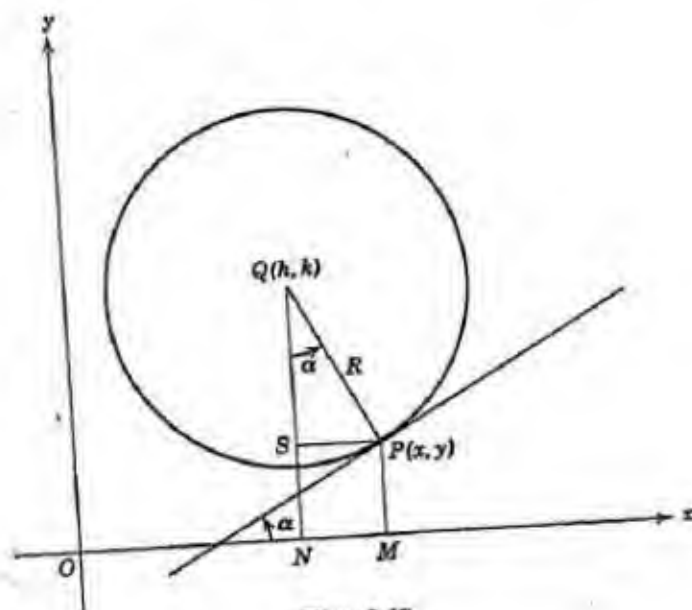


Fig. 8.47

Como $\tan \alpha = H'(x)$ y $0 < \alpha < \pi/2$, tenemos

$$\sin \alpha = \frac{H'(x)}{\sqrt{1 + [H'(x)]^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + [H'(x)]^2}}.$$

Para este caso como $H''(x) > 0$, $|H''(x)| = H''(x)$. En este caso (50) se transforma en

$$R = \frac{(1 + [H'(x)]^2)^{3/2}}{H''(x)}.$$

Si sustituimos los valores de $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, y R en las expresiones dadas para h y k , obtenemos

$$h = x - \frac{H'(x)(1 + [H'(x)]^2)}{H''(x)}; \quad k = y + \frac{1 + [H'(x)]^2}{H''(x)}. \quad (51)$$

Note que si

$$x = G_1(t), \quad y = G_2(t)$$

es una representación paramétrica de la curva C , entonces

$$H'(x) = \frac{y_t}{x_t} \quad \text{y} \quad H''(x) = \frac{x_t y_{tt} - y_t x_{tt}}{x_t^3}.$$

Sabemos que $x_t \neq 0$, puesto que $\alpha \neq \pi/2$. Sustituyendo estas expresiones para $H'(x)$ y $H''(x)$ en (51), obtenemos

$$h = x - \frac{y_t(x_t^2 + y_t^2)}{x_t y_{tt} - y_t x_{tt}} \quad k = y + \frac{x_t(x_t^2 + y_t^2)}{x_t y_{tt} - y_t x_{tt}} \quad (52)$$

Aunque hemos obtenido las fórmulas (52) para el caso en que $H''(x) > 0$ y $H'(x) > 0$, se puede demostrar que estas fórmulas se verifican si C tiene la representación paramétrica $x = G(t)$, $y = H(t)$, sujeta a las condiciones establecidas al principio de esta sección.

Cuando un punto $P(G(t), H(t))$ se mueve a lo largo de la curva C , el centro de curvatura $K(h, k)$ se mueve a lo largo de una segunda curva que se llama la **evoluta** de C . Usando

$$x = G(t), \quad y = H(t)$$

podemos expresar h y k como en (52) en términos de t y obtener una representación paramétrica de la evoluta de C .

Ejemplo 3 (a). Encuentre una representación paramétrica de la evoluta de la curva C que tiene la representación paramétrica $x = t$, $y = \frac{1}{8}t^2$. (b) Grafique C y su evoluta en un mismo sistema de coordenadas. (c) Use su resultado para encontrar el centro de curvatura correspondiente al punto de C donde $t = 4$.

Solución. (a) En este caso

$$x_t = 1, \quad x_{tt} = 0, \quad y_t = t/4, \quad y_{tt} = 1/4.$$

Si sustituimos $x, y, x_t, y_t, x_{tt}, y_{tt}$ en la fórmula (52) obtenemos

$$h = t - \frac{(t/4)[1 + (t^2/16)]}{\frac{1}{4}}; \quad k = \frac{1}{8}t^2 + \frac{1[1 + (t^2/16)]}{\frac{1}{4}},$$

$$h = t - t - \frac{t^3}{16}; \quad k = \frac{1}{8}t^2 + 4 + \frac{t^2}{4};$$

$$h = -\frac{t^3}{16}; \quad k = \frac{3}{8}t^2 + 4.$$

(b) La gráfica de C y su evoluta se muestran en la Fig. 8.48.

(c) Para $t = 4$, $x = 4$, $y = 2$. Al usar las fórmulas que expresan a h y k y que encontramos en (a), o sea

$$h = -\frac{t^3}{16}; \quad k = \frac{3}{8}t^2 + 4;$$

resulta que para $t = 4$, $h = -4$ y $k = 10$. Note que estos resultados están de acuerdo con los obtenidos en el ejemplo 2(b).

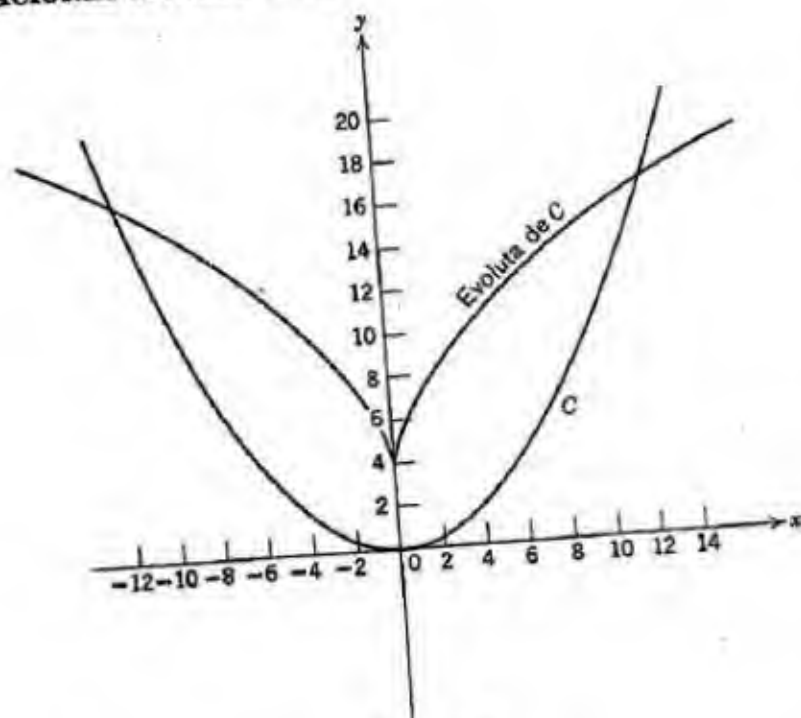


Fig. 8.48

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 4 encuentre una representación paramétrica de la evoluta de la curva C a partir de la representación paramétrica dada. Encuentre el radio de curvatura y el centro de curvatura de C en el punto especificado P_1 . En cada caso grafique C y el círculo de curvatura de C en P_1 .

1. $x = t, y = 4/t; P_1(1, 4)$.

2. $x = t^2, y = 2t + 1; P_1$ es el punto donde $t = \sqrt{3}$.

3. $x = 2t, y = t^3/3; P_1$ es el punto donde $t = 1$.

4. $x = 2t, y = 4 - 4t^2; P_1$ es el punto donde $t = 2$.

En cada uno de los ejercicios del 5 al 8 encuentre una representación paramétrica de la evoluta de la curva C cuya representación paramétrica se da. Grafique C y su evoluta en el mismo sistema de coordenadas.

5. $x = 2t, y = 2t^2 - 1$.

6. $x = 4t, y = 2/t$.

7. $x = \sin 2t, y = \cos 2t$.

8. $x = a \cos t, y = b \sin t$.

9. Encuentre una ecuación en x y y del círculo de curvatura de la curva C del ejercicio 1 en $P_1(1, 4)$. Note que $xy = 4$ es una ecuación de C en x y y , y encuentre los puntos de intersección de C y su círculo de curvatura.

10. Demuestre que el círculo de curvatura de la curva C del ejercicio 9 en $P_1(2, 2)$ interseca a C solamente en un punto, el punto P_1 .

11. Demuestre que la evoluta de la cicloide con representación paramétrica $x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta)$, tiene la representación paramétrica $h = a(\theta + \sin \theta), k = -a(1 - \cos \theta)$. Además demuestre que por medio de las transformaciones

$$h = X - \pi a, \quad k = Y - 2a, \quad \theta = \theta' - \pi,$$

la representación paramétrica de la evoluta de la cicloide es

$$X = a(\theta' - \sin \theta'), \quad Y = a(1 - \cos \theta').$$

La representación anterior es de una cicloide; demuestre que la evoluta de una cicloide es una cicloide, los círculos generatrices de las cicloides tienen el mismo radio.

12. Use la fórmula (49) para encontrar la curvatura K de la gráfica de $2xy = x^2$ en (x, y) . ¿En qué punto de esta gráfica la curvatura es máxima?

13. Demuestre que una ecuación de la evoluta de la gráfica de $x = t, y = 2t^{3/2}$ es $k^2 = \frac{4}{27}(h - 2)^3$.

14. Demuestre que el radio de curvatura R de la cicloide con representación paramétrica $x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta), \theta \in [0; 2\pi]$ es $R = 4a|\sin \frac{1}{2}\theta|$. ¿Para qué valores de θ el valor de R es máximo?

15. ¿Cuál es el valor de la curvatura en un punto de inflexión de una curva? ¿Por qué?

16. Encuentre el punto de la gráfica de $y = e^x$ donde la curvatura K es máxima. Halle este valor máximo.

En cada uno de los ejercicios del 17 al 20 encuentre el radio de curvatura y el centro de curvatura de la curva C en el punto P_1 . Construya las gráficas de C y del círculo de curvatura en el mismo sistema de coordenadas.

17. $y = \sin x, P_1(\frac{3}{2}\pi, -1)$.

18. $y = e^x, P_1(0, 1)$.

19. $y = x^2 - 6x + 16, P_1(3, 7)$.

20. $y = e^{-x}, P_1(0, 1)$.

21. Una curva de una vía de ferrocarril tiene la forma de la gráfica de $y = \frac{1}{8}x^3$. Con qué razón cambia un carro sobre esta vía su dirección, cuando pasa (a) por el punto $(2, \frac{1}{2})$; (b) el punto $(1; \frac{1}{8})$.

3.9 Fórmula de Taylor con residuo para $F(x)$. Recordando el teorema del Valor Medio para Derivadas de la sección 3.10 observamos que el teorema 8 es una variante del mismo.

Teorema 8. Supongamos que $F = \{(x, y) | y = F(x)\}$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a; b]$ y que $F'(x)$ existe en el intervalo abierto $(a; b)$ entonces existe un número c tal que $a < c < b$ y

$$F(b) = F(a) + (b - a)F'(c), \quad x \in (a; b]. \quad (53)$$

En esta sección encontramos conveniente representar la n -ésima derivada de F por $F^{(n)}$; esto es $F^{(n)}(x)$ representa la n -ésima derivada de $F(x)$ con respecto a x (vea la Sec. 3.4), y si $F = \{(x, y) | y = F(x)\}$, entonces $F^{(n)}(x) = D_x^n y$.

Estamos interesados en una extensión del teorema 8 bajo la hipótesis de que para un entero $n > 1$, $F^{(n)}$ es continua en el intervalo cerrado $[a; b]$ y $F^{(n+1)}(x)$ existe en el intervalo abierto $(a; b)$. Note que si $F^{(n)}$ es continua en $[a; b]$ entonces cada una de las derivadas $F^{(i)}$ para $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ es continua en $[a; b]$. (Vea el teorema 1 de la Sec. 3.2: Si F es derivable en x_0 , entonces F es continua en x_0 .)

La extensión del teorema del valor medio para derivadas proporciona una aproximación polinomial de cualquier $F(x)$ que satisfaga las condiciones establecidas. Por ejemplo, veremos que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x). \quad (54)$$

En particular

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + R_5(x);$$

donde $\frac{x^5}{120} < R_5(x) < e \frac{x^5}{120}$ para $0 \leq x \leq 1$. Por tanto, para $x \in [0; 1]$, e^x se puede aproximar mediante un polinomio de cuarto grado.

Antes de desarrollar esta extensión del teorema del valor medio, consideraremos el caso de una función polinomial y estableceremos los teoremas 9 y 10.

Teorema 9. Si $F = \{(x, y) \mid y = F(x)\}$ es una función polinomial de grado n , entonces para cualquier número real a tenemos

$$F(x) = F(a) + \frac{F'(a)}{1!}(x-a) + \frac{F''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (55)$$

Demostración: Ya que por hipótesis $F(x)$ es un polinomio de grado n , lo podemos expresar en la siguiente forma

$$F(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n, \quad (56)$$

donde $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ son números reales y $c_n \neq 0$. Si derivamos obtenemos las siguientes expresiones para las n primeras derivadas de $F(x)$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots + nc_n(x-a)^{n-1} \\ F''(x) &= 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x-a) + \cdots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2} \\ F'''(x) &= 3 \cdot 2c_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)c_n(x-a)^{n-3} \\ &\vdots \\ F^{(n)}(x) &= n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2c_n. \end{aligned}$$

$$F^{(n)}(x) =$$

De estas ecuaciones obtenemos

$$F(a) = c_0, \quad F'(a) = c_1, \quad F''(a) = 2! c_2, \quad F'''(a) = 3! c_3, \dots, \quad F^{(n)}(a) = n! c_n,$$

en consecuencia

$$c_0 = F(a), \quad c_1 = F'(a), \quad c_2 = \frac{1}{2!} F''(a), \quad c_3 = \frac{1}{3!} F'''(a), \dots, \quad c_n = \frac{1}{n!} F^{(n)}(a).$$

Si sustituimos estos valores de c_0, c_1, \dots, c_n en (56) obtenemos (55). ■

En este caso se dice que (55) es el *desarrollo en potencias* de $(x-a)$ del polinomio $F(x)$ de grado n . Por ejemplo,

$$x^4 - 3x^2 + 2x - 5 = -5 + 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4,$$

decimos que $F(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 5$ se ha desarrollado en potencias de $x-1$.

El teorema 10 es una consecuencia inmediata del teorema 9.

Teorema 10. Si $F = \{(x, y) \mid y = F(x)\}$ es una función tal que $F^{(n)}(a)$ existe y si $P_n = \{(x, y) \mid y = P_n(x)\}$ es una función polinomial de grado n que

$$P_n(a) = F(a), \quad P_n^{(i)}(a) = F^{(i)}(a), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

entonces

$$P_n(x) = F(a) + \frac{F'(a)}{1!}(x-a) + \frac{F''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (57)$$

Llamaremos al polinomio $P_n(x)$ dado por (57) **polinomio de Taylor** de grado n de $F(x)$ en a .

Ejemplo 1. Verifique que

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

es el polinomio de Taylor de grado n de $F(x) = e^x$ en 0.

Solución. En este caso

$$F(x) = e^x, \quad F'(x) = e^x, \quad F''(x) = e^x, \dots, F^{(n)}(x) = e^x;$$

$$F(0) = 1, \quad F'(0) = 1, \quad F''(0) = 1, \dots, F^{(n)}(0) = 1.$$

Si sustituimos estos valores en (57) obtenemos el resultado deseado.

Ejemplo 2. Encuentre el polinomio de Taylor de grado n de $F(x) = \sin x$ en $\pi/6$.

Solución. En este caso

$$F(x) = \sin x, \quad F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2};$$

$$F'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad F'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$F''(x) = -\sin x = \sin(x + \pi), \quad F''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2};$$

$$F'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right), \quad F'''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$F^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad F^{(n)}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Si aplicamos (57) obtenemos

$$P_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2!} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{3!} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \dots \\ + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^n.$$

Supongamos que $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor de grado n de $F(x)$ en a . Una pregunta importante es: ¿Qué tanto se aproxima $P_n(x)$ a $F(x)$ para valores de x diferentes de a ? Esto es, ¿cuál es el valor de $F(x_1) - P_n(x_1)$ para $x_1 \neq a$? Debemos esperar que $F(x_1) - P_n(x_1)$ sea pequeño para x_1 próxima a a , ya que el punto $(a, F(a))$ es común a la gráfica de $y = F(x)$ y la de $y = P_n(x)$; además la gráfica de $y = P_n(x)$ tiene la misma pendiente que la de $y = F(x)$ en este punto y las razones de cambio en las pendientes en el punto $(a, F(a))$ son las mismas. Representaremos la diferencia entre $F(x)$ y $P_n(x)$ por $R_{n+1}(x)$:

$$R_{n+1}(x) = F(x) - P_n(x). \quad (58)$$

Si $F^{(n)}$ es continua en $[a; b]$ y si $F^{(n+1)}(x)$ existe en $(a; b)$, podemos encontrar una expresión para $R_{n+1}(x)$ cuando $x \in (a; b)$. Para $x_1 \in (a; b)$, sea Q el número definido por

$$F(x_1) - P_n(x_1) = (x_1 - a)^{n+1} Q. \quad (59)$$

Para determinar Q consideraremos la función G especificada por

$$G(x) = F(x) - P_n(x) - (x - a)^{n+1} Q. \quad (60)$$

Como el polinomio $P_n(x)$ posee derivadas de todas las órdenes para cualquier valor de x , se deduce de (60) que $G^{(n+1)}(x)$ existe en $(a; b)$. Además las derivadas de la función polinomial P_n son continuas en \mathbb{R} , y sobre $[a; b]$. Entonces $G^{(n)}$ es continua en $[a; b]$. (Vea el teorema 10(i) de la Sec. 2.3) Si las funciones H_1 y H_2 son continuas en los intervalos S_1 y S_2 respectivamente, entonces $H_1 + H_2$ es continua en el intervalo $S_1 \cap S_2$. Es obvio por (60) que $G(a) = 0$; y también por (59) y (60) que $G(x_1) = 0$. Por tanto el teorema de Rolle (Sec. 3.11) es aplicable a G en $[a; x_1]$, y concluimos que existe un número c_1 tal que

$$G'(c_1) = 0 \quad \text{donde } a < c_1 < x_1.$$

Además

$$G'(a) = F'(a) - P'_n(a) = 0.$$

En consecuencia, podemos aplicar el teorema de Rolle a G' en $[a; c_1]$ y concluimos que existe un número c_2 tal que

$$G''(c_2) = 0 \quad \text{donde } a < c_2 < c_1.$$

El razonamiento se puede repetir ya que

$$G''(a) = F''(a) - P''_n(a) = 0,$$

y $F'''(x)$ existe en $(a; c_2)$. Entonces concluimos que existe un número c_3 tal que

$$G'''(c_3) = 0 \quad \text{donde } a < c_3 < c_2.$$

continuyendo de esta manera estableceremos la existencia de un conjunto de números

$$c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, z$$

tales que

$$G'(c_1) = 0, \quad G''(c_2) = 0, \quad G'''(c_3) = 0, \dots, G^{(n)}(c_n) = 0, \quad G^{(n+1)}(z) = 0$$

donde

$$a < z < c_n < \dots < c_3 < c_2 < c_1 < x_1.$$

La conclusión que nos interesa es que existe un número z tal que

$$G^{(n+1)}(z) = 0 \quad \text{donde } a < z < x_1. \quad (61)$$

Por (60) encontramos que $G^{(n+1)}(x)$ está dado por

$$G^{(n+1)}(x) = F^{(n+1)}(x) - (n+1)! Q.$$

Como una consecuencia de esta última igualdad y la conclusión (61) tenemos

$$Q = \frac{F^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} \quad \text{donde } a < z < x_1.$$

Sustituyendo este valor de Q en (59) obtenemos

$$F(x_1) - P_n(x_1) = (x_1 - a)^{n+1} \frac{F^{(n+1)}(z)}{(n+1)!},$$

y en consecuencia

$$R_{n+1}(x_1) = F(x_1) - P_n(x_1) = \frac{F^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x_1 - a)^{n+1}$$

donde $a < z < x_1$.

De este resultado se deduce que si $x \in (a; b)$, existe un número z tal que $a < z < x$ y

$$R_{n+1}(x) = \frac{F^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}; \quad x \in (a; b).$$

Por (57) se ve que $P_n(a) = F(a)$; por tanto, se deduce de (58) que $R_{n+1}(a) = 0$ para $x = a$.

Hemos establecido la siguiente generalización del teorema 8.

Teorema 11. Si $F = \{(x, y) \mid y = F(x)\}$ es una función con la propiedad de que n es un entero $F^{(n)}$ es continua en el intervalo cerrado $[a; b]$ y si $F^{(n+1)}(x)$ existe en el intervalo abierto $(a; b)$, entonces para $x \in [a; b]$ existe un número z tal que $a < z < x$ y

$$F(x) = F(a) + \frac{F'(a)}{1!} (x - a) + \frac{F''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots + \frac{F^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \\ + R_{n+1}(x) \quad (62)$$

donde

$$R_{n+1}(x) = \frac{F^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \text{ para } x \neq a; \quad (63)$$

y

$$R_{n+1}(x) = 0 \text{ para } x = a.$$

La igualdad (62) se llama **fórmula de Taylor con residuo para $F(x)$** , el residuo es el término $R_{n+1}(x)$ de (63). Como el residuo $R_{n+1}(x)$ sigue a $(n+1)$ términos en (62), algunas veces se le llama **residuo después de $(n+1)$ términos**. El teorema 11 frecuentemente se llama **teorema de Taylor**.

La fórmula de Taylor con residuo expresa $F(x)$, para una función $F = \{(x, y) | y = F(x)\}$ dada, como un polinomio del grado $(n+1)$ en $(x-a)$. En este polinomio los coeficientes de los términos de grado menor o igual a n se pueden calcular cuando se da la función F y el número a ; sin embargo, el coeficiente del término de grado $n+1$, $\frac{F^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}$; comúnmente no se puede calcular ya que todo lo que sabemos de z es que $a < z < x$.

Cuando para un $F(x)$ en particular se han calculado los coeficientes de los términos de grado menor o igual a n en la fórmula de Taylor, y se han expresado los coeficientes del residuo en términos de z , decimos que $F(x)$ se ha **desarrollado en potencias de $(x-a)$** por la fórmula de Taylor con residuo.

Ejemplo 3. Desarrolle $F(x) = \sin x$ en potencias de $x - (\pi/6)$ por la fórmula de Taylor con residuo.

Solución. En el ejemplo 2 encontramos la información necesaria para obtener el resultado pedido, excepto la expresión para $F^{(n+1)}(x)$. Como $F^{(n+1)}(x) = D_x F^{(n)}(x)$, obtenemos

$$F^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + \frac{n+1}{2}\pi\right), \text{ y } F^{(n+1)}(z) = \sin\left(z + \frac{n+1}{2}\pi\right).$$

Al usar este resultado y los resultados del ejemplo 2, obtenemos

$$\begin{aligned} \sin x = & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \cdots \\ & + \frac{\sin[(\pi/6) + n(\pi/2)]}{n!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^n + R_{n+1}(x), \end{aligned} \quad (64)$$

donde

$$R_{n+1}(x) = \frac{\sin\left(z + \frac{n+1}{2}\pi\right)}{(n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^{n+1}, \quad \frac{\pi}{6} < z < x. \quad (65)$$

El desarrollo (64) es válido para $x \geq \pi/6$, ya que $F^{(n)}$ es continua en \mathbb{R} y $F^{(n+1)}(x)$ existe en \mathbb{R} . [Veremos más tarde que (64) es válida para $x \in \mathbb{R}$].

Usemos la fórmula (64) para aproximar $\sin x$ para x próxima a $\pi/6$,

gamos $x = 31\pi/180$, esto es usemos (64) para encontrar el valor aproximado de $\sin 31^\circ$. Por (64) obtenemos

$$\begin{aligned} \sin 31^\circ = \sin \frac{31\pi}{180} = & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{180} - \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{\pi}{180}\right)^3 + \cdots \\ & + \frac{\sin[(\pi/6) + n(\pi/2)]}{n!} \left(\frac{\pi}{180}\right)^n + R_{n+1}\left(\frac{31\pi}{180}\right), \end{aligned}$$

al usar (65) tenemos

$$R_{n+1}\left(\frac{31\pi}{180}\right) = \frac{\sin\left(z + \frac{n+1}{2}\pi\right)}{(n+1)!} \left(\frac{31\pi}{180} - \frac{\pi}{6}\right)^{n+1}, \quad \frac{\pi}{6} < z < \frac{31\pi}{180};$$

Como $|\sin u| \leq 1$, deducimos que

$$\left| R_{n+1}\left(\frac{31\pi}{180}\right) \right| \leq \frac{\left| (31\pi/180) - (\pi/6) \right|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Si tomamos $n = 4$, entonces

$$\left| R_{n+1}\left(\frac{31\pi}{180}\right) \right| \leq 0.000,000,000,01,$$

$\sin 31^\circ = 0.515038075$, este valor es correcto al menos hasta la novena cifra decimal.

El residuo $R_{n+1}(x)$ representa el error cometido cuando el polinomio $P_n(x)$ se usa para aproximar $F(x)$ para cualquier valor permitido de x . En algunos casos es posible para un valor dado x_1 de x escoger a y n de tal manera que si $a < x < x_1$ entonces el valor absoluto de $R_{n+1}(x_1)$ es menor que un "error permitido" o un número positivo especificado ε . Supongamos que existe un número positivo M tal que $|F^{(n+1)}(z)| \leq M$. Entonces por (63)

$$|R_{n+1}(x_1)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x_1 - a|^{n+1}. \quad (66)$$

Si podemos escoger n de tal manera que

$$\frac{M}{(n+1)!} |x_1 - a|^{n+1} < \varepsilon,$$

entonces $P_n(x_1)$ aproxima $F(x_1)$ de tal manera que

$$|P_n(x_1) - F(x_1)| < \varepsilon,$$

es decir que $P_n(x_1)$ difiere de $F(x_1)$ por una cantidad menor que ε .Si en la fórmula de Taylor con residuo tomamos $a = 0$, obtenemos

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x), \quad (67)$$

donde

$$R_{n+1}(x) = \frac{F^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < z < x,$$

y

$$R_{n+1}(x) = 0, \quad \text{por } x = 0.$$

(68)

La igualdad (67) se llama **fórmula de Maclaurin con residuo para $F(x)$** , el residuo es el término $R_{n+1}(x)$ de (68). Se supuso que $F^{(n)}$ es continua en el intervalo cerrado $[0; b]$, que $F^{(n+1)}(x)$ existe en el intervalo abierto $(0; b)$, y que $x \in [0; b]$. Decimos que $F(x)$ se ha desarrollado en potencias de x por la fórmula de Maclaurin cuando se han calculado los coeficientes de los términos de grado menor o igual a n , en la fórmula de Maclaurin y el coeficiente del residuo se ha expresado en términos de z .

Ejemplo 4. Desarrolle $F(x) = e^x$ en potencias de x por la fórmula de Maclaurin con residuo.

Solución. Por el ejemplo 1 y del hecho de que

$$F^{(n+1)}(x) = e^x, \quad \text{y } F^{(n+1)}(z) = e^z,$$

obtenemos

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x),$$

donde

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^z, \quad 0 < z < x.$$

Ejemplo 5. Use los primeros cinco términos en el desarrollo de e^x del ejemplo 4, esto es use el polinomio

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!},$$

para calcular $e^{0.2}$ y dé el error estimado en este cálculo.

Solución. Por el ejemplo 4, tenemos

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + R_5(x),$$

donde

$$R_5(x) = \frac{x^5}{5!} e^z, \quad 0 < z < x.$$

Para $x \in [0; 1]$

$$1 \leq e^z \leq e, \quad 1 < e^z < e,$$

y en consecuencia

$$\frac{x^5}{5!} < R_5(x) < e \frac{x^5}{5!}; \quad x \in [0; 1].$$

En particular,

$$\frac{(0.2)^5}{120} < R_5(0.2) < e \frac{(0.2)^5}{120}.$$

$$\text{como } \frac{(0.2)^5}{120} = \frac{0.00032}{120} = \frac{0.00008}{3} \text{ y } e < 3, \text{ deducimos que}$$

$$\frac{0.00008}{3} < R_5(0.2) < 0.00008.$$

Sustituyendo tenemos

$$P_4(0.2) = 1 + 0.2 + \frac{0.04}{2} + \frac{0.008}{6} + \frac{0.0016}{24} = 1.2214 \text{ exactamente}$$

En conclusión, se tiene

$$e^{0.2} \approx 1.2214$$

con un error menor que 0.00008 y mayor que $\frac{0.00008}{3}$.

Ejemplo 6. Desarrolle $F(x) = \cos x$ en potencias de x por la fórmula de Maclaurin con residuo.

Solución. En este caso

$$F(x) = \cos x \quad F(0) = 1;$$

$$F'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad F'(0) = 0;$$

$$F''(x) = -\cos x = \cos(x + \pi), \quad F''(0) = -1;$$

$$F'''(x) = \sin x = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right), \quad F'''(0) = 0;$$

$$F^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n}{2}\pi\right), \quad F^{(n)}(0) = \cos\left(\frac{n}{2}\pi\right)$$

$$F^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{n+1}{2}\pi\right), \quad F^{(n+1)}(z) = \cos\left(z + \frac{n+1}{2}\pi\right).$$

Al sustituir estos valores en (67) y (68) obtenemos

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{\cos[(n/2)\pi]}{n!} x^n + R_{n+1}(x) \quad (69)$$

donde

$$R_{n+1}(x) = \frac{\cos\left(z + \frac{n+1}{2}\pi\right)}{(n+1)!} x^{n+1}; \quad 0 < z < x; \quad (70)$$

Ejemplo 7. Use los primeros siete términos [esto es, use $P_6(x)$] en el desarrollo de $\cos x$ en serie de potencias por la fórmula de Maclaurin con residuo para calcular $\cos \frac{1}{2}$ y dé el error estimado en este cálculo.

452/APLICACIONES ADICIONALES

Solución. Note que el séptimo término de la fórmula de Maclaurin es el cuarto término diferente de cero en el desarrollo de $\cos x$; entonces nos reduciremos a

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + R_7(x)$$

donde

$$R_7(x) = \frac{\cos(z + \frac{7}{2}\pi)}{7!} x^7; \quad 0 < z < x.$$

Como $|\cos u| \leq 1$, tenemos que

$$|R_7(x)| \leq \frac{x^7}{7!}.$$

Por tanto,

$$|R_7(\frac{1}{2})| \leq \frac{(\frac{1}{2})^7}{7!} = \frac{1}{(128)(5040)} = \frac{1}{645,120};$$

de modo que

$$|R_7(\frac{1}{2})| < 0.000,002.$$

Si $P_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}$; tenemos que

$$P_6(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{(\frac{1}{2})^2}{2} + \frac{(\frac{1}{2})^4}{4} - \frac{(\frac{1}{2})^6}{6} = 0.877,5825.$$

Concluimos que

$$\cos \frac{1}{2} \approx 0.877,582$$

con un error menor que 0.000002.

Al obtener la fórmula de Taylor supusimos que $F^{(n)}$ es continua en $[a; b]$ y que $F^{(n+1)}(x)$ existía en $(a; b)$, bajo estas condiciones la fórmula para $F(x)$ es válida para $x \in [a; b]$, esto es cuando $a \leq x \leq b$. Si por el contrario, suponemos que $F^{(n)}$ es continua en $(b; a)$, y que $F^{(n+1)}(x)$ existe en $(b; a)$ un proceso similar demuestra que la fórmula (62) se verifica para $F(x)$ cuando $x \in [b; a]$, esto es cuando $b \leq x \leq a$, y la fórmula del residuo (63) se verifica cuando $x < z < a$. En consecuencia se puede usar la fórmula de Taylor en potencia de $x - a$ para $F(x)$ siendo $a \in [c; d]$, x elemento de cualquier intervalo $[c; d]$ donde las hipótesis referentes a $F^{(n)}$ y $F^{(n+1)}$ se satisfagan, y z un número tal que $a < z < x$ ó $x < z < a$. Esto es, se puede usar la fórmula de Taylor si $x_1 \in [c; d]$ para aproximar $F(x_1)$; si $a = 0$ podemos usar la fórmula de Maclaurin para aproximar $F(x_1)$. Regresando a los ejemplos 3, 4, y 6 vemos que en cada ejemplo $F^{(n)}$ es continua en Re y $F^{(n+1)}(x)$ existe en Re , así que los desarrollos son válidos para $x \in Re$ y z es un número tal que $a < z < x$ ó $x < z < a$.

Ejemplo 8. Use los cinco primeros términos del desarrollo de e^x del ejemplo 4, para calcular $e^{-0.2}$ y dé una estimación del error en este cálculo.

Solución. En este caso

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + R_5(x),$$

donde

$$R_5(x) = \frac{x^5}{5!} e^z, \quad x < z < 0.$$

FORMULA DE TAYLOR/453

Para $x \in [-1; 0]$, tenemos que $e^{-1} \leq e^x \leq 1$ y por tanto $e^{-1} < e^x < 1$. En consecuencia,

$$\frac{1}{e} \frac{x^5}{5!} > R_5(x) > \frac{x^5}{5!}, \quad x \in [-1; 0].$$

En particular,

$$\frac{1}{e} \frac{(-0.2)^5}{5!} > R_5(-0.2) > \frac{(-0.2)^5}{5!}.$$

Como $\frac{(-0.2)^5}{120} = -\frac{0.000,008}{3} = -0.000,002,66$, concluimos que

$$|R_5(-0.2)| < 0.000,002,66.$$

Si $P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$; tenemos que

$$\begin{aligned} P_4(-0.2) &= 1 - 0.2 + \frac{0.04}{2} - \frac{0.008}{6} + \frac{0.0016}{24} \\ &= 0.82 - \frac{0.0038}{3} \approx 0.81873. \end{aligned}$$

Resumiendo tenemos que

$$e^{-0.2} \approx 0.81873$$

correcto hasta la quinta cifra decimal.

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 4 desarrolle $F(x)$ en potencias de x por la fórmula de Maclaurin para el valor de n especificado.

1. $F(x) = \sin x, n = 5.$

2. $F(x) = \frac{1}{1-x}, n = 4.$

3. $F(x) = \ln(x+1), n = 5.$

4. $F(x) = (1+x)^{1/2}, n = 5.$

En cada uno de los ejercicios del 5 al 8 desarrolle $F(x)$ en potencias de $x - a$ por la fórmula de Taylor para los valores de a y n especificados.

5. $F(x) = \ln x; a = 1, n = 5.$

6. $F(x) = \arctan x; a = 1, n = 3.$

7. $F(x) = \cos x; a = \pi/2, n = 3.$

8. $F(x) = \sqrt{x}; a = 9, n = 2.$

9. Use el resultado del ejercicio 5 para calcular $\ln 1.2$ y dé el error estimado en este cálculo.

En los ejercicios 10 y 11 verifique el desarrollo dado en potencias de x por la fórmula de Maclaurin.

$$\begin{aligned} 10. \sin x = x &= \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\pi\right)}{n!} x^n \\ &+ \frac{\sin\left(x + \frac{n+1}{2}\pi\right)}{(n+1)!} x^{n+1}. \end{aligned}$$

$$11. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + (-1)^{n+2} \frac{x^{n+1}}{n+1} (1+z)^{-n-1}.$$

12. Use los cuatro primeros términos del desarrollo de $\sin x$ del ejercicio 10 para calcular $\sin 1$ y demuestre que el resultado es correcto hasta la cuarta cifra decimal.

13. Use el desarrollo de e^x del ejercicio 4, para encontrar e^2 y \sqrt{e} , correctos hasta la 3a. cifra decimal.

14. Demuestre que si queremos calcular el número e correcto hasta la tercera cifra decimal es suficiente tomar los ocho primeros términos del desarrollo del ejercicio 4.

Sugerencia. Si hacemos $x=1$ en el desarrollo de e^x , obtenemos

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!} e^z,$$

donde $0 < z < 1$. Por tanto, $e^z < e < 3$, y $|R_{n+1}(1)| = e^z/(n+1)! < 3/(n+1)!$.

15. Use el desarrollo para $\cos x$ en el ejercicio 7 para calcular $\cos(2\pi/3)$ con cuatro cifras decimales.

16. Use el resultado del ejercicio 8, para calcular $\sqrt{10}$ y dé el error estimado en este cálculo.

17. (a) Desarrolle $F(x) = \sqrt[3]{x}$ en potencias de $x-8$ por la fórmula de Taylor.

(b) Use su resultado de (a) para calcular $\sqrt[3]{9}$ con un error que no exceda de 0.005.

18. Use la fórmula de Taylor con residuo para desarrollar $F(x) = e^x$ en potencias de $x-1$ para $n=2$. Demuestre que para este desarrollo $|R_3(0.9)| < 0.0005$ y que $e^{0.9} = 2.460$ es correcto hasta la tercera cifra decimal.

19. (a) Verifique que el desarrollo de $F(x) = (1-x)^{1/2}$ en potencias de x para $n=2$ por la fórmula de Maclaurin es

$$(1-x)^{1/2} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + R_3(x).$$

(b) Determine, hasta la cuarta cifra decimal la cota superior de $R_3(x)$ cuando $0 < x < \frac{1}{4}$.

20. (a) Desarrolle $F(x) = \sin x$ en potencias de $x - \pi/4$ para $n=5$ por la fórmula de Taylor con residuo.

(b) Use el resultado de (a) para calcular $\sin 44^\circ = \sin(44\pi/180)$ y dé una estimación del error en este cálculo.

EJERCICIOS ADICIONALES AL CAPITULO 8

1. Dos hombres A y B empiezan a caminar del punto O a una velocidad constante de 3 kms. por hora. Si A se dirige al este y B al $N 30^\circ E$, ¿cuál es la razón con que cambia la distancia entre ellos una hora después?

2. Dos barcos A y B se aproximan al punto O . A viene del este a razón de 20 km por hora y B viene del sur a razón de 25 km por hora. ¿Cuál es la razón con que cambia la distancia entre ellos cuando A está a 5 km de O y B a 12 km de O ?

3. Una curva C tiene la representación paramétrica $x = t^2 - 1$, $y = t^2 - 4$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) ¿Determina esta representación paramétrica una función? Dé razones.

(b) Encuentre x_t , y_t y la pendiente m_t de la tangente C en cualquier punto donde $t \neq 0$.

(c) Encuentre una ecuación de la tangente a C en el punto donde $t=1$, y una ecuación de la normal a C en este punto.

(d) Elimine t de $x = t^2 - 1$, $y = t^2 - 4$ para obtener una ecuación en x y y de C .

(e) Grafique C . Sobre un mismo sistema de coordenadas grafique la tangente y la normal determinadas en (c).

4. En cada uno de los siguientes casos determine x_t , y_t , x_{tt} , y_{tt} y $D_t(y_t/x_t)$.

(a) $x = 2t^2$, $y = 3 - t$; (b) $x = 2t - 3$, $y = t^2 + 2$.

5. ¿Cuál de las representaciones paramétricas del ejercicio 4 determina una función $F = \{(x, y) | y = F(x)\}$? En el caso de que sea función de $D_x y$ y $D_x^2 y$.

6. Si $a = 3i - 5j$ y $b = 6i - 2j$, escriba en la forma $c_1 i + c_2 j$ donde c_1 y c_2 son números reales, $a - b$, $a + 2b$ y $4a - 3b$.

7. Un punto $P(x, y)$ se mueve sobre una curva C de tal manera que su vector de posición en un tiempo t es $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (2 + 3t + t^2)\mathbf{i} + (t^2 - 3t)\mathbf{j}$. Encuentre el vector aceleración \mathbf{A} de \mathbf{P} en un tiempo t .

En los ejercicios del 8 al 11 se da el vector de posición \mathbf{R} en un tiempo t de un punto $P(x, y)$ que se mueve sobre una curva C . En cada caso encuentre (a) el vector velocidad \mathbf{V} y el vector aceleración \mathbf{A} en un tiempo t ; (b) el vector velocidad y vector aceleración \mathbf{A} en el punto P_1 que corresponde al valor de t dado. Determine también en este punto $|\mathbf{V}|$ y $|\mathbf{A}|$.

8. $\mathbf{R} = (2t)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$; $t = 1$.

9. $\mathbf{R} = t^2\mathbf{i} + (2t)\mathbf{j}$; $t = 2$.

10. $\mathbf{R} = (2 \cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$; $t = \pi/4$.

11. $\mathbf{R} = (2 \sin t)\mathbf{i} + (\cos 2t)\mathbf{j}$; $t = \pi/4$.

12. (a) Encuentre los puntos de intersección de la Curva C_1 con ecuación $r = 1 - \cos \theta$ y la curva C_2 con ecuación $r = 1 + \cos \theta$.

(b) Grafique C_1 y C_2 en un mismo sistema de coordenadas.

13. (a) Encuentre los puntos de intersección de la Curva C_1 con ecuación $r = 2 \cos \theta$ y la curva C_2 con ecuación $r = 2(1 - \cos \theta)$.

(b) Grafique C_1 y C_2 en un mismo sistema de coordenadas.

14. Sea R_1 la región limitada por la gráfica $r^2 = 4 \cos 2\theta$ y sea R_2 la región limitada por la gráfica de $r^2 = 4 \sin 2\theta$. Si $R = R_1 \cap R_2$, encuentre el área de la región R .

15. Sea R_1 la región limitada por la gráfica de $r = 10 \cos \theta$, y sea R_2 la región limitada por la gráfica de $r = 10 \sin \theta$. Si $R = R_1 \cap R_2$, encuentre el área de la región R .

16. Encuentre el área de la parte de la región limitada por la gráfica de $r = 2 \sin 2\theta$ que está fuera del círculo con ecuación $r = 1$.

17. Encuentre la longitud de la gráfica de $F = \{(x, y) | y = \ln \cos x, x \in [0; \pi/3]\}$.

18. Encuentre la longitud de la parte de la gráfica de $y = 2x - x^2$ que está arriba del eje x .

19. Encuentre la longitud (en forma de radical y en forma decimal) de la gráfica de $F = \{(x, y) | y = x^{2/3}, x \in [-1; 8]\}$.

20. Encuentre la longitud de la gráfica de $r = a \cos^3(\theta/3)$.
21. Encuentre la longitud de la parte de la gráfica de $r = 4 \cos \theta$ que está fuera del círculo con ecuación $r = 2$.
22. La gráfica de $y = e^x$ desde el punto $(0, 1)$ al punto $(1, e)$ gira alrededor del eje x . Encuentre el área de la superficie generada.
23. La gráfica de la curva con representación paramétrica $x = 6 - t^2$, $y = 2t$ para $t \in [0; \sqrt{3}]$ gira alrededor del eje x . Encuentre el área de la superficie de revolución generada.
- En los ejercicios 24 y 25 encuentre el radio de curvatura y el centro de curvatura de la curva C con la ecuación dada y en el punto P_1 especificado. Construya las gráficas de C y el círculo de curvatura en un mismo sistema de coordenadas.
24. $y = \cos x$, $P_1(0, 1)$.
25. $y = \tan x$, $P_1(\pi/4, 1)$.
26. Demuestre que el radio de curvatura de la hipérbola con ecuación $xy = 1$ es mínimo en el vértice.
27. Encuentre una ecuación de la evoluta de la gráfica de $x = 3e^t - 1$, $y = t + 2$.
28. Use los cuatro primeros términos [esto es, use $P_4(x)$] del desarrollo de $\sin x$ en potencias de x por la fórmula de Maclaurin (vea ejercicio 10 de la Sec. 8.9) para calcular $\sin 0.1$ y dé una estimación del error en este cálculo.

Geometría analítica tridimensional

En este capítulo estudiamos los conceptos básicos de la geometría analítica en tres dimensiones, conceptos que usaremos en capítulos subsecuentes; además estudiaremos el cálculo de funciones de más de una variable independiente.

9.1 Sistema de coordenadas rectangulares y de tres dimensiones.

La base de la geometría analítica en el plano (esto es, en dos dimensiones) es la correspondencia biunívoca entre los miembros del conjunto de parejas ordenadas de números reales y los puntos del plano coordenado. En forma similar se introduce un sistema de coordenadas en tres dimensiones; de tal manera que hay una correspondencia biunívoca entre los miembros del conjunto de triadas ordenadas de números reales y los puntos de un espacio tridimensional.

Definiremos una **triada ordenada**, para la cual usaremos el símbolo (a, b, c) , como un par ordenado en el cual la primera componente es, a su vez, un par ordenado;* esto es:

$$(a, b, c) = ((a, b), c) \quad (1)$$

Usando (1) y la definición de igualdad de dos pares ordenados, podemos demostrar que dos triadas ordenadas (a, b, c) y (d, e, f) son iguales si y sólo si $a = d$, $b = e$, y $c = f$. Para establecer una correspondencia entre los miembros de un conjunto de triadas ordenadas de números reales y los puntos de un espacio tridimensional, construimos un sistema de coordenadas de la forma siguiente. Tómese un plano en el cual hay un sistema de coordenadas rectangulares y por el origen de este sistema de coordenadas trácese una recta dirigida perpendicular al plano dado. La línea recta construida, junto con las líneas coordenadas en el plano, forman un **sistema rectangular de coordenadas** de tres dimensiones. Las tres líneas se llamarán **ejes de coordenadas** y al punto de intersección se le llamará el **origen**. Los ejes son generalmente identificados por letras y hablaremos frecuentemente del eje X , del eje Y y del eje Z . En la figura 9.1 la dirección

* Una n -ada ordenada (a_1, a_2, \dots, a_n) se define en forma similar.

positiva de cada uno de los ejes se indica por medio de una flecha. Esta figura muestra un sistema de coordenadas *izquierdo* si al primer eje se le considera como el eje X al segundo eje como el eje Y y al tercero como el eje Z . Si los ejes X y Y se intercambian, el nuevo sistema de coordenadas es un sistema *derecho*.

Los ejes de coordenadas tomados en pares, determinan tres planos llamados **planos coordenados**: plano XY , plano YZ y plano XZ . Estos planos dividen el espacio tridimensional en ocho regiones llamadas *octantes*.

Sea P cualquier punto en el espacio tridimensional. Constrúyanse a través de P tres planos, un plano perpendicular a cada uno de los ejes coordenados. (Fig 9.2). Sea U el punto en el cual el plano perpendicular al eje X intercepta dicho eje;

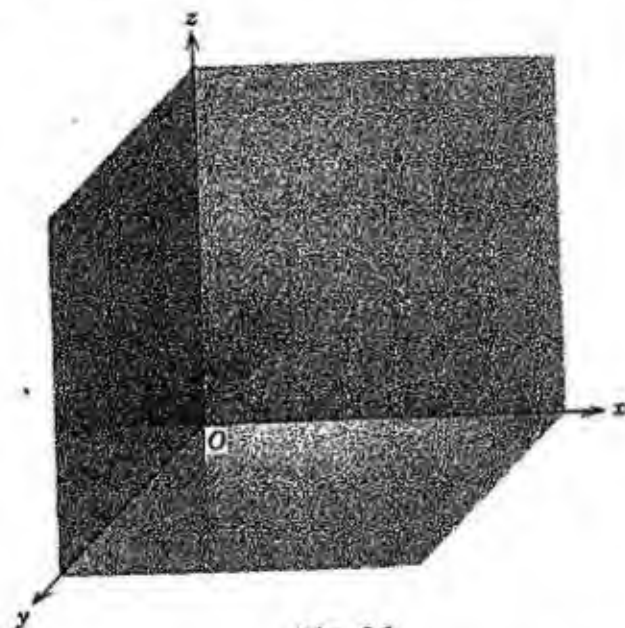


Fig. 9.1

sea V el punto en el cual el plano perpendicular al eje Y corta este eje, y sea W el punto en el cual el plano perpendicular al eje Z intercepta dicho eje. Considérese cada uno de estos puntos U , V y W como punto sobre una *línea* recta coordenada, y sea x_1 la coordenada de U , y_1 la coordenada de V y z_1 la coordenada de W . Los números x_1 , y_1 y z_1 se llaman **coordenadas rectangulares tridimensionales**, o simplemente las **coordenadas** de P . De esta manera asociamos a cada punto del espacio tridimensional una triada ordenada de números reales. $P(x_1, y_1, z_1)$ representará "el punto P con coordenadas x_1 , y_1 y z_1 " y frecuentemente llamaremos dicho punto "el punto (x_1, y_1, z_1) ".

Inversamente, a la triada ordenada de números reales (x_1, y_1, z_1) le asociaremos el punto que es la intersección de tres planos, uno perpendicular al eje X en el punto $(x_1, 0, 0)$, el segundo perpendicular al eje Y en el punto $(0, y_1, 0)$ y el tercero perpendicular al eje Z en el punto $(0, 0, z_1)$.

Hemos descrito un procedimiento para establecer una correspondencia biuní-

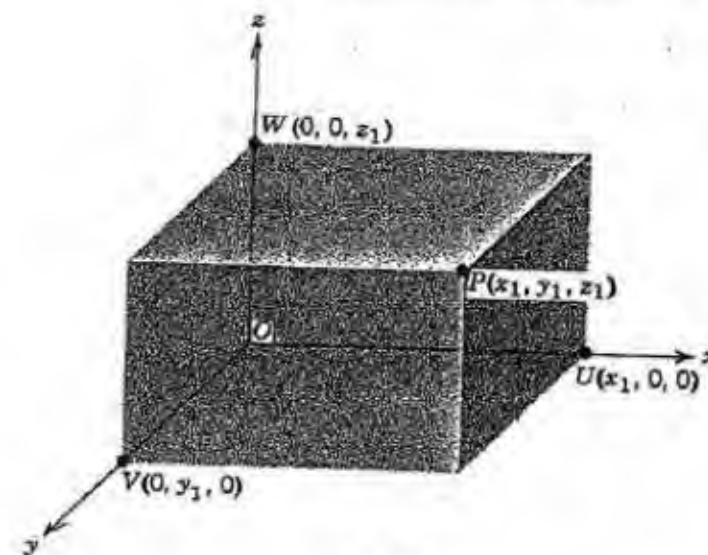


Fig. 9.2

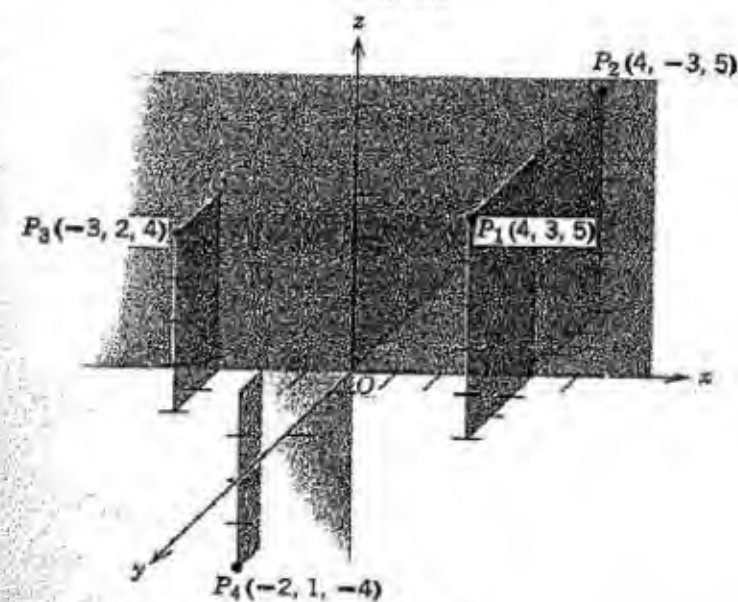


Fig. 9.3

voca entre los puntos del espacio tridimensional y los miembros del conjunto de triadas ordenadas de números reales.

Para dibujar un sistema de coordenadas tridimensionales en una hoja de papel, como se muestra en las Figs. 9.1, 9.2 y 9.3, representaremos el eje Y por una línea, la cual forma un ángulo $\angle xOy$ de 120° , y la unidad de longitud en el eje Y se toma como dos tercios de la unidad de longitud usada en el eje X y en el eje Z . La figura 9.3 muestra los puntos $P_1(4, 3, 5)$, $P_2(4, -3, 5)$, $P_3(-3, 2, 4)$ y $P_4(-2, 1, -4)$. En la figura 9.3, los puntos P_1 y P_2 son *simétricos* respecto al plano XZ ; en general, dos puntos, P y Q , son *simétricos* respecto a

un plano si y sólo si el plano bisecta el segmento PQ y es perpendicular a PQ .

Los puntos (a, b, c) y $(-a, b, c)$ son simétricos con respecto al plano YZ ; los puntos (a, b, c) y $(a, -b, c)$ son simétricos con respecto al plano XZ ; los puntos (a, b, c) y $(a, b, -c)$ son simétricos respecto al plano XY .

Haremos uso frecuente del hecho de que el cuadrado de la longitud de la diagonal de un paralelepípedo rectangular es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus tres aristas. Refiriéndonos a la Fig. 9.4 tenemos

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \quad (2)$$

que el estudiante debe verificar con ayuda del Teorema de Pitágoras. Usaremos este resultado para probar el siguiente Teorema:

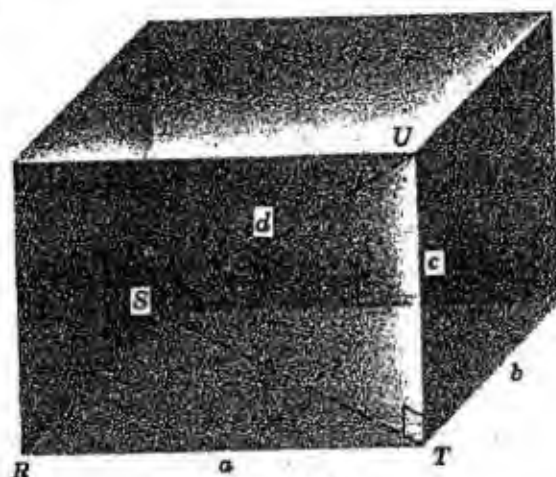


Fig. 9.4

Teorema 1. La distancia $|P_1P_2|$ entre dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ está dada por

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (3)$$

Demostración: Construya un paralelepípedo rectangular con caras paralelas a los planos coordenados y con P_1 y P_2 como los extremos de una diagonal; Vea Fig. 9.5 las longitudes de las aristas del paralelepípedo son:

$$|P_1Q| = |x_2 - x_1|, \quad |QR| = |y_2 - y_1|, \quad |RP_2| = |z_2 - z_1|$$

y usando (2) tendremos:

$$|P_1P_2|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2$$

o

$$|P_1P_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

y (3) se sigue de la última igualdad.

Como ejemplo, consideraremos la distancia entre los puntos $P_1(-2, 3, -1)$ y $P_2(-3, -4, 3)$. Aplicando (3) tenemos:

$$|P_1P_2| = \sqrt{(-3 + 2)^2 + (-4 - 3)^2 + (3 + 1)^2} = \sqrt{1 + 49 + 16} = \sqrt{66}.$$

Recordemos de la Secc. 1.2 que el producto cartesiano $V \times U$ de dos conjuntos dados V y U es el conjunto de todas las parejas ordenadas cuyas primeras componentes son miembros de V y cuyas segundas componentes son miembros de U . Esto es:

$$(x, y) \in V \times U \iff x \in V \text{ y } y \in U.$$

El conjunto de todos los pares ordenados de números reales es el producto cartesiano $Re \times Re$, y el conjunto de todas las triadas ordenadas de números reales es el conjunto cartesiano $(Re \times Re) \times Re$.

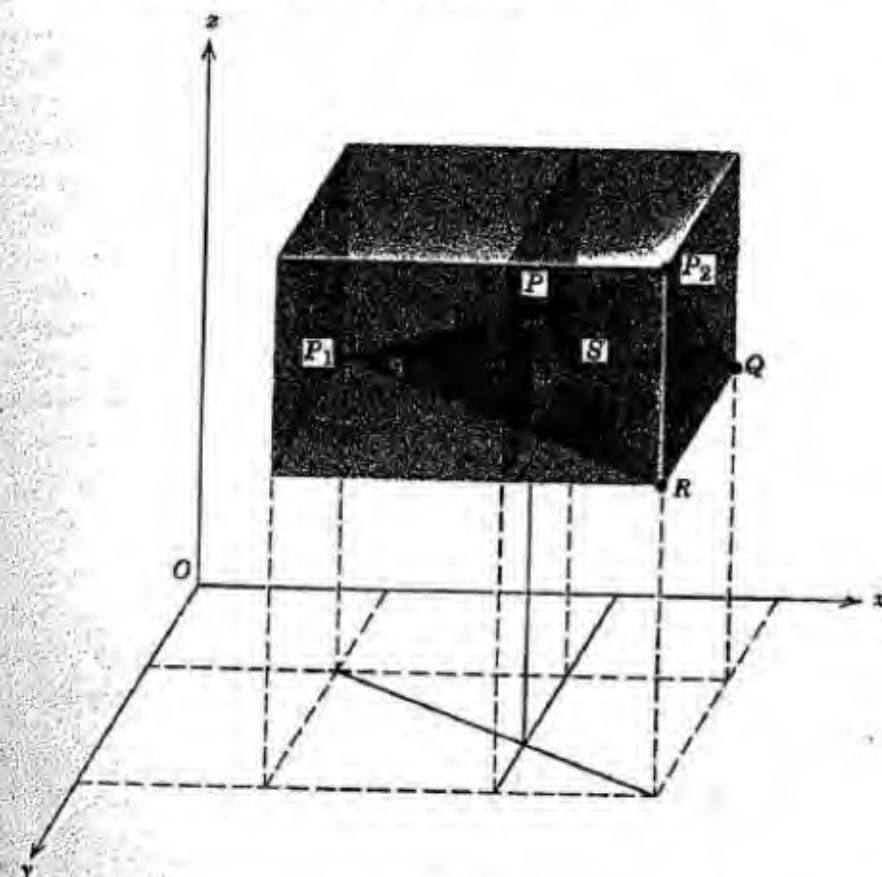


Fig. 9.5

Como hay una correspondencia biunívoca entre los miembros del producto cartesiano $Re \times Re$ y los puntos en el plano, identificaremos $Re \times Re$ con el espacio bidimensional y lo llamaremos simplemente **espacio-2**. En forma similar identificaremos $(Re \times Re) \times Re$ con el espacio tridimensional y lo llamaremos simplemente **espacio-3***.

Ya que una triada ordenada de números reales es un par ordenado cuyo primer componente es un par ordenado de números reales y cuya segunda

* Es también común identificar el conjunto de tetradas ordenadas de números reales con el espacio de cuatro dimensiones e identificar el conjunto de n -adas ordenadas con el espacio n -dimensional.

componente es un número real, nosotros podemos considerar un conjunto de triadas ordenadas como una *relación* cuyo dominio es un subconjunto de $Re \times Re$, y cuyo rango es un subconjunto de Re . Llamaremos a tal relación **una relación en el espacio-3**.

Por analogía con el concepto de una relación en el espacio-2 (ver Secc. 1.2), la **gráfica de una relación en el espacio-3** se define como el conjunto G de puntos, tales que:

$$P(a, b, c) \in G \iff (a, b, c) \in R,$$

Sea S_{xyz} una proposición en las 3 variables x, y , y z , y sea el universo de las variables Re . Además supóngase que cuando reemplazamos x por cualquier miembro de Re y y por cualquier miembro de Re , y z por cualquier miembro de Re , obtenemos un predicado que es verdadero o falso. Una triada ordenada de números reales (a, b, c) , que tiene la propiedad de que S_{xyz} es verdadera cuando x se reemplaza por a , y por b , y z por c se dice que satisface S_{xyz} . Los símbolos

$$\{(x, y, z) | S_{xyz}\}$$

representan "el conjunto de todas las triadas ordenadas de números reales que satisfacen S_{xyz} " y a este conjunto se le llama el *conjunto solución* de la proposición S_{xyz} . Por tanto, el conjunto $\{(x, y, z) | S_{xyz}\}$ es una relación en el espacio-3 y decimos que

$$R = \{(x, y, z) | S_{xyz}\}$$

es la relación en el espacio-3 determinada por la proposición S_{xyz} .

Por ejemplo:

$$R = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$$

es una relación en el espacio-3 determinada por la proposición $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Algunos miembros de esta relación son $(0, 0, 3)$, $(2, 2, 1)$, $(-1, 2, -2)$, y $(-1, -2, -2)$.

El punto $P(2, 2, 1)$ pertenece a la gráfica de R porque $(2, 2, 1) \in R$. De la fórmula de la distancia (3) se deduce que la gráfica de R es una esfera con centro en el origen y de radio 3.

Definimos la **gráfica de una proposición** S_{xyz} como la gráfica de la relación determinada por dicha proposición; esto es, la gráfica de S_{xyz} es la gráfica de $\{(x, y, z) | S_{xyz}\}$. Por ejemplo, la gráfica de $x^2 + y^2 - z^2 = 16$ es la gráfica de $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 - z^2 = 16\}$, y la gráfica de $6x + 4y > z$ es la gráfica de $\{(x, y, z) | 6x + 4y > z\}$.

Para ilustrar la utilidad de la notación de conjunto al describir relaciones y gráficas, consideremos los siguientes conjuntos y sus gráficas:

$$S_1 = \{x | x = 3\},$$

$$S_2 = \{(x, y) | x = 3\},$$

$$S_3 = \{(x, y, z) | x = 3\}.$$

Cada conjunto se describe por la proposición $x = 3$, pero S_1 es un conjunto de

números reales, S_2 es un conjunto de parejas ordenadas de números reales, y S_3 es un conjunto de triadas ordenadas de números reales.

La gráfica de S_1 es un punto en la línea recta coordenada, la gráfica de S_2 es una recta en el espacio-2 perpendicular al eje x en el punto $(3, 0)$; la gráfica de S_3 es un plano en el espacio-3 perpendicular al eje x en el punto $(3, 0, 0)$. En forma similar vemos que la gráfica de $R_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 4\}$ es una curva en el espacio-2, el círculo con centro en $(0, 0)$ y con radio 2, y que la gráfica de $R_2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = 4\}$ es una superficie en el espacio-3 (el cilindro circular que pasa a través del círculo descrito y perpendicular al plano xy).

Muchos de los resultados de la geometría analítica plana se generaliza a la geometría del espacio-3. Por ejemplo, consideremos la recta que pasa a través de los puntos dados $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$, y sea $P(x_3, y_3, z_3)$ otro punto sobre la línea recta para el cual:

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{P_1P_2}} = t, \quad \text{o} \quad \overline{P_1P} = t \overline{P_1P_2}.$$

¿Podemos expresar las coordenadas x_3, y_3 y z_3 en términos de t y de las coordenadas de P_1 y P_2 ? Usando la Fig 9.5 como guía, tracemos un plano a través de P , perpendicular al eje x , y sea S el punto en el cual dicho plano intercepta a la recta que pasa por P_1 y Q . Los triángulos rectángulos P_1SP y P_1QP_2 son semejantes; por tanto, $\overline{P_1S}/\overline{P_1Q} = \overline{P_1P}/\overline{P_1P_2}$. Ya que $\overline{P_1S} = x_3 - x_1$, $\overline{P_1Q} = x_2 - x_1$, y $\overline{P_1P} = t \overline{P_1P_2}$, vemos que $(x_3 - x_1) = t(x_2 - x_1)$, ó $x_3 = x_1 + t(x_2 - x_1)$. En igual forma podemos demostrar que:

$$y_3 = y_1 + t(y_2 - y_1) \quad \text{y} \quad z_3 = z_1 + t(z_2 - z_1).$$

El número t se designa como la razón en la cual el punto P divide al segmento de recta de P_1 a P_2 . Hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 2. Si $P(x_3, y_3, z_3)$ divide al segmento de línea recta de $P_1(x_1, y_1, z_1)$ a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ en la razón t , entonces:

$$x_3 = x_1 + t(x_2 - x_1), \quad y_3 = y_1 + t(y_2 - y_1), \quad z_3 = z_1 + t(z_2 - z_1). \quad (4)$$

Si P es el punto medio del segmento P_1P_2 , entonces $\overline{P_1P} = \frac{1}{2}\overline{P_1P_2}$ y

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_3 = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (5)$$

En la geometría analítica plana se demuestra que la gráfica de la relación $\{(x, y) | (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2\}$ es un círculo con centro $P(x_1, y_1)$ y radio r . En forma similar podemos demostrar (por el uso del teorema 1) que la gráfica de la relación

$$\{(x, y, z) | (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r^2\}$$

es una esfera con centro $P(x_1, y_1, z_1)$ y radio r . En otras palabras,

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r^2 \quad (6)$$

es la ecuación de la esfera con centro $P(x_1, y_1, z_1)$ y radio r .

Ejemplo 1. Encuentre la ecuación de la esfera para la cual el segmento que une $P_1(-2, 3, -1)$ y $P_2(4, 5, -3)$ es un diámetro.

Solución. Usando las fórmulas (5) encontramos que el centro de la esfera es $C(1, 4, -2)$, por la (3) que el radio de la esfera es $\sqrt{11}$ y por la (6) vemos que

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z+2)^2 = 11$$

es la ecuación de una esfera. Notamos que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8y + 4z + 10 = 0$ es también una ecuación de la esfera.

Ejemplo 2. Encuentre la ecuación cuya gráfica es el conjunto de puntos G , que tiene la propiedad de que para cada punto $P \in G$ la suma de los cuadrados de las distancias de P a $A(3, 0, 1)$ y a $B(5, 4, -3)$ es 58. Demuestre que el conjunto G es una esfera y encuentre su centro y radio.

Solución. Sabemos que

$$P(x, y, z) \in G \iff |PA|^2 + |PB|^2 = 58.$$

Por tanto,

$$P(x, y, z) \in G \iff (x-3)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 + (x-5)^2 + (y-4)^2 + (z+3)^2 = 58.$$

$$\begin{aligned} \circ \quad P(x, y, z) \in G &\iff x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y + 2z + 1 = 0 \\ \circ \quad P(x, y, z) \in G &\iff (x-4)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 20. \end{aligned} \quad (7)$$

Si comparamos (7) y (6) vemos que G es la esfera con centro $(4, 2, -1)$ y radio $\sqrt{20}$ ó $2\sqrt{5}$.

EJERCICIOS

1. Grafique cada uno de los siguientes puntos. En cada caso encuentre la distancia del punto dado a cada uno de los ejes de coordenadas y al origen: $(0, 3, 4)$; $(4, 3, 0)$; $(3, 0, 4)$; $(6, 3, 2)$; $(-4, 2, 1)$; $(-2, -3, -4)$; $(5, 2, -4)$; $(6, 3, -2)$.

2. En cada uno de los siguientes casos encuentre el punto P_2 para el cual P_2 y el punto dado P_1 son simétricos con respecto al plano dado.

- (a) $P_1(2, 3, 4)$, plano xz ; (b) $P_1(-3, 2, 1)$, plano yz ;
(c) $P_1(-4, -6, 7)$, plano xy ; (d) $P_1(4, 2, 6)$, plano xy .

3. En cada uno de los siguientes casos calcule la distancia $|P_1P_2|$.

- (a) $P_1(8, 5, 4)$, $P_2(5, 2, 2)$; (b) $P_1(2, 0, 3)$, $P_2(1, 1, 1)$;
(c) $P_1(3, 5, 7)$, $P_2(4, 6, -8)$; (d) $P_1(-3, -2, 1)$, $P_2(3, 2, -1)$.

4. Un paralelepípedo rectangular está colocado de tal manera que un vértice está en el origen y las tres aristas que pasan por dicho vértice están respectivamente sobre los ejes de coordenadas. Si las dimensiones del paralelepípedo son a , b , y c , dé las coordenadas de los demás vértices.

5. Calcule la distancia del punto (a, b, c) a:

- (a) El origen, (b) El eje x , (c) El eje y , (d) El eje z .

6. Ya que la gráfica de $\{(x, y, z) \mid z = 0\}$ es el plano xy , decimos que $z = 0$ es la ecuación del plano xy . ¿Cuál es la ecuación del plano yz ? ¿Cuál la del plano xz ? ¿Cuál la del plano paralelo al plano yz y pasando a través del punto $(-5, 0, 0)$?

7. Note que la gráfica de $\{(x, y, z) \mid y = 0 \text{ y } z = 0\}$ es el eje x . Haga una descripción similar para la relación cuya gráfica es el eje y y otro para el eje z .

8. Si $A = \{1, 2, 3\}$, grafique $A \times A$ y $(A \times A) \times A$.

9. ¿Cuál es la gráfica de cada una de las siguientes relaciones en el espacio-3?

- (a) $\{(x, y, z) \mid x = 4\}$, (b) $\{(x, y, z) \mid y = 5\}$, (c) $\{(x, y, z) \mid z = -2\}$.

10. ¿Cuál es la gráfica de cada una de las siguientes relaciones en el espacio-3?

- (a) $\{(x, y, z) \mid x = 3 \text{ y } y = 4\}$, (b) $\{(x, y, z) \mid x = -5 \text{ y } z = 2\}$,
(c) $\{(x, y, z) \mid y = 5 \text{ y } z = 2\}$.

11. Encuentre el punto P que divide el segmento de recta de P_1 a P_2 en una razón t .

- (a) $P_1(5, 2, 2)$, $P_2(8, 5, 4)$, $t = \frac{1}{3}$;
(b) $P_1(5, 2, 2)$, $P_2(8, 5, 4)$, $t = \frac{2}{3}$;
(c) $P_1(5, 2, 2)$, $P_2(8, 5, 4)$, $t = \frac{4}{5}$;
(d) $P_1(1, -1, 1)$, $P_2(2, -3, 2)$, $t = -\frac{1}{2}$.

12. Encuentre el punto medio del segmento que une los dos puntos dados.

- (a) $P_1(-4, 8, 6)$, $P_2(6, -4, -2)$;
(b) $P_1(5, -9, 7)$, $P_2(1, 5, -9)$;
(c) $P_1(-1, -3, -5)$, $P_2(7, 9, -11)$;
(d) $P_1(-2, -4, 8)$, $P_2(-4, 8, 12)$.

13. Encuentre la ecuación del conjunto de puntos G , que tiene la propiedad de que cada punto de G es equidistante a $P_1(8, 5, 4)$ y $P_2(5, 2, 2)$.

14. Demuestre que los puntos $(1, 3, 5)$, $(-2, -2, 9)$ y $(-1, -3, 7)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

15. (a) Encuentre el perímetro del triángulo con vértices $P_1(3, 1, 2)$, $P_2(-1, 5, -4)$, y $P_3(5, -3, 6)$.

(b) Encuentre la longitud de cada una de las medianas del triángulo anterior.

16. Escriba la ecuación del conjunto de puntos G con la propiedad de que cada punto de G está a una distancia 5 del eje z .

17. Diga cuáles de las siguientes ecuaciones representan una esfera; dé el centro y el radio.

- (a) $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 10z + 5 = 0$,
(b) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 14y - 10z + 94 = 0$,
(c) $x^2 + y^2 + z^2 - 18z = 0$.

18. Encuentre la ecuación de una esfera uno de cuyos diámetros es el segmento determinado por $(4, 8, -6)$ y $(2, -2, 4)$.

19. Encuentre la ecuación del conjunto de puntos G , con la propiedad de que para cada punto $P \in G$, la distancia entre P y $A(5, 4, 0)$ es dos veces la distancia entre P y $B(-4, 3, 4)$.

Demuestre que G es una esfera y calcule su centro y su radio.

20. Para $x \geq 0$, $y \geq 0$, y $z \geq 0$, grafique las siguientes relaciones.

- (a) $R_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 25\}$,
(b) $R_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 25 \text{ y } z = 0\}$,
(c) $R_3 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 25 \text{ y } z = 3\}$,
(d) $R_4 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 25 \text{ y } z = 4\}$.

9.2 Angulos directores, cosenos directores y números directores. Si L_1 y L_2 son dos líneas dirigidas que se interceptan en el punto P , el ángulo θ formado por dichas rectas se toma como el ángulo formado por las semirrectas positivas; ver Fig. 9.6. Note que $0 \leq \theta < \pi$.

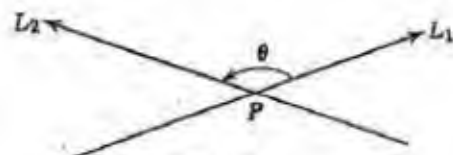


Fig. 9.6

Si las dos líneas dirigidas L_1 y L_2 no se interceptan, construya una recta M_1 que pase por el origen, paralela y con la misma dirección de L_1 , y una recta M_2 que también pase por el, paralela y con la misma dirección de L_2 ; el ángulo formado por las líneas rectas L_1 y L_2 se toma como el ángulo formado por las rectas M_1 y M_2 .

Si L es una recta dirigida, los ángulos directores α , β , γ de L son los ángulos entre L y el eje x , el eje y y el eje z respectivamente, y $\cos \alpha$, $\cos \beta$, y $\cos \gamma$ son los cosenos directores de L (ver Fig. 9.7).

Las líneas rectas paralelas y con igual dirección tiene los mismos ángulos directores y por tanto los mismos cosenos directores. Si α , β , y γ son los ángulos directores de L_1 , y L_2 es paralela a L_1 pero con dirección opuesta, entonces los

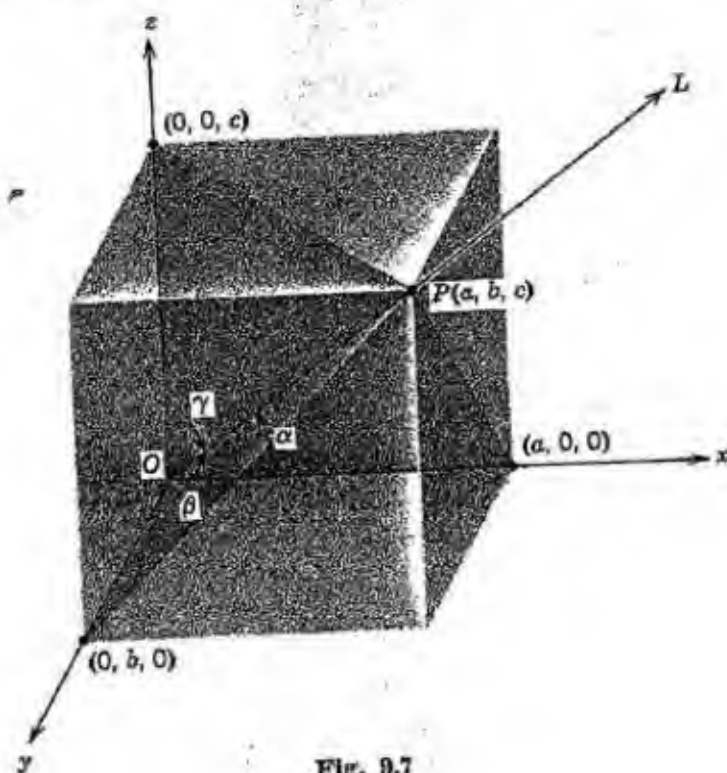


Fig. 9.7

ángulos directores de L_2 serán $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, y $\pi - \gamma$, y por tanto los cosenos directores de L_2 serán los negativos de los cosenos directores de L_1 .

Si L es una recta no dirigida, podemos dirigirla en dos direcciones. Para cada una de estas habrá un conjunto de ángulos directores, si estos conjuntos son $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, y $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ notamos que $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$, $\beta_2 = \pi - \beta_1$, $\gamma_2 = \pi - \gamma_1$ (Fig. 9.8). Vemos que una línea recta no dirigida tiene dos conjuntos de cosenos directores; un conjunto está formado por los negativos de los elementos del otro.

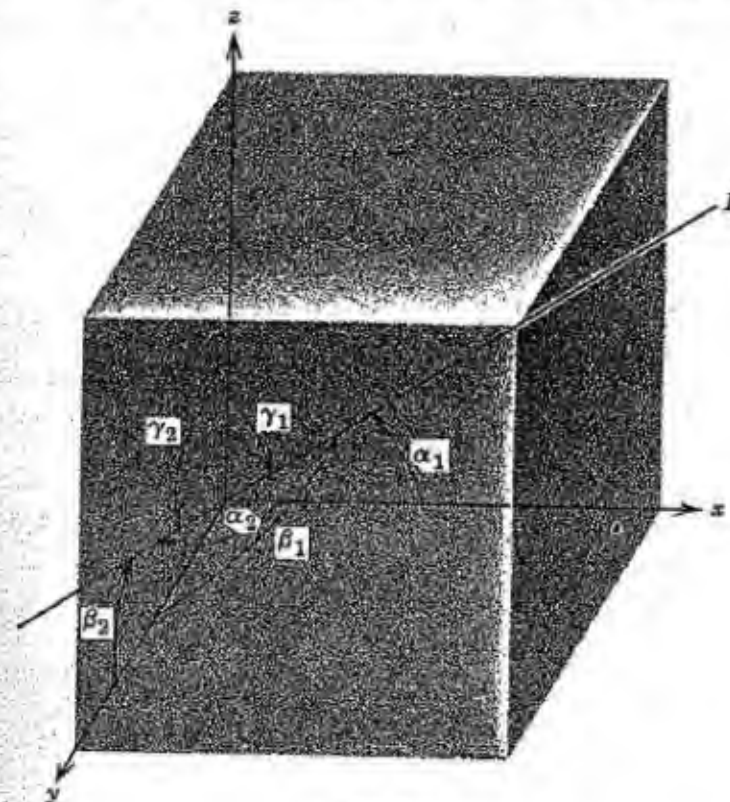


Fig. 9.8

El ángulo entre dos rectas L_1 y L_2 no dirigidas y que se cortan se toma como el menor de los dos ángulos formados por dichas líneas. Si L_1 no corta a L_2 , el ángulo formado por ellas se toma como el ángulo que forman las rectas M_1 y M_2 que pasan por el origen, siendo M_1 paralela a L_1 y M_2 paralela a L_2 .

Sean (a, b, c) las coordenadas de un punto P sobre una recta dirigida a través del origen y sea $|OP| = d$. Entonces, haciendo uso de la Fig. 9.7, vemos que

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

y que:

$$\cos \alpha = \frac{a}{d}, \quad \cos \beta = \frac{b}{d}, \quad \cos \gamma = \frac{c}{d}.$$

De estas igualdades se deduce que:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{d^2} = 1$$

o equivalente a:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Hemos demostrado el siguiente resultado.

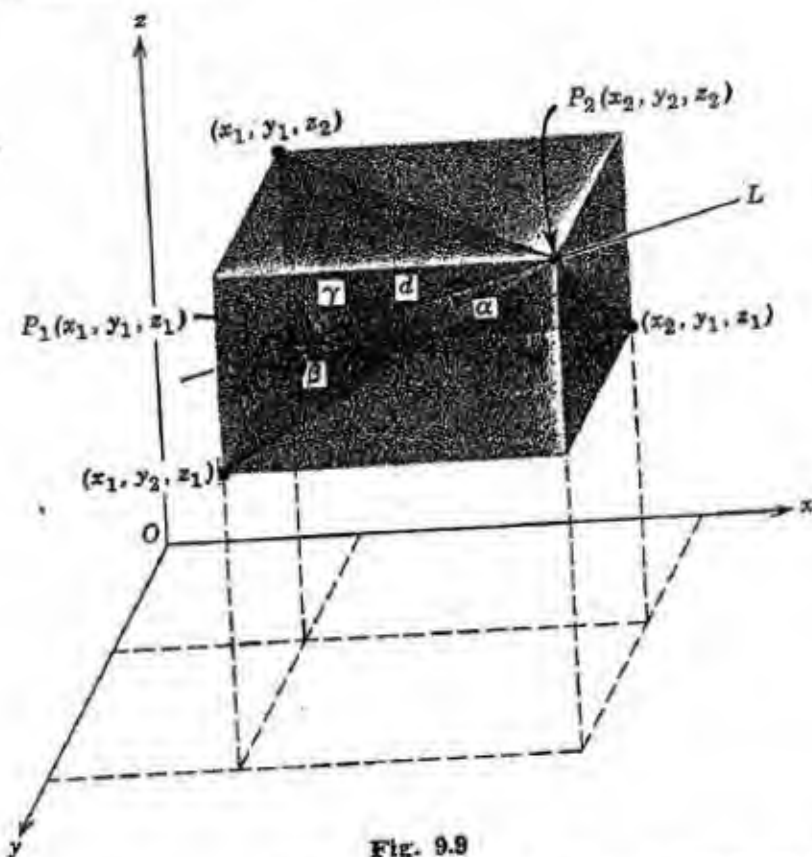


Fig. 9.9

Teorema 3. La suma de los cuadrados de los cosenos directores de una recta es 1.

Con ayuda de la Fig. 9.9 el lector puede probar el siguiente teorema.

Teorema 4. Si $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos sobre la recta L dirigida de P_1 a P_2 y si $|P_1P_2| = d$, entonces:

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{d}, \quad \cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{d} \quad (9)$$

Ejemplo 1. Calcule los cosenos directores de la recta dirigida de $P_1(6, 4, -5)$ a $P_2(0, -5, 13)$.

Solución. Usando (3) encontramos que:

$$d^2 = (0 - 6)^2 + (-5 - 4)^2 + (13 + 5)^2 = 36 + 81 + 324 = 441$$

de modo que $d = 21$. De (9) vemos que:

$$\cos \alpha = \frac{-6}{21} = -\frac{2}{7}, \quad \cos \beta = \frac{-9}{21} = -\frac{3}{7}, \quad \cos \gamma = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}.$$

El estudiante puede verificar que estos valores satisfacen a la igualdad (8).

Ejemplo 2. Si para una recta L , $\alpha = 60^\circ$ y $\beta = 45^\circ$, calcule los valores posibles de γ .

Solución. Mediante el uso de (8) tenemos:

$$\cos^2 60^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2 \gamma = 1$$

o sea $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \cos^2 \gamma = 1$. Por tanto, $\cos^2 \gamma = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, y $\cos \gamma = \pm \frac{1}{2}$. De donde γ puede ser 60° ó 120° .

Si una línea recta dirigida L tiene cosenos directores $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, entonces existen tres números reales l , m , n con la propiedad de que

$$l = k \cos \alpha, \quad m = k \cos \beta, \quad n = k \cos \gamma \quad (10)$$

para algún número positivo real k , que se llaman **números directores** de L . Si L es una recta no dirigida, entonces k puede ser cualquier número real diferente de 0.

Si hay un número real k diferente de 0 para el cual se verifica (10), decimos que los números l , m , n son *respectivamente proporcionales* a los números $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$.

Si l , m y n son los números directores de una línea recta L (dirigida o no dirigida), entonces por (10)

$$l^2 + m^2 + n^2 = k^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma),$$

la cual por (8) se transforma en:

$$l^2 + m^2 + n^2 = k^2.$$

Esto es

$$k = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \quad (11)$$

Si L es una recta dirigida, y

$$k = \pm \sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \quad (12)$$

Si L es no dirigida.

Si combinamos (10), (11), y (12) tenemos

$$\cos \alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \quad \cos \beta = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \quad (13)$$

$$\cos \gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

$$\cos \alpha = \frac{l}{-\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \quad \cos \beta = \frac{m}{-\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \quad (14)$$

$$\cos \gamma = \frac{n}{-\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

Si L es una línea recta dirigida, únicamente las fórmulas (13) son válidas; Si L es no dirigida, (13) ó (14) son válidas.

Ejemplo 3. Los números 6, 2, -3 son los números directores de una recta dirigida L . Calcule los cosenos directores de L .

Solución. Aquí $l = 6, m = 2, n = -3$ y $\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = 7$. Usando (13) tenemos $\frac{6}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{3}{7}$ como cosenos directores de L .

Ejemplo 4. Los números -1, 3, -2 son los números directores de una línea recta no dirigida L . Encuentre los cosenos directores de L .

Solución. Aquí $l^2 + m^2 + n^2 = 1 + 9 + 4 = 14$. Usando (13) y (14) vemos que el conjunto $\frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}$ y el conjunto $\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}$ son ambos conjuntos de cosenos directores de L .

De la fórmula (9) y de la definición de números directores, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 5. Si $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos distintos sobre una recta L , entonces

$$x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$$

son números directores de L .

Si l, m, n , son números directores de una recta dirigida L , entonces pl, pm, pn , para cualquier número real positivo p , son también números directores de L . (Si L es no dirigida, entonces p puede ser cualquier número real diferente de cero). Por tanto, el número de conjuntos de números directores de una línea recta dada es infinito. Sin embargo, si l_1, m_1, n_1 y l_2, m_2, n_2 son dos conjuntos de números directores, cada conjunto es proporcional al conjunto de cosenos directores, y por lo mismo los conjuntos son proporcionales entre sí esto es, existe un número real diferente de cero k para el cual:

$$l_2 = kl_1, \quad m_2 = km_1, \quad n_2 = kn_1.$$

Si ninguno de los números directores es cero, estas igualdades se pueden escribir

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Del teorema 5 se deduce que si una recta L pasa por el origen y tiene números directores a, b, c entonces $P(a, b, c)$ está también en la línea recta, además, si la recta es dirigida, lo es del origen al punto P .

Teorema 6. Si las líneas L_1 y L_2 tienen números directores l_1, m_1, n_1 y l_2, m_2, n_2 respectivamente, entonces L_1 y L_2 son paralelas si y sólo si el conjunto l_1, m_1, n_1 es proporcional al conjunto l_2, m_2, n_2 .

Demostración. (a) Sea L_1 paralela a L_2 . Entonces los cosenos directores de L_1 son iguales o los negativos de los cosenos directores de L_2 . En cualquier caso los

cosenos directores de L_1 son proporcionales a los cosenos directores de L_2 , y ya que un conjunto de números directores de una recta es proporcional al conjunto de cosenos directores, se deduce que l_1, m_1, n_1 es proporcional a l_2, m_2, n_2 .

(b) Supóngase que l_1, m_1, n_1 es proporcional a l_2, m_2, n_2 esto es, suponemos que existe el número real k para el cual

$$l_2 = kl_1, \quad m_2 = km_1, \quad n_2 = kn_1.$$

Sean $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ los ángulos directores de L_1 y $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ los de L_2 . Entonces:

$$\cos \alpha_2 = \frac{kl_1}{\pm \sqrt{k^2 l_1^2 + k^2 m_1^2 + k^2 n_1^2}} = \frac{l_1}{\pm \sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}} = \pm \cos \alpha_1$$

$$\cos \beta_2 = \frac{km_1}{\pm \sqrt{k^2 l_1^2 + k^2 m_1^2 + k^2 n_1^2}} = \frac{m_1}{\pm \sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}} = \pm \cos \beta_1$$

$$\cos \gamma_2 = \frac{kn_1}{\pm \sqrt{k^2 l_1^2 + k^2 m_1^2 + k^2 n_1^2}} = \frac{n_1}{\pm \sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}} = \pm \cos \gamma_1.$$

de donde:

$$\alpha_2 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \beta_1, \quad \gamma_2 = \gamma_1$$

$$\text{o} \quad \alpha_2 = \pi - \alpha_1, \quad \beta_2 = \pi - \beta_1, \quad \gamma_2 = \pi - \gamma_1,$$

y las rectas son paralelas en ambos casos. ■

Ejemplo 5. Demuestre que la recta L_1 que pasa por $P_1(0, 1, 8)$ y $P_2(4, 5, 0)$ y la línea recta L_2 que pasa por $P_3(1, 3, -3)$ y $P_4(0, 2, -1)$ son paralelas.

Solución. Usando el teorema 5 vemos que 4, 4, -8 son números directores para L_1 y que -1, -1, 2 son números directores para L_2 . Observamos que

$$\frac{4}{-1} = \frac{4}{-1} = \frac{-8}{2} = -4$$

por tanto, los dos conjuntos de números directores son proporcionales, y por el teorema 6 las rectas son paralelas.

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 4, calcule los cosenos y ángulos directores de la recta determinada por $O(0, 0, 0)$ y el punto dado P_1 y dirigida de O hacia P_1 .

1. $P_1(1, \sqrt{2}, 1)$

2. $P_1(1, -\sqrt{2}, -1)$

3. $P_1(-\sqrt{2}, -2, \sqrt{2})$

4. $P_1(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -2)$

En cada uno de los ejercicios del 5 al 8, calcule un conjunto de números y cosenos directores para la línea que pasa por los dos puntos dados y dirigida de P_1 a P_2 .

5. $P_1(0, 0, 0), P_2(2, -2, 2)$

6. $P_1(1, 2, 3), P_2(3, 0, 5)$

7. $P_1(4, 2, -1), P_2(5, -1, 1)$

8. $P_1(5, -1, 2), P_2(6, 1, 0)$

9. (a) Encuentre los cosenos y los ángulos directores de la recta L que pasa por $P_1(1, 0, 1)$ y $P_2(3, 2\sqrt{2}, -1)$, y dirigida de P_1 hacia P_2 .
 (b) Dé 4 conjuntos de números directores de L .

10. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos pueden ser ángulos directores de una recta?

- (a) $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$; (b) $60^\circ, 60^\circ, 45^\circ$;
 (c) $120^\circ, 135^\circ, 60^\circ$; (d) $45^\circ, 135^\circ, 90^\circ$.

11. ¿Cuáles de las siguientes triadas de números reales pueden ser cosenos directores de una recta?

- (a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$; (b) $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, 0$; (c) $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{-6}{7}$; (d) $0, 1, 0$.

12. Dé los ángulos y cosenos directores de las partes positivas y negativas de los ejes X, Y, Z .

13. Una línea recta forma ángulos iguales con los tres ejes de coordenadas. Calcule este ángulo.

14. Una recta forma un ángulo de 60° con el eje X y un ángulo de 135° con el eje Y . ¿Qué ángulo forma con el eje Z ?

En cada uno de los ejercicios del 15 al 18, calcule un conjunto de cosenos directores de la recta con números directores dados.

15. $2, 4, -4$. 16. $1, 2, 3$.
 17. $-3, 4, 2$. 18. $5, -2, 1$.

19. Demuestre que la línea recta determinada por $P_1(3, -4, -2)$ y $P_2(1, -1, 4)$ es paralela a la recta determinada por $P_3(5, -1, 4)$ y $P_4(3, 2, 10)$.

20. Demuestre que los tres puntos $P_1(-1, -5, -1)$, $P_2(1, -2, 5)$ y $P_3(3, 1, 11)$ son colineales; use (a) distancias; (b) números directores.

9.3 Ángulo formado por dos líneas. Sea θ el ángulo entre la recta dirigida L_1 con cosenos directores $\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1$ y la línea recta dirigida L_2 con cosenos directores $\cos \alpha_2, \cos \beta_2, \cos \gamma_2$. Podemos suponer sin perder generalidad que L_1 y L_2 pasan por el origen. Tómense los puntos P_1 y P_2 sobre L_1 y L_2 respectivamente, tal que $\overline{OP_1} = 1$ y $\overline{OP_2} = 1$ (Fig. 9.10). Al aplicar la ley de los cosenos al triángulo OP_1P_2 obtenemos:

$$|P_1P_2|^2 = 1^2 + 1^2 - 2(1)(1)\cos\theta, \quad (15)$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}|P_1P_2|^2.$$

Ya que $|OP_1| = |OP_2| = 1$, las coordenadas de P_1 son $(\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1)$ y las coordenadas de P_2 son $(\cos \alpha_2, \cos \beta_2, \cos \gamma_2)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} |P_1P_2|^2 &= (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)^2 + (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)^2 + (\cos \gamma_2 - \cos \gamma_1)^2 \\ &= (\cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \gamma_2) + (\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1) \\ &\quad - 2(\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2). \end{aligned}$$

De esta igualdad y de la ecuación (8) se deduce que:

$$|P_1P_2|^2 = 2 - 2(\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2).$$

Sustituyendo este resultado en (15) encontramos:

$$\cos\theta = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2.$$

Si L_1 y L_2 son no dirigidas recordamos de la definición de ángulo entre rectas no dirigidas que $0 \leq \theta \leq \pi/2$; por tanto, tendremos:

$$\cos\theta = |\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2|.$$

Hemos demostrado el siguiente teorema.

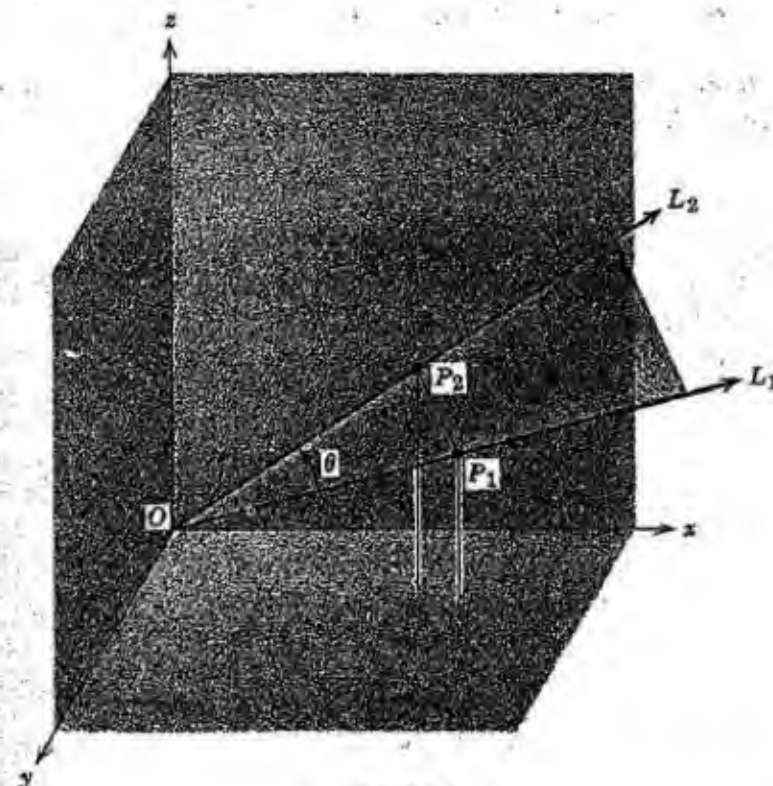


Fig. 9.10

Teorema 7. Sean L_1 y L_2 rectas dirigidas con ángulos directores $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ y $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ respectivamente y formando un ángulo θ . Entonces:

$$\cos\theta = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2. \quad (16)$$

Si L_1 y L_2 son líneas no dirigidas, entonces

$$\cos\theta = |\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2|. \quad (17)$$

Usando la definición de números directores de una recta y fórmulas (13) y (14) podemos establecer de nuevo el teorema 7 como sigue:

Teorema 8. Si l_1, m_1, n_1 ; l_2, m_2, n_2 son los números directores de L_1 y L_2 respectivamente y θ el ángulo entre L_1 y L_2 , entonces:

$$\cos\theta = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} \quad (18)$$

Si L_1 y L_2 son dirigidas, y

$$\cos \theta = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} \quad (19)$$

Si L_1 y L_2 son no dirigidas.

Si L_1 y L_2 son dos rectas y θ el ángulo formado por ellas, entonces L_1 es perpendicular a L_2 si y sólo si $\theta = \pi/2$ y $\cos \theta = 0$. Por tanto, como una consecuencia del teorema 8 tenemos el teorema 9.

Teorema 9. Dos líneas rectas L_1 y L_2 con números directores l_1, m_1, n_1 y l_2, m_2, n_2 respectivamente, son perpendiculares si y sólo si

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \quad (20)$$

Ejemplo 1. Calcule el coseno del ángulo formado por la recta que pasa por $P_1(2, 4, 0)$ y $P_2(0, 0, 4)$ dirigida de P_1 a P_2 y la línea que pasa por $P_3(2, -1, -1)$ y $P_4(2, 2, 3)$ dirigida de P_3 a P_4 .

Solución. La recta que pasa por P_1 y P_2 tiene cosenos directores $-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$ y la línea recta por P_3 y P_4 tiene cosenos directores $0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$. Al aplicar la ecuación (13) tenemos:

$$\cos \theta = (-\frac{1}{3})(0) + (-\frac{2}{3})(\frac{3}{5}) + (\frac{2}{3})(\frac{4}{5}) = -\frac{2}{15} + \frac{8}{15} = \frac{2}{15}.$$

Ejemplo 2. Demuestre que la línea L_1 con números directores $1, -6, 5$ y la línea L_2 con números directores $8, 3, 2$ son perpendiculares.

Solución. Aquí

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = (1)(8) + (-6)(3) + (5)(2) = 8 - 18 + 10 = 0.$$

Por el teorema 9 son líneas perpendiculares.

Ejemplo 3. La recta L_1 tiene números directores $4, -1, -7$ y L_2 tiene números directores $3, -2, 1$. Encuentre un conjunto de números directores de una recta L la cual es perpendicular a L_1 y L_2 .

Solución. Sean l, m, n un conjunto de números directores de L . Entonces por el teorema 9 sabemos que:

$$4l - m - 7n = 0$$

$$3l - 2m + n = 0.$$

Al resolver el sistema para l y m en función de n , obtenemos

$$l = 3n, \quad m = 5n.$$

Cualquier conjunto l, m, n que satisfaga el sistema anterior serán números directores de L . Uno de tales conjuntos es $3, 5, 1$, que se obtiene haciendo $n = 1$. Es obvio que cualquier conjunto que satisfaga este sistema será proporcional al conjunto $3, 5, 1$.

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 4, calcule el coseno del ángulo que forma la línea determinada por P_1 y P_2 con la determinada por P_3 y P_4 . ¿Cuáles de estas líneas son perpendiculares y cuáles paralelas?

1. $P_1(3, 1, 4), P_2(1, -3, -1); P_3(4, 2, -1), P_4(5, -1, 1)$.
2. $P_1(0, 0, 0), P_2(2, -2, 2); P_3(1, 2, 3), P_4(3, 0, 5)$.
3. $P_1(1, 2, 3), P_2(3, 0, 5); P_3(5, -1, 2), P_4(6, 1, 0)$.
4. $P_1(3, 1, 4), P_2(1, -3, -1); P_3(2, 3, 0), P_4(1, 4, 2)$.
5. Demuestre que la recta determinada por $P_1(-1, 6, -2)$ y $P_2(1, 4, -3)$ es perpendicular a la línea recta determinada por $P_3(7, -5, 6)$ y $P_4(5, -6, 4)$.
6. Demuestre que las tres rectas cuyos cosenos directores son $\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7}; \frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}; \frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{6}{7}$; son perpendiculares entre sí.

En cada uno de los ejercicios del 7 al 10, se da un conjunto de números directores para L_1 y L_2 . Determine cuando L_1 y L_2 son paralelas o perpendiculares; si no lo son, calcule el coseno del ángulo entre las dos rectas no dirigidas.

7. $L_1: 4, 3, 1; L_2: 3, -2, 0$.
8. $L_1: 2, -3, 4; L_2: -4, 6, -8$.
9. $L_1: 5, 1, -6; L_2: 2, 8, 3$.
10. $L_1: 1, 2, -3; L_2: -2, 3, -1$.

En cada uno de los ejercicios del 11 al 14, se da un conjunto de números directores para las rectas L_1 y L_2 . Encuentre un conjunto de números directores para la recta L_3 , la cual es perpendicular a L_1 y L_2 .

11. $L_1: 2, 3, -1; L_2: 1, -4, 2$.
12. $L_1: 4, -1, 1; L_2: 1, 2, -2$.
13. $L_1: -2, 2, 1; L_2: 2, 1, 2$.
14. $L_1: 2, -3, 5; L_2: 4, 1, -1$.

15. Por el uso de números directores, demuestre que el triángulo con vértices $P_1(7, 3, 4), P_2(1, 0, 6)$ y $P_3(4, 5, -2)$ es un triángulo rectángulo.

16. Calcule $\angle P_1 P_2 P_3$ en el triángulo del ejercicio 15.

9.4 Planos en el espacio-3. En esta sección consideraremos el problema de encontrar una relación en el espacio-3 cuya gráfica sea un plano. Usaremos los siguientes principios de la geometría tridimensional (o del espacio).

(i) A través de un punto dado P_1 en la recta L hay un y sólo un plano perpendicular a L (Fig. 9.11).

(ii) Un punto P distinto de P_1 está en el plano descrito en (i), si y sólo si la línea a través de P y P_1 es perpendicular a L .

Llamaremos a la recta L la **normal** al plano en P_1 .

Siendo G un plano, supóngase que la línea recta L con números directores a, b, c es normal a G en el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ (Fig. 9.11). Si $P(x_2, y_2, z_2)$ es cualquier punto distinto de P_1 , sabemos de (ii) que

$$P(x_2, y_2, z_2) \in G \iff (\text{la línea } P_1 P) \perp L.$$

Por el teorema 5 sabemos que la recta $P_1 P$ tiene números directores $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ y del teorema 9 se deduce que

$$(\text{La línea } P_1 P) \perp L \iff a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0.$$

Si $P(x_2, y_2, z_2)$ coincide con $P_1(x_1, y_1, z_1)$, entonces

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0.$$

Por tanto, se deduce que

$$P(x_2, y_2, z_2) \in G \iff a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0;$$

en otras palabras,

$$P(x_2, y_2, z_2) \in G \iff (x_2, y_2, z_2) \in \{(x, y, z) \mid a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0\}.$$

Hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 10. Si la línea recta L con números directores a, b, c es normal al plano G en el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$, entonces G es la gráfica de la relación

$$\{(x, y, z) \mid a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0\}.$$

En otras palabras,

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0 \quad (21)$$

es una ecuación del plano G .

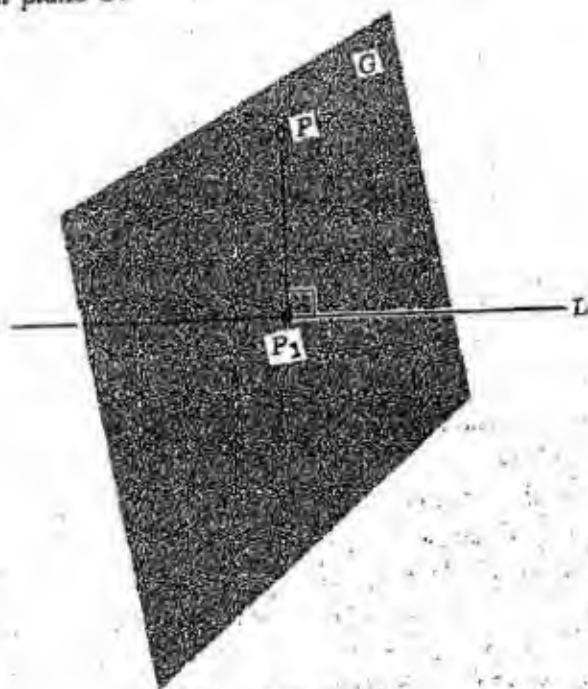


Fig. 9.11

Obsérvese que (21) puede escribirse en la forma

$$ax + by + cz + d = 0$$

donde $d = -(ax_1 + by_1 + cz_1)$. Una ecuación de esta forma en la cual a, b y c

no son todos ceros, es una ecuación de primer grado en x, y , y z . Por tanto, el siguiente teorema es verdadero.

Teorema 11. Todo plano es la gráfica de una ecuación de primer grado.

La inversa del teorema 11 es también cierta.

Teorema 12. La gráfica G de la ecuación

$$ax + by + cz + d = 0, \quad (22)$$

esto es, la gráfica de la relación

$$R = \{(x, y, z) \mid ax + by + cz + d = 0\},$$

donde a, b y c no son todos ceros, es un plano perpendicular a la recta con números directores a, b y c .

Demostración. Sea (x_1, y_1, z_1) una triada ordenada para la cual $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$. Entonces restando $ax_1 + by_1 + cz_1 + d$ de cada miembro de la ecuación (22) obtenemos $ax - ax_1 + by - by_1 + cz - cz_1 = 0$, la cual es equivalente a (22); por tanto,

$$R = \{(x, y, z) \mid a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0\}.$$

Ahora bien, por el teorema 10 sabemos que la gráfica de esta relación es el plano G , cuya normal en $P(x_1, y_1, z_1)$ tiene números directores a, b, c , con lo que completamos la demostración.

Por ejemplo, $5x + 3y - 2z + 15 = 0$ es la ecuación de un plano, que tiene la propiedad de que cualquier normal a él tiene números directores 5, 3, -2. La ecuación $z = 4$ es la ecuación de un plano perpendicular a cualquier recta con números directores 0, 0, 1; por tanto, este plano es perpendicular al eje z , paralelo al plano xy y pasa por el punto $P(0, 0, 4)$. Cada plano paralelo al plano xy tiene una ecuación de forma $z = k$, donde k es una constante. Cada plano paralelo al plano xz tiene una ecuación de forma $y = k$, y cada plano paralelo al yz tiene una ecuación de forma $x = k$. La ecuación del plano xy es $z = 0$; la ecuación del plano xz es $y = 0$, y la ecuación del plano yz es $x = 0$.

Si un conjunto de puntos G contiene un punto P en el eje x la coordenada x de P se llama la *intersección x* de G ; esto es, un número k es la intersección x de G si $P(k, 0, 0) \in G$. La intersección y y la intersección z de G se definen en forma semejante.

En el caso de que un plano tenga intersecciones x y y y z diferentes de cero, las intersecciones son útiles para localizar el plano e indicar su gráfica en el sistema de coordenadas. La recta de intersección de un plano G con el plano xy pasa por los puntos $P_1(x_0, 0, 0)$ y $P_2(0, y_0, 0)$ donde x_0 es la intersección x y y_0 es la intersección y de G . En forma semejante, la línea recta de intersección de un plano G con el plano yz pasa por $P_2(0, y_0, 0)$ y $P_3(0, 0, z_0)$ donde z_0 es la intersección z de G ; la recta de intersección de G y el plano xz pasa por $P_1(x_0, 0, 0)$ y $P_3(0, 0, z_0)$.

Las líneas de intersección de un plano G y los planos coordenados se llaman las *trazas* de G en los planos respectivos.

Ejemplo 1. Encuentre las intersecciones del plano que es la gráfica de:

$$\{(x, y, z) \mid 2x + 3y + 4z = 12\}. \quad (23)$$

Indique la gráfica en un sistema de coordenadas dibujando las trazas del plano en cada uno de los planos coordenados.

Solución. La intersección x de la gráfica de (23) es el número x_0 para el cual:

$$2x_0 + 3(0) + 4(0) = 12, \quad 2x_0 = 12, \quad x_0 = 6.$$

En forma análoga, puede comprobarse que la intersección y es 4 y la intersección z es 3.

La gráfica pasa por los puntos $P_1(6, 0, 0)$, $P_2(0, 4, 0)$ y $P_3(0, 0, 3)$. Estos puntos y las trazas de la gráfica en los planos coordenados se muestran en la Fig. 9.12.

Recordamos de la Sec. 1.1 que la intersección de los conjuntos A y B , re-

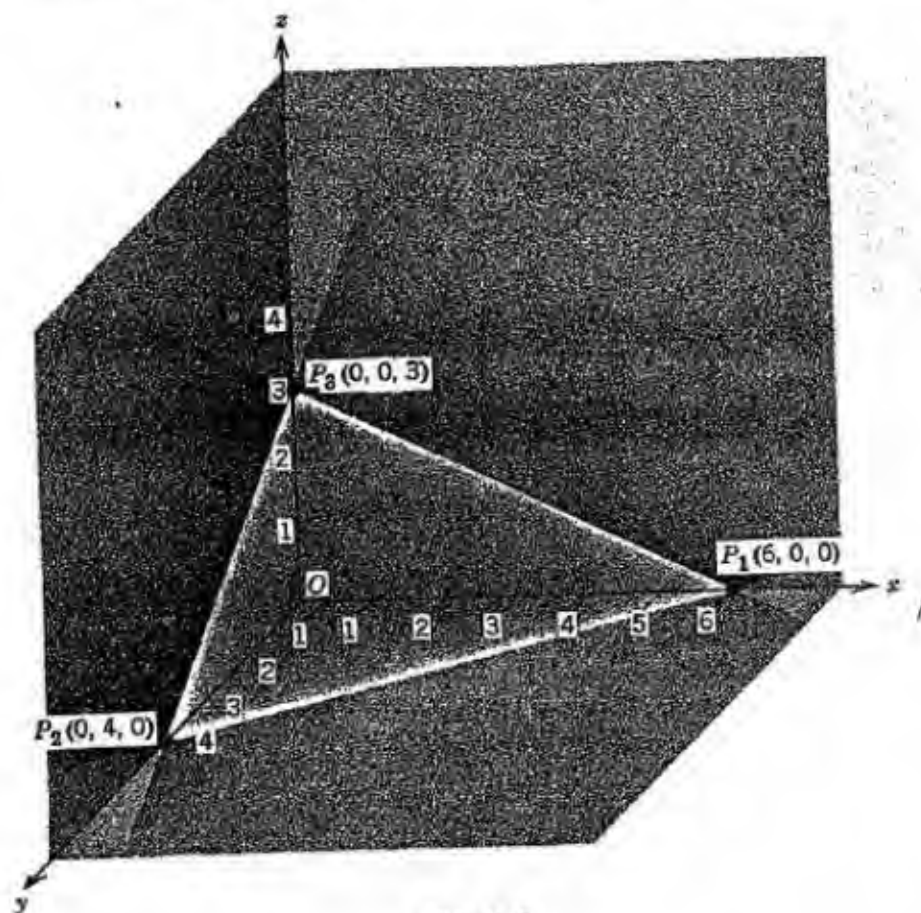


Fig. 9.12

presentada por $A \cap B$, es el conjunto, cuyos elementos pertenecen al mismo tiempo a A y B . Se deduce que si S_{xyz} y T_{xyz} son dos proposiciones, entonces:

$$\{(x, y, z) \mid S_{xyz} \text{ y } T_{xyz}\} = \{(x, y, z) \mid S_{xyz}\} \cap \{(x, y, z) \mid T_{xyz}\}. \quad (24)$$

Ejemplo 2. Indique la gráfica de la relación:

$$R_1 = \{(x, y, z) \mid 2x + 3y + 4z = 12 \text{ y } z = 0\}.$$

Solución. Según (24) podemos escribir:

$$R_1 = \{(x, y, z) \mid 2x + 3y + 4z = 12\} \cap \{(x, y, z) \mid z = 0\}.$$

De donde resulta que la gráfica de R_1 es la intersección de las gráficas de $R_2 = \{(x, y, z) \mid 2x + 3y + 4z = 12\}$ y $R_3 = \{(x, y, z) \mid z = 0\}$. Sabemos por el ejemplo 1 que la gráfica de R_2 es el plano $P_1P_2P_3$ mostrado en la Fig. 9.12. La gráfica de R_3 es el plano xy . Por tanto la gráfica de R_1 es la recta de intersección del plano $P_1P_2P_3$ y el plano xy .

Ejemplo 3. Describa la gráfica de la relación

$$R_4 = \{(x, y, z) \mid 2x + 3y + 4z = 12 \text{ y } 10x + 15y + 6z = 30\}.$$

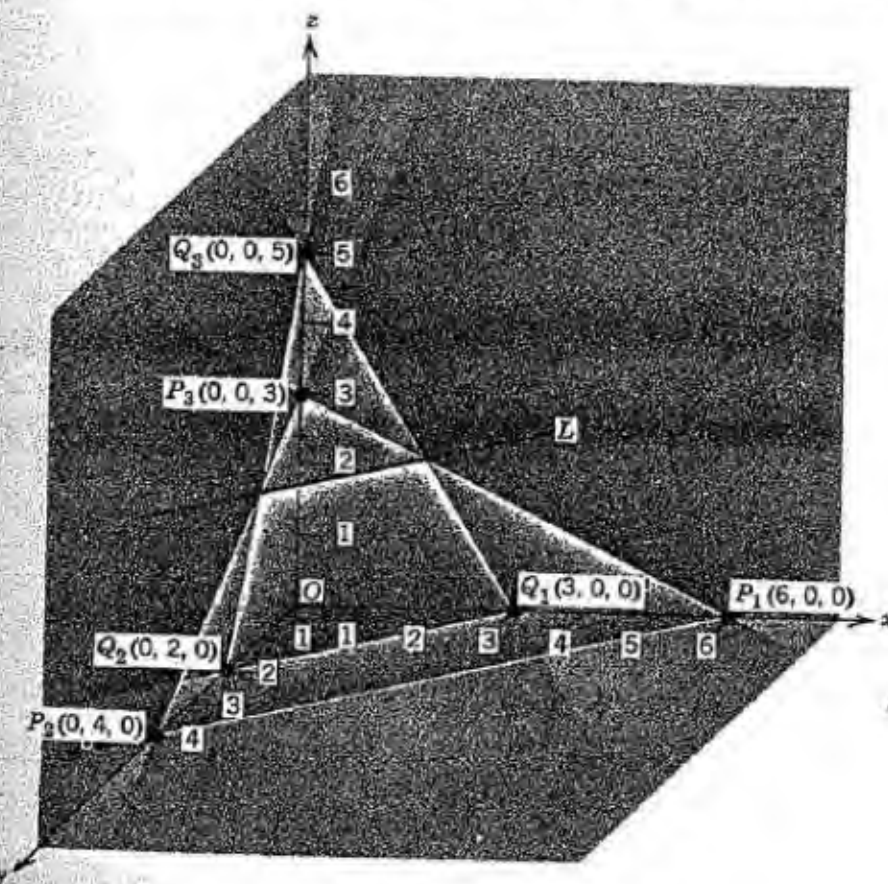


Fig. 9.13

Solución. Sabemos por (24) que $R_4 = R_5 \cap R_6$ donde

$$R_5 = \{(x, y, z) \mid 2x + 3y + 4z = 12\}$$

$$R_6 = \{(x, y, z) \mid 10x + 15y + 6z = 30\}.$$

Ya se encontró en el ejemplo 1 que la gráfica de R_5 es el plano $P_1P_2P_3$ de la Fig. 9.13. En forma similar se observará que la gráfica de R_6 es el plano $Q_1Q_2Q_3$ de la Fig. 9.13. La gráfica de R_4 es la recta de intersección de los dos planos. La recta L se muestra en la Fig. 9.13.

Es importante el hecho de que una recta en el espacio-3 está determinada por las ecuaciones de dos planos que se interceptan en dicha línea. Examinaremos esta idea con más detalle en la siguiente sección.

Ejemplo 4. Encuentre la ecuación del plano que pasa por $P_1(3, -5, 1)$ y es perpendicular a la recta determinada por $P_1(3, -5, 1)$ y $P_2(4, 2, 4)$.

Solución. Por el teorema 5 encontramos que $4 - 3 = 1$, $2 - (-5) = 7$, $4 - 1 = 3$ son los números directores de la recta que pasa por P_1 y P_2 la cual es normal al plano. Entonces por el teorema 10 tenemos

$$1(x - 3) + 7(y + 5) + 3(z - 1) = 0$$

$$x + 7y + 3z + 29 = 0$$

que es la ecuación deseada.

Supóngase que L_1 es una recta normal al plano con ecuación:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0.$$

y supóngase que L_2 es una línea recta normal al plano con ecuación:

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

El ángulo que forman los planos se define como el ángulo que forman L_1 y L_2 (Nótese que $0 \leq \theta \leq \pi/2$). Según el teorema 12 a_1, b_1, c_1 son los números directores de L_1 y que a_2, b_2, c_2 son los de L_2 . Por tanto, por el teorema 8, tenemos

$$\cos \theta = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \quad (25)$$

Con el uso de los teoremas 6 y 9 resulta el teorema siguiente.

Teorema 13. El plano con ecuación $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ es perpendicular al plano con ecuación $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ si y sólo si

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

Los planos son paralelos si y sólo si existe un número real k para el cual

$$a_2 = ka_1, \quad b_2 = kb_1, \quad c_2 = kc_1.$$

Ejemplo 5. Encuentre la ecuación del plano perpendicular al que tiene por ecuación $5x + y + 4z = 9$, y pasa por $P_1(3, 1, 2)$ y $P_2(3, 4, 4)$.

Solución. Sabemos por el teorema 10 que la ecuación deseada tiene la forma

$$a(x - 3) + b(y - 1) + c(z - 2) = 0. \quad (26)$$

Ya que (26) es la ecuación del plano perpendicular a aquel cuya ecuación es $5x + y + 4z = 9$, sabemos por el teorema 13 que

$$5a + b + 4c = 0. \quad (27)$$

Además, ya que (26) es la ecuación de un plano que contiene el punto $P_1(3, 4, 4)$, tenemos

$$a(3 - 3) + b(4 - 1) + c(4 - 2) = 0$$

$$3b + 2c = 0. \quad (28)$$

Si resolvemos el sistema (27) y (28), en función de c , tenemos:

$$b = -\frac{2}{3}c, \quad a = -\frac{1}{3}c.$$

Esto es, cualquier triada ordenada de números que satisface este sistema es un conjunto de números directores de L . En particular, $2, 2, -3$ es uno de tales conjuntos y usando estos valores en (26)

$$2(x - 3) + 2(y - 1) - 3(z - 2) = 0$$

$$2x + 2y - 3z - 2 = 0.$$

EJERCICIOS

En los ejercicios del 1 al 4 encuentre las intersecciones del plano cuya ecuación se da. Use las intersecciones para dibujar las trazas del plano e indique la gráfica en un sistema de coordenadas.

1. $3x - y + 4z - 12 = 0.$

3. $4x + 3y + 2z = 12.$

2. $x + 2y + 3z + 12 = 0.$

4. $2x + 3y = 6.$

5. Grafique el plano cuya ecuación es $x - y - 2z = 0$. *Sugerencia:* Construya las trazas del plano en los planos xz y xy ; dibuje en el primer octante un segmento que una a dos puntos de estas trazas para indicar una parte del plano en el primer octante. El **primer octante** es la parte del espacio-3 en el cual las coordenadas de cada punto son no-negativas.

6. Encuentre la ecuación del plano cuyas intersecciones x, y y z son $3, 2$ y -1 respectivamente.

7. Encuentre la ecuación del plano que pasa por $(5, -2, 7)$ y es paralelo al plano con ecuación $2x + 3y - 2z + 4 = 0$.

8. Encuentre la ecuación de un plano que contenga al punto $(1, -3, 2)$ y sea perpendicular a la recta que une los puntos $(0, 0, 3)$ y $(1, -3, -4)$.

9. Encuentre la ecuación del plano que pasa por los puntos $(2, 0, 1)$, $(-1, 1, 2)$ y sea perpendicular al plano $3x + y - z = 0$. Grafique el plano cuya ecuación ha encontrado.

10. Encuentre la ecuación del plano que pasa por los tres puntos $(3, 3, 0)$, $(-2, -3, 4)$ y $(0, 6, 0)$.

11. Encuentre la ecuación de un plano que pase por el punto $(7, 0, 3)$ y sea perpendicular a cada uno de los planos con ecuaciones $2x - 4y + 3z = 0$ y $7x + 12y + z = 14$.

12. Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto $(2, -1, 3)$ y sea perpendicular a la recta con números directores $-4, 2, -1$.

13. Encuentre la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a la línea recta que une los puntos $(10, -3, 7)$ y $(12, 6, -2)$.

14. Encuentre el punto de intersección de los planos cuyas ecuaciones son $x + y + z - 3 = 0$, $x - 2y - 8 = 0$, $x + 2y + z = 0$.

15. Encuentre el ángulo entre los planos cuyas ecuaciones son $2x - y + z = 7$ y $x + y + 2z = 11$.

En los ejercicios del 16 al 19 se dan las ecuaciones de dos planos Q_1 y Q_2 . Determine si Q_1 y Q_2 son paralelos o perpendiculares. Si no lo son, calcule el coseno del ángulo que forman los dos planos.

16. $x - 2y - 2z - 10 = 0$; $4x + 6y - 2z + 13 = 0$.

17. $2x + 2y + 3z + 13 = 0$; $8x + 7y - 10z + 3 = 0$.

18. $4x - 2y + 6z = 3$; $6x - 3y + 9z = 7$.

19. $2x + 5y + 4z - 11 = 0$; $3x - y + 2z - 9 = 0$.

20. Construya la gráfica de las siguientes relaciones.

$$R_1 = \{(x, y, z) \mid x + y = 4\}; R_2 = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 4\}; \\ R_3 = \{(x, y, z) \mid x = 5\}; R_4 = \{(x, y, z) \mid y = 4\}; R_5 = \{(x, y, z) \mid x = 5 \text{ y } y = 4\}.$$

9.5 Líneas en el espacio-3. Una línea en el espacio-3 es básicamente considerada como el conjunto de puntos que forman la intersección de dos planos. Sabemos por la sección anterior que cualquier plano es la gráfica de una ecuación de primer grado y que la intersección de las gráficas de $\{(x, y, z) \mid S_{xyz}\}$ y $\{(x, y, z) \mid T_{xyz}\}$ es la gráfica de $\{(x, y, z) \mid S_{xyz} \text{ y } T_{xyz}\}$. De donde una recta en el espacio-3 es la gráfica de una relación de la forma:

$$\{(x, y, z) \mid a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ y } a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0\},$$

esto es, una línea recta en el espacio-3 no es la gráfica de una ecuación sino la gráfica de una proposición de la forma:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ y } a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \quad (29)$$

Si una línea es la gráfica de la proposición (29), decimos que la recta es la **gráfica del sistema**

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \quad (30)$$

y llamaremos al sistema (30) una **representación biplanar** de la recta.

Ejemplo 1. Escriba una representación biplanar de la línea recta L que pasa por el punto $P_1(2, 1, 5)$, perpendicular a la recta L_1 con números directores $3, -1, 4$, y perpendicular a la recta L_2 con números directores $-2, 5, 1$.

Solución. Ya que L es perpendicular a L_1 en $P_1(2, 1, 5)$ y que $3, -1, 4$ son los números directores de L_1 , L está en el plano con ecuación $3(x - 2) - 1(y - 1) + 4(z - 5) = 0$. Además, ya que L es perpendicular a L_2 en $P_1(2, 1, 5)$, L está en

el plano con ecuación $-2(x - 2) + 5(y - 1) + 1(z - 5) = 0$. De donde, el sistema

$$3(x - 2) - (y - 1) + 4(z - 5) = 0, \quad -2(x - 2) + 5(y - 1) + (z - 5) = 0$$

es la representación biplanar de L .

Como un conjunto de números directores determina un conjunto de rectas paralelas, un punto y un conjunto de números directores determinan una y sólo una línea. Consideremos la recta L que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ con números directores a, b, c . Un punto $P(x, y, z)$ distinto de P_1 estará en la recta L si y sólo si el conjunto de números directores de la recta que pasa por P y P_1 es proporcional al conjunto a, b, c ; esto es, si y sólo si existe un número real t para el cual

$$x - x_1 = ta, \quad y - y_1 = tb, \quad z - z_1 = tc.$$

Esto significa que para cada punto $P(x, y, z)$ en L habrá un número real t tal que

$$x = x_1 + ta, \quad y = y_1 + tb, \quad z = z_1 + tc. \quad (31)$$

y para cada número real t el punto $P(x, y, z)$ cuyas coordenadas están dadas por (31) estará en la línea recta L .

En el sistema (31), t se llama **parámetro** y dicho sistema es una **representación paramétrica** de la recta con números directores a, b, c la cual pasa por el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$. La representación paramétrica de una recta asocia a cada número real un punto en dicha recta. Por ejemplo, si L tiene números directores $-4, 5, 6$ y pasa por el punto $P_1(2, 3, -1)$, la representación paramétrica de L es:

$$x = 2 - 4t, \quad y = 3 + 5t, \quad z = -1 + 6t. \quad (32)$$

Usando la representación paramétrica (32) podemos determinar las coordenadas de otros puntos de L al asignar valores a t ; por ejemplo al reemplazar t sucesivamente por $-1, \frac{2}{5}$, y 2 en (32) encontramos que $P_1(6, -2, 7)$, $P_2(-\frac{2}{5}, \frac{19}{5}, 3)$ y $P_3(-6, 13, 11)$ son puntos de L .

La representación biplanar (30) y la paramétrica (31) son formas básicas de representar una recta. Hay varias formas especiales de (30) y (31) que son útiles; discutiremos algunas de ellas.

Si en la representación paramétrica (31) $a \neq 0$, $b \neq 0$, y $c \neq 0$, podemos escribir

$$t = \frac{x - x_1}{a}, \quad t = \frac{y - y_1}{b}, \quad t = \frac{z - z_1}{c},$$

entonces

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \quad (33)$$

es la representación de la línea recta con números directores a, b, c , y que pasa por $P_1(x_1, y_1, z_1)$. El sistema (33) se llama **representación simétrica** de la recta. Notamos que (33) consiste de tres ecuaciones

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}, \quad \frac{x - x_1}{a} = \frac{z - z_1}{c}, \quad \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \quad (34)$$

y cada una de estas ecuaciones es la ecuación de un plano. Por tanto dos ecuaciones cualesquiera del sistema (33) constituirán una representación biplanar de la recta.

Si uno de los números direccionales de la recta L es cero, digamos $a = 0$, y $b \neq 0$, $c \neq 0$, entonces (33) tomará la forma

$$x - x_1 = 0; \quad \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \quad (35)$$

resultados semejantes se obtienen en los casos en que $a \neq 0$, $b = 0$, $c \neq 0$ y $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$.

Cada una de las ecuaciones de (34) y (35) tienen por gráfica planos que son perpendiculares al menos a uno de los planos coordenados; por ejemplo, la gráfica

de $\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}$ es perpendicular al plano xy , ya que un conjunto de números

directores de la normal al plano es $b, -a, 0$, y la normal es paralela al eje z .

Un plano que contiene a la recta L y es perpendicular a uno de los planos de coordenadas es un **plano de proyección** de la línea recta L . Cuando se da una representación biplanar de una recta L , para la cual cada plano es un plano de proyección de L , decimos que ésta es una **representación perpendicular** de L . Las dos ecuaciones de una representación simétrica de L forman una representación perpendicular de L .

Si $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos distintos de una línea L , entonces según el teorema 5, $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ son números directores de L y si ninguno de éstos es cero la representación simétrica (33) tiene la forma

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \quad (36)$$

y se llama **representación mediante dos-puntos** de L .

Supóngase que los planos con ecuaciones respectivas

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad \text{y} \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

no son paralelos (esto es, no existe un número real k para el cual $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$, $c_2 = kc_1$). Entonces estos dos planos se cortan en la recta L cuya representación biplanar es

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

Observe que para cualesquiera números reales k_1 y k_2 ,

$$k_1(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + k_2(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

es la ecuación de un plano que contiene L . Es obvio que ésta es la ecuación de un plano ya que es de primer grado en x, y, z . Además, si (x_1, y_1, z_1) es cualquier punto de L , entonces

$$a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 + d_1 = 0, \quad \text{y} \quad a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1 + d_2 = 0,$$

y en consecuencia

$$k_1(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 + d_1) + k_2(a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1 + d_2) = 0.$$

Por tanto, si k_1 y k_2 son reales y $k_2 \neq 0$, entonces

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$

$$k_1(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + k_2(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

es una representación biplanar de L .

Por ejemplo, consideremos la recta L con representación biplanar

$$5x - 3y + 4z + 7 = 0, \quad 4x + 2y + 4z + 8 = 0.$$

entonces

$$k_1(5x - 3y + 4z + 7) + k_2(4x + 2y + 4z + 8) = 0$$

es la ecuación del plano que contiene a L . En particular, para $k_1 = 1$ y $k_2 = -1$ obtenemos

$$x - 5y - 1 = 0$$

como la ecuación del plano que contiene a L . En consecuencia

$$5x - 3y + 4z + 7 = 0, \quad x - 5y - 1 = 0$$

es otra representación biplanar de la línea L .

Ejemplo 2. Sea L una línea con representación biplanar

$$x + y - z = 12, \quad x - y + 2z = 6. \quad (37)$$

(a) Encuentre la representación perpendicular de L .

(b) Encuentre los puntos de intersección de L con los planos coordenados.

(c) Encuentre una representación simétrica y una paramétrica de L .

Solución. (a) Buscamos las ecuaciones de dos planos que contienen la línea recta representada por (37) y que sean perpendiculares a uno de los planos coordenados. Podemos escribir (37) como:

$$2x + 2y - 2z = 24, \\ x - y + 2z = 6,$$

si sumamos, encontramos que

$$3x + y = 30 \quad (38)$$

es la ecuación de un plano que contiene a L , y es perpendicular al plano xy . En forma semejante, encontramos que cada una de las ecuaciones

$$2y - 3z = 6 \quad (39)$$

$$2x + z = 18 \quad (40)$$

es la ecuación de un plano que contiene a L y es perpendicular a un plano coordenado. Entonces dos ecuaciones cualesquiera de (38), (39) y (40) dan una representación perpendicular de L ; por ejemplo, el sistema

$$3x + y = 30, \quad 2y - 3z = 6$$

es una representación perpendicular de L .

(b) Para encontrar el punto de intersección de L con el plano xy , hacemos $z = 0$ en (37) y resolvemos el sistema

$$x + y = 12, \quad x - y = 6$$

Vemos que (9, 3) es la solución del sistema y que el punto $P_1(9, 3, 0)$ está en L . En forma similar encontramos que $P_2(10, 0, -2)$ y $P_3(0, 30, 18)$ están en L y que P_1, P_2, P_3 son los puntos buscados.

(c) sabemos por (b) que $P_1(9, 3, 0)$ y $P_2(10, 0, -2)$ son puntos de L , entonces por el teorema 5, $10 - 9 = 1, 0 - 3 = -3, -2 - 0 = -2$ son los números directores de L . Por tanto,

$$\frac{x-9}{1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{-2}$$

es una representación simétrica de L y

$$x = 9 + t, \quad y = 3 - 3t, \quad z = -2t$$

es una representación paramétrica de L .

Ejemplo 3. (a) Encuentre una representación paramétrica de la recta L determinada por los puntos $P_1(-3, -1, 5)$ y $P_2(-1, -4, 4)$.

(b) Encuentre las coordenadas del punto de intersección de la línea recta con el plano $5x - y + 4z + 3 = 0$.

Solución. (a) Por el teorema 5 encontramos que $2, -3, -1$ es un conjunto de números directores de L . Usando (31) obtenemos

$$x = -3 + 2t, \quad y = -1 - 3t, \quad z = 5 - t$$

como ecuaciones paramétricas de L .

(b) Para encontrar el valor del parámetro t que corresponde al punto en el cual la recta L corta al plano con la ecuación dada, sustituimos $x = -3 + 2t$, $y = -1 - 3t$, y $z = 5 - t$ en esa ecuación y obtenemos

$$5(-3 + 2t) - (-1 - 3t) + 4(5 - t) + 3 = 0$$

$$9t + 9 = 0, \text{ entonces } t = -1.$$

Si sustituimos este valor de t en la representación paramétrica de L , encontramos que el punto deseado es $(-5, 2, 6)$.

EJERCICIOS

En los ejercicios del 1 al 4 encuentre la representación de la recta determinada por los dos puntos dados.

1. $(1, 6, -3), (4, 9, 2)$.

2. $(10, -3, 7), (6, -5, 4)$.

3. $(-4, 3, 2), (3, 5, -1)$.

4. $(-1, 2, -1), (6, 4, -3)$.

En los ejercicios del 5 al 8 encuentre la representación paramétrica de la línea recta que pasa por P_1 y con los números directores dados.

5. $P_1(-4, -8, 3); 12, 4, -3$.

6. $P_1(2, 4, -1); 2, -3, 0$.

7. $P_1(-3, 4, -2); -3, 0, 2$.

8. $P_1(1, -3, 2); 0, -2, 0$.

En cada uno de los ejercicios del 9 al 12 encuentre la representación simétrica y un conjunto de cosenos directores de la recta L dada por la representación biplanar.

9. $3x - 4y + 2z = 5, x - 2y - 4z = 7$.

10. $2x - 3y - 5z - 8 = 0, 2x + 3y - z + 4 = 0$.

11. $3x + 3y - 3z - 11 = 0, 9x - 6y - 4z + 12 = 0$.

12. $2x + y - 6z = 14, 2x - 3y + 2z = -2$.

13. Encuentre el punto en el cual la recta con representación biplanar $2x - y + z - 5 = 0, x - 3y + 2z - 1 = 0$ corta los planos coordenados.

En los ejercicios del 14 al 16 demuestre que la línea L con representación dada está en el plano Q , cuya ecuación se da

14. $L: x = 2 + 3t, y = -2 + t, z = 3 - 4t; Q: 2x + 2y + 2z - 6 = 0$.

15. $L: 3x + 5y + 7 = 0, 4x + 5z + 1 = 0; Q: x + 3y - z + 4 = 0$.

16. $L: \frac{x+2}{-2} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-1}{1}; Q: 2x - 3y - 2z = 3$.

17. Demuestre que la recta determinada por los puntos $(\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})$ y $(2, -3, 0)$ está en el plano cuya ecuación es $x - 2y + z = 8$.

18. Calcule el coseno del ángulo formado por las rectas cuyas representaciones son $\frac{x-6}{6} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{9}$ y $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z-5}{3}$.

19. Calcule una representación paramétrica de la línea recta que pasa por $P_1(2, 4, -2)$ y es perpendicular a la recta con representación paramétrica $x = 6 - t, y = -5 + 4t, z = -1 - 2t$.

En los ejercicios del 20 al 21 demuestre que las rectas L_1 y L_2 se cortan y encuentre el punto de intersección.

20. $L_1: x = -2 + 5t, y = 2 + 3t, z = -2;$

$L_2: x = -3 + 2t, y = 5, z = 7 - 3t$.

21. $L_1: x = 10 + 6t, y = -7 - 2t, z = 7 + 3t;$

$L_2: x = 3 + 5t, y = 5 + 8t, z = -t$.

22. Calcule la distancia perpendicular del punto $(7, 1, -6)$ a la línea recta con representación paramétrica $x = -5 + 3t, y = 6 - 4t, z = -2 + t$.

23. Demuestre que las siguientes rectas no se interceptan. Calcule la distancia perpendicular entre ellas.

$L_1: x = 1 + t, y = 1 + t, z = 1 + t;$

$L_2: x = -1 + t, y = -6 - 8t, z = 2 - 2t$.

24. Calcule una ecuación del plano que pasa por $(2, -1, -1)$ y contiene a la recta con representación biplanar $2x + y - 4 = 0, y + 2z = 0$.

25. Calcule el ángulo entre la recta L_1 no dirigida, con representación paramétrica $x = 3 + 2t, y = -1 + t, z = 3 - t$ y L_2 con representación paramétrica $x = -2 + t, y = 7 + 2t, z = t$.

En los ejercicios 26 y 27 calcule un conjunto de cosenos directores de la línea con representación paramétrica dada.

26. $x = 2 - t, y = 3 + 2t, z = 5 - 4t$.

27. $x = -4 + 2t, y = 7 + t, z = 3 - 2t$.

En los ejercicios del 28 al 31, dé una representación paramétrica de la recta determinada por las condiciones dadas.

28. Pasa por $P_1(1, -2, 3)$ y con números directores $3, 4, -5$.

29. Pasa por $P_1(1, 3, 1)$ y $P_2(4, 6, -2)$.
 30. Pasa por $P_1(2, 1, 0)$ y con números directores $0, 2, 5$.
 31. Pasa por $(1, -1, 2)$ y es paralela al eje x .
 32. (a) Dé una representación paramétrica de la recta L que pasa por $P_1(-3, -1, 5)$ y con números directores $2, -3, -1$.
 (b) Dé otros tres puntos de L .
 (c) Encuentre el punto en el cual L corta el plano xy .
 33. Encuentre la distancia entre los planos paralelos con ecuaciones $6x + 3y - 2z + 14 = 0$ y $6x + 3y - 2z - 35 = 0$.

Sugerencia. Determine primero una representación paramétrica de la normal a estos planos y que pasa por el origen; entonces encuentre los puntos en los cuales esta normal corta cada uno de los planos y finalmente use la fórmula de la distancia entre dos puntos para obtener la distancia deseada.

34. Grafique las relaciones en el espacio 2.

- (a) $\{(x, y) \mid x = 4 \text{ y } y = 1\}$;
 (b) $\{(x, y) \mid 2x - 3y + 4 = 0 \text{ y } x + y = 0\}$.

35. Grafique las relaciones en el espacio 3.

- (a) $\{(x, y, z) \mid x = 4 \text{ y } y = 1\}$;
 (b) $\{(x, y, z) \mid 2x - 3y + 4 = 0 \text{ y } x + y = 0\}$.

9.6 Cilindros. Un conjunto de puntos en el espacio 3 que sea la gráfica de una relación descrita por una sola ecuación es una **superficie**. Hemos estudiado dos tipos de superficies, planos y esferas. En esta sección estudiaremos un tercer tipo, los llamados cilindros.

Consideremos una curva C que está en el plano M , y sea S el conjunto de todas las líneas que cortan a C y son perpendiculares a M . Al conjunto de todos los puntos de las rectas de S se le llama **superficie cilíndrica** o, brevemente, **cilindro**. La curva C se llama **directriz** del cilindro y cada línea recta en el conjunto S se llama **elemento** del cilindro. Los elementos de un cilindro son paralelos entre sí, ya que cada uno de ellos es perpendicular a M . La curva de intersección de un cilindro con un plano perpendicular a los elementos se llama **sección normal**. Cada sección normal es congruente con la directriz. Frecuentemente el nombre de la directriz se usa para describir al cilindro: por ejemplo, un cilindro cuya directriz es una elipse se llama cilindro elíptico.

El sistema de coordenadas siempre se puede escoger de tal manera que el plano que contiene la directriz de un cilindro dado, sea uno de los planos coordenados, y por tanto los elementos son paralelos a uno de los ejes coordenados.

Supongamos que la directriz C está en el plano xy y es la gráfica de

$$\{(x, y) \mid E(x, y) = 0\}$$

donde $E(x, y)$ es una expresión que contiene solamente a x y y como variables. Entonces la gráfica de:

$$\{(x, y, z) \mid E(x, y) = 0\}$$

es el cilindro con directriz C y con elementos paralelos al eje z .

Por ejemplo, la gráfica de

$$\{(x, y) \mid (x - 2)^2 + y^2 = 4\}$$

es el círculo C en el plano xy con centro en $(2, 0)$ y radio 2. La gráfica de

$$\{(x, y, z) \mid (x - 2)^2 + y^2 = 4\}$$

es el cilindro K (Fig. 9.14) con C como directriz y con elementos paralelos al eje z . Esto se deduce al observar que si $(a, b) \in C$, entonces $(a, b, k) \in K$ para cualquier número k real.

En forma similar, si la gráfica de $\{(y, z) \mid E(y, z) = 0\}$ es la curva C en el plano yz , entonces la gráfica de $\{(x, y, z) \mid E(y, z) = 0\}$ es un cilindro con directriz C y con elementos paralelos al eje x . Además, si la gráfica de $\{(x, z) \mid E(x, z) = 0\}$ es una curva C en el plano xz , entonces la gráfica de $\{(x, y, z) \mid E(x, z) = 0\}$ es un cilindro con directriz C y con elementos paralelos al eje y .

Representaremos gráficamente un cilindro, dibujando la directriz C y segmentos de algunos elementos del cilindro; todos los segmentos tienen una longitud dada y parten de C en una misma dirección. Los extremos de estos segmentos determinan una sección normal C' del cilindro.

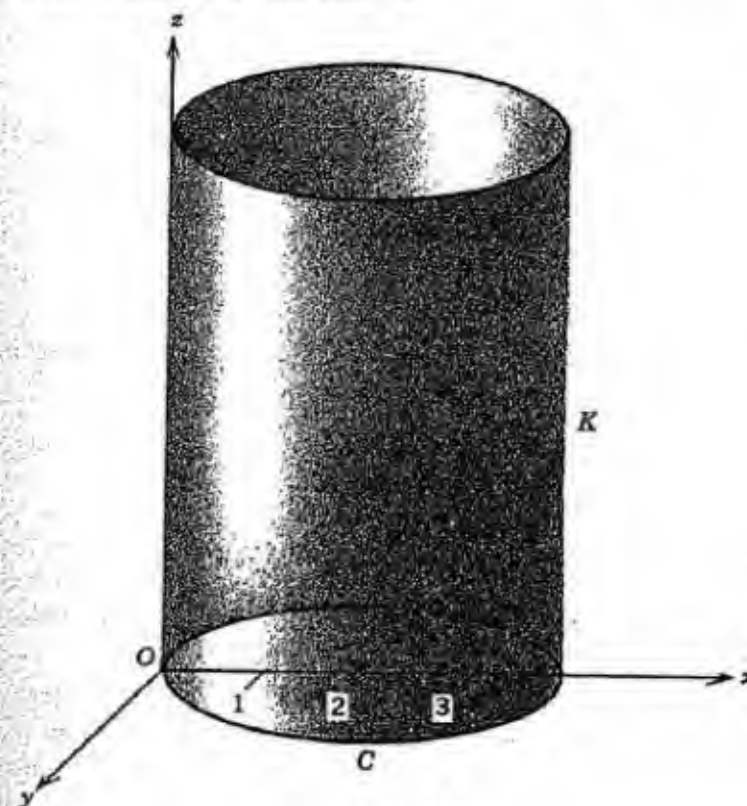


Fig. 9.14

Ejemplo. Grafique cada una de las relaciones (a) $R_1 = \{(x, y, z) \mid y^2 = 4x\}$; (b) $R_2 = \{(x, y, z) \mid z = \sin x\}$.

Solución. (a) Construimos primero una parte de la parábola C , que es la gráfica de $\{(x, y) \mid y^2 = 4x\}$; después dibujamos un conjunto de segmentos de recta de longitud dada, digamos 8, partiendo de C en la dirección positiva del eje z . Los extremos de estos segmentos, los cuales están en el plano con ecuación $z = 8$,

determinan la sección normal C' . La parte del cilindro parabólico construido se muestra en la Fig. 9.15.

(b) Intercambiamos por conveniencia en este caso, la posición usual de los ejes y y z , colocamos el plano XZ horizontal. Construimos una parte de la gráfica $\{(x, z) \mid z = \sin x\}$; después procedemos como en (a). La parte del cilindro construido se muestra en la Fig. 9.16.

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 8 identifique y construya la gráfica de la relación dada.

1. $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 9 \text{ y } z = 0\}$.
2. $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 9 \text{ y } z = 4\}$.
3. $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 9\}$.
4. $\{(x, y, z) \mid xy = 4 \text{ y } z = 0\}$.
5. $\{(x, y, z) \mid xy = 4 \text{ y } z = 5\}$.
6. $\{(x, y, z) \mid xy = 4\}$.
7. $\{(x, y, z) \mid y = e^x \text{ y } z = 6\}$.
8. $\{(x, y, z) \mid y = e^x\}$.

En cada uno de los ejercicios del 9 al 16 identifique y construya la gráfica de la ecuación dada en el espacio — 3.

9. $x^2 + y^2 = 9$.
10. $y^2 + z^2 = 16$.
11. $x^2 + y^2 - 4y = 0$.
12. $9x^2 + 4y^2 = 36$.
13. $y = \cos x, x \in [-\pi; \pi]$.
14. $y = \tan x, x \in (-\pi/2; \pi/2)$.
15. $x^2 - 4z = 0$.
16. $y^2 + z = 2$.

17. Encuentre una ecuación del conjunto de puntos con la propiedad de que el cuadrado de la distancia de cada punto al eje z sea igual al doble de su distancia al plano yz . Construya su gráfica.

18. Encuentre una ecuación del conjunto de puntos, tal que cada punto es equidistante del punto $(0, 0, 5)$ y el eje x . Construya su gráfica.

9.7 Superficie de Revolución. Supongamos que una curva C y una línea recta L están en un plano M . La superficie generada al girar C alrededor de la recta L es una **superficie de revolución**. La línea L se llama **eje de rotación** y la curva C se llama **curva generatriz**.

La curva formada cuando una superficie y un plano se cortan se llama **sección plana** de la superficie. Si una sección plana está en un plano perpendicular a L , decimos que la sección plana es perpendicular a L . Es obvio que para una superficie de revolución cualquier sección plana perpendicular al eje de rotación es un círculo. Inversamente, si para una superficie dada S existe una línea que tiene la propiedad de que toda sección plana de S perpendicular a L es un círculo, un punto o el conjunto nulo, entonces S es una superficie de revolución.

Es fácil determinar cuándo una superficie que es la gráfica de una ecuación dada es una superficie de revolución cuyo eje de rotación es uno de los ejes de coordenadas. Si la superficie S es la gráfica de la relación

$$\{(x, y, z) \mid E(x, y, z) = 0\},$$

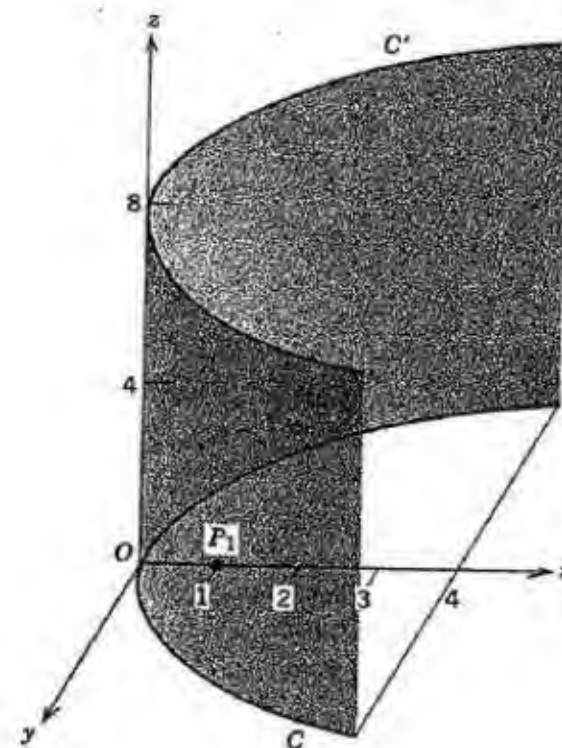


Fig. 9.15

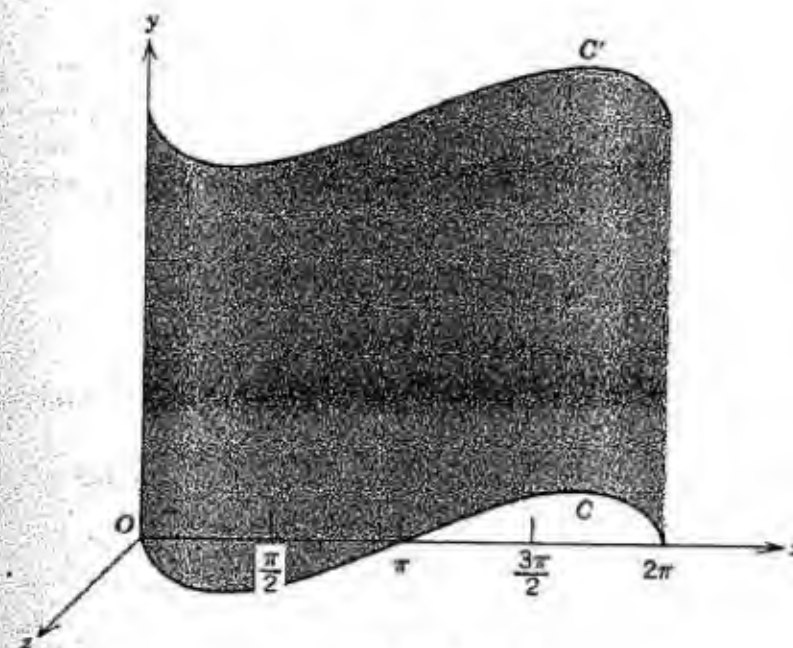


Fig. 9.16

donde $E(x, y, z) = 0$ es una ecuación que contiene solamente a $x, y, y z$ como variables, entonces la intersección de S con un plano perpendicular al eje X es la gráfica de la relación

$$R = \{(x, y, z) \mid E(x, y, z) = 0\} \cap \{(x, y, z) \mid x = k\},$$

donde k es un número real. Podemos escribir ahora

$$R = \{(x, y, z) \mid E(x, y, z) = 0 \text{ y } x = k\},$$

ó

$$R = \{(x, y, z) \mid E(k, y, z) = 0 \text{ y } x = k\}.$$

Cuando la relación se da en la última forma, es fácil determinar cuándo, para cada valor de k , la sección plana es un círculo, un punto o el conjunto nulo; si la sección plana es un círculo, un punto o el conjunto nulo, entonces $E(k, y, z) = 0$ debe ser equivalente a

$$y^2 + z^2 + ay + bz + c = 0.$$

Para secciones planas perpendiculares al eje z o al eje y el análisis es semejante.

Ejemplo 1. Demuestre que la gráfica de:

$$R_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 6x = 0\}$$

es una superficie de revolución con el eje x como el eje de rotación.

Solución. Un plano perpendicular al eje x es la gráfica de una ecuación de la forma $x = k$, donde k es un número real. La sección plana de la superficie dada con la gráfica de $x = k$ es la gráfica de:

$$\begin{aligned} R_2 &= \{(x, y, z) \mid x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 6x = 0 \text{ y } x = k\} \\ &= \{(x, y, z) \mid 4y^2 + 4z^2 = 6k - k^2 \text{ y } x = k\}. \end{aligned}$$

Ya que $4y^2 + 4z^2 = 6k - k^2$ es equivalente a $y^2 + z^2 = \frac{1}{4}(6k - k^2)$, una sección plana perpendicular al eje x es un círculo (en el plano con ecuación $x = k$), si $6k - k^2 > 0$; es un punto si $6k - k^2 = 0$, y es el conjunto nulo si $6k - k^2 < 0$. Por tanto, la gráfica de R_1 es una superficie de revolución, R_1 se muestra en la Fig. 9.17.

Ejemplo 2. Demuestre que la gráfica de

$$R_3 = \{(x, y, z) \mid x^2 - 9y^2 + z^2 = 36\}$$

es una superficie de revolución con el eje y como eje de rotación. Determine una curva generatriz de la superficie.

Solución. Una sección plana de la superficie dada con el plano con ecuación $y = k$ es la gráfica de

$$\begin{aligned} R_4 &= \{(x, y, z) \mid x^2 - 9y^2 + z^2 = 36 \text{ y } y = k\} \\ &= \{(x, y, z) \mid x^2 + z^2 = 36 + 9k^2 \text{ y } y = k\}. \end{aligned}$$

Para cada número real k la gráfica de R_4 es un círculo en el plano con ecuación $y = k$; entonces la gráfica es una superficie de revolución cuyo eje es el eje Y .

Para determinar una curva generatriz de la superficie consideremos una sección plana formada por la intersección de la superficie con un plano que contiene el eje de rotación. Tal plano es

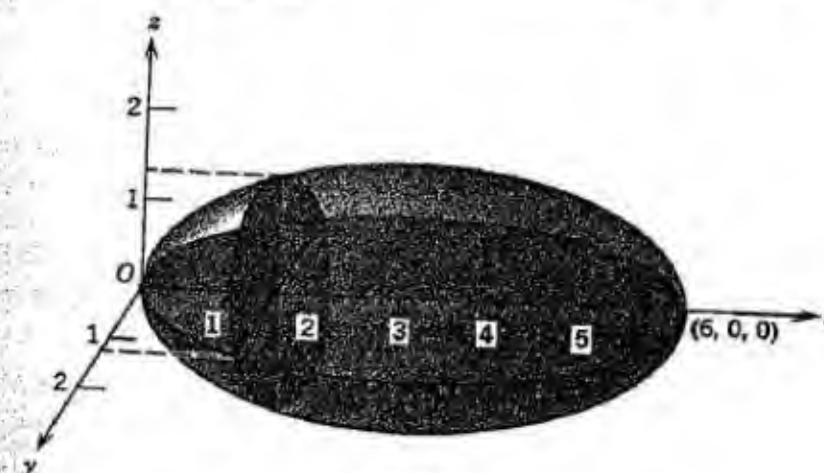


Fig. 9.17

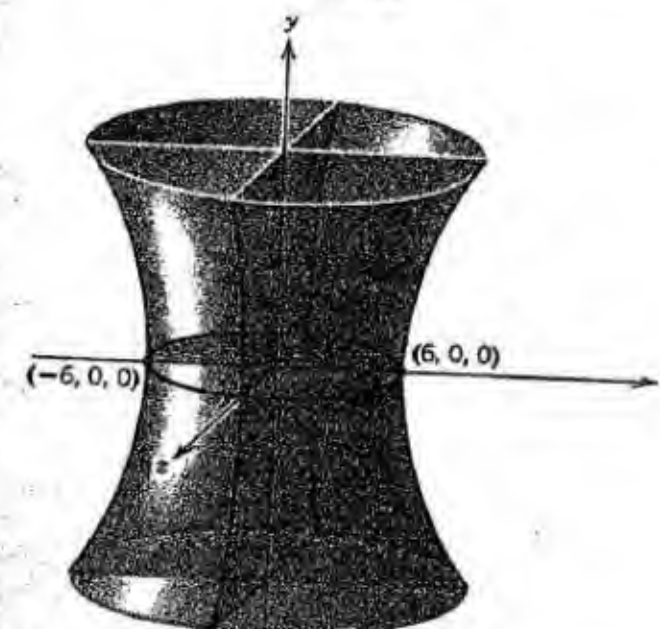


Fig. 9.18

el plano xy , y la intersección de la superficie dada y el plano xy es la gráfica de:

$$\begin{aligned} &\{(x, y, z) \mid x^2 - 9y^2 + z^2 = 36 \text{ y } z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \mid x^2 - 9y^2 = 36 \text{ y } z = 0\}. \end{aligned}$$

Es obvio que la gráfica de esta relación es una hipérbola en el plano xy cuyo eje es el eje x y cuyos vértices son $(6, 0, 0)$ y $(-6, 0, 0)$.

La gráfica de R_3 se muestra en la Fig. 9.18 (Aquí la posición usual de los ejes z y y está intercambiada).

Otra curva generatriz es la gráfica de

$$\{(x, y, z) \mid x^2 - 9y^2 + z^2 = 36 \text{ y } z = 2x\} \\ = \{(x, y, z) \mid 5x^2 - 9y^2 = 36 \text{ y } z = 2x\}.$$

Esta curva es una hipérbola en el plano $z = 2x$.

Es evidente que una superficie que es la gráfica de una ecuación de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + H = 0$$

es una superficie de revolución si y sólo si dos de los coeficientes A , B y C son iguales. Por ejemplo, si $A = B$, una sección plana perpendicular al eje z es la gráfica de

$$\{(x, y, z) \mid Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + Ck^2 + Fk + H = 0 \text{ y } z = k\},$$

y esta gráfica es un círculo, un punto o el conjunto vacío; la superficie es una superficie de revolución con el eje z como eje de rotación. En forma semejante, si $A = C$, la superficie es una superficie de revolución con el eje y como eje de rotación; si $B = C$ la superficie es una superficie de revolución con el eje x como eje de rotación.

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios siguientes la ecuación dada es una superficie de revolución. Identifique el eje de rotación y la curva generatriz. Grafique la superficie.

1. $z = x^2 + y^2$.

3. $9x^2 + 16(y^2 + z^2) = 144$.

5. $y^2 + z^2 = 4x$.

7. $z^2 = x^2 + y^2$.

9. $9x^2 - 16y^2 - 16z^2 = 144$.

2. $z^2 = x^2 + y^2$.

4. $y^2 + z^2 = \sec^2 x$.

6. $x^2 - 4y^2 + z^2 = 0$.

8. $x^2 + y^2 + 6z = 6$.

10. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

9.8 Superficies Cuadráticas. Una **superficie cuadrática** es una superficie con una ecuación (polinomial) de segundo grado. Cualquier sección plana de una superficie cuadrática es una sección cónica o dos líneas paralelas.

Al graficar una superficie es de suma utilidad encontrar las intersecciones (Ver Sec. 9.4) y determinar la naturaleza de varias secciones planas de la superficie, especialmente secciones planas perpendiculares a los ejes coordenados (incluyendo las intersecciones de la superficie y los planos coordenados).

Como se vio en la sección 9.7, dada una superficie con ecuación $E(x, y, z) = 0$, una sección plana perpendicular a uno de los ejes de coordenadas es la gráfica de una de las relaciones

$$R_1 = \{(x, y, z) \mid E(k, y, z) = 0 \text{ y } x = k\},$$

$$R_2 = \{(x, y, z) \mid E(x, k, z) = 0 \text{ y } y = k\},$$

$$R_3 = \{(x, y, z) \mid E(x, y, k) = 0 \text{ y } z = k\}.$$

Decimos que la gráfica de R_1 es la gráfica del sistema

$$E(k, y, z) = 0, \quad x = k, \quad (41)$$

y que las gráficas de R_2 y R_3 son, respectivamente, las gráficas de los sistemas

$$E(x, k, z) = 0, \quad y = k, \quad (42)$$

$$E(x, y, k) = 0, \quad z = k. \quad (43)$$

Por tanto, una sección plana perpendicular a un eje de coordenadas es la gráfica de un sistema de la forma (41), (42) o (43).

Para ejemplo, la intersección de la esfera con ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ y el plano con ecuación $z = 3$ es la gráfica de la relación $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + 9 = 25 \text{ y } z = 3\}$, y por tanto la gráfica del sistema es

$$x^2 + y^2 + 9 = 25, \quad z = 3,$$

$$x^2 + y^2 = 16, \quad z = 3.$$

Esta sección plana de la esfera es el círculo que está en el plano $z = 3$ con centro $(0, 0, 3)$ y radio 4.

La intersección de una superficie con un plano coordenado se llama la **traza** de la superficie en dicho plano; por ejemplo, la traza con el plano xy del cilindro parabólico que es la gráfica de $\{(x, y, z) \mid y = 4x^2\}$ es la curva que es la gráfica del sistema

$$y^2 = 4x, \quad z = 0.$$

Esta traza es la parábola C con vértice $O(0, 0, 0)$ y con foco en $P_1(1, 0, 0)$ mostrada en la Fig. 9.15.

Ejemplo. Encuentre las trazas y las intersecciones de la gráfica G de la ecuación

$$x^2 + y^2 - 4z^2 - 2x = 0.$$

Solución. Aquí la traza en el plano xy es la gráfica del sistema

$$x^2 + y^2 - 2x = 0, \quad z = 0;$$

la traza en el plano yz es la gráfica del sistema

$$y^2 - 4z^2 = 0, \quad x = 0;$$

y la traza en el plano xz es la gráfica del sistema

$$x^2 - 4z^2 - 2x = 0, \quad y = 0.$$

Estas trazas son un círculo, dos rectas y una hipérbola respectivamente y cada una de ellas es una sección cónica.

Las intersecciones x de G son 0 y 2; la intersección y es 0 y la intersección z es 0.

La gráfica de G se muestra en la Fig. 9.19. En relación con esta gráfica, se nota que una sección plana perpendicular al eje z es un círculo, o sea la gráfica del sistema

$$(x - 1)^2 + y^2 = 4k^2 + 1, \quad z = k.$$

Una esfera es una superficie cuadrática, ya que es la gráfica de una ecuación de segundo grado

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r^2.$$

Un cilindro es una superficie cuadrática si su directriz es una sección cónica. Por ejemplo, los cilindros que son gráficas de

$$\{(x, y, z) \mid (z - 2)^2 + y^2 = 4\} \quad \text{y} \quad \{(x, y, z) \mid y^2 = 4x\},$$

respectivamente, son superficies cuadráticas. Estas superficies cuadráticas se muestran en las Figs. 9.14 y 9.15. Sin embargo, la gráfica de $\{(x, y, z) \mid z = \sin x\}$ mostrada en la Fig. 9.16 no es una superficie cuadrática.

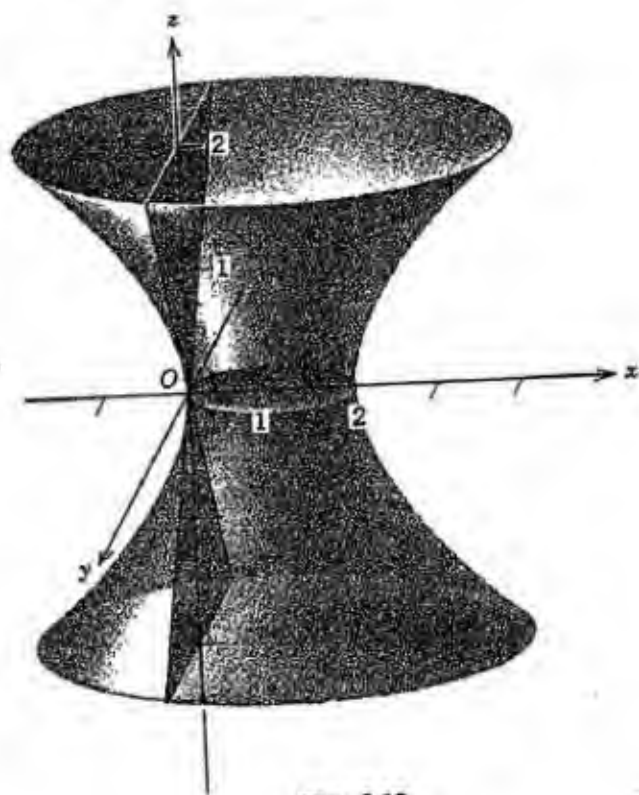


Fig. 9.19

La gráfica de

$$\{(x, y, z) \mid (x - 4)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 0\} \quad (44)$$

es el punto $(4, -1, 3)$. La gráfica de

$$\{(x, y, z) \mid (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 0\} \quad (45)$$

es la línea que pasa por $(4, 3, 0)$ y es perpendicular al plano xy . La gráfica de

$$\{(x, y, z) \mid (x - 5)^2 = 16\} \quad (46)$$

consiste en dos planos paralelos, las gráficas de $\{(x, y, z) \mid x - 5 = 4\}$ y $\{(x, y, z) \mid x - 5 = -4\}$. La gráfica de

$$\{(x, y, z) \mid \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 0\} \quad (47)$$

consiste en dos planos que se cortan, las gráficas de $\{(x, y, z) \mid (x/3) - (y/4) = 0\}$ y $\{(x, y, z) \mid (x/3) + (y/4) = 0\}$, que se cortan en el eje z y son perpendiculares al plano xy . La gráfica de

$$\{(x, y, z) \mid (x + 2)^2 = 0\} \quad (48)$$

consiste en un solo punto que es la gráfica de $\{(x, y, z) \mid x + 2 = 0\}$. Las superficies cuadráticas que son las gráficas de las relaciones (44), (45), (46), (47), y (48) son ejemplos de superficies cuadráticas degeneradas.

Antes de proceder a la discusión de otras superficies cuadráticas, recordemos que dos puntos P_1 y P_2 son simétricos con respecto a un plano, si y sólo si el plano bisecta el segmento P_1P_2 y es perpendicular a P_1P_2 . Un conjunto de puntos G es simétrico con respecto a un plano si y sólo si para cada punto $P_1 \in G$ existe un punto $P_2 \in G$ tal que P_1 y P_2 son simétricos con respecto al plano. De esta definición se deduce que una superficie cuadrática S es simétrica con respecto al plano yz , si y sólo si $P_1(x_1, y_1, z_1) \in S$ implica que $P_2(-x_1, y_1, z_1) \in S$.

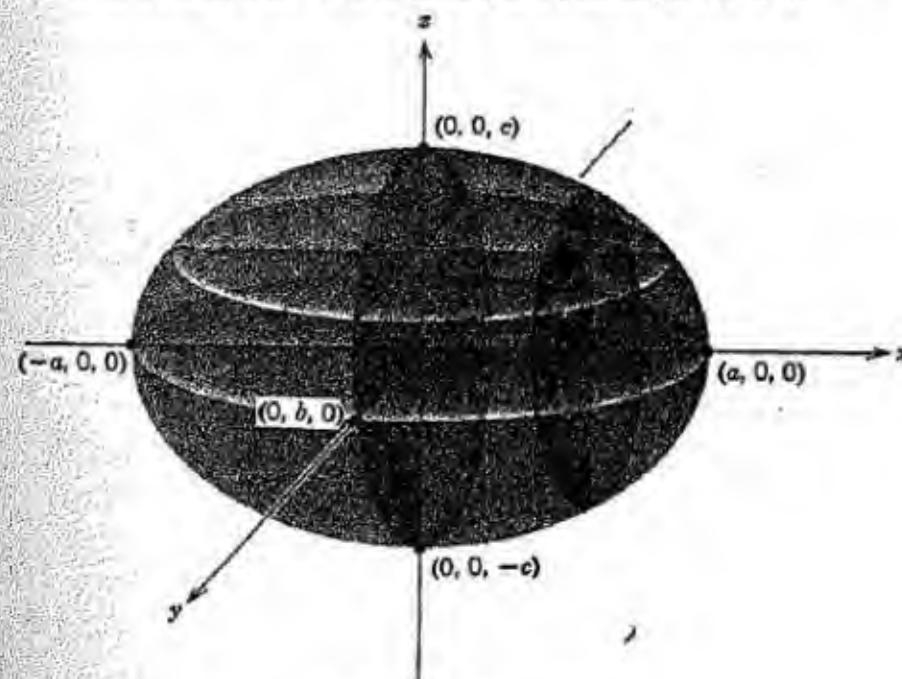


Fig. 9.20 Elipsoide

Esto es cierto si y sólo si x aparece elevada solamente a exponentes pares en la ecuación de una superficie; por tanto, una superficie cuadrática es simétrica con respecto al plano yz , si y sólo si x aparece elevada a potencias pares únicamente

en la ecuación de la superficie. Proposiciones similares se verifican para simetría con respecto al plano xy y al plano xz .

Además de la esfera, cilindros cuadráticos y superficies cuadráticas degeneradas, ya estudiadas, hay 6 superficies cuadráticas estándar. Daremos sus ecuaciones y gráficas y un análisis detallado del elipsoide. El análisis del elipsoide puede servir para que el estudiante analice los otros cinco tipos. En esta sección las letras a , b y c representarán números reales positivos.

(i) El elipsoide con ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (49)$$

se muestra en la figura 9.20.

Las intersecciones con x son a y $-a$; las intersecciones con y son b y $-b$ y las intersecciones con z son c y $-c$.

El elipsoide es simétrico con respecto a cada uno de los planos coordenados.

La traza del elipsoide en el plano xy es la gráfica del sistema

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0.$$

La traza es por tanto una elipse. La traza del elipsoide en cada uno de los otros planos coordenados es también una elipse.

Una sección plana perpendicular al eje x es la gráfica del sistema

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2}, \quad x = k. \quad (50)$$

La gráfica de (50) es una elipse si $k^2 < a^2$, un punto si $k^2 = a^2$ y el conjunto nulo si $k^2 > a^2$. Una sección plana perpendicular al eje y es la gráfica del sistema.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2}, \quad y = k. \quad (51)$$

La gráfica de (51) es una elipse si $k^2 < b^2$, un punto si $k^2 = b^2$ y el conjunto nulo si $k^2 > b^2$. Una sección plana perpendicular al eje z es la gráfica del sistema

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}, \quad z = k. \quad (52)$$

La gráfica de (52) es una elipse si $k^2 < c^2$, un punto si $k^2 = c^2$ y el conjunto nulo si $k^2 > c^2$.

Un elipsoide con ecuación (49) para el cual dos de los números a^2 , b^2 y c^2 son iguales, es un *elipsoide de revolución*, ya que en este caso una sección plana perpendicular a uno de los ejes de coordenadas será un círculo, un punto o el conjunto nulo.



Fig. 9.21 Paraboloide elíptico.

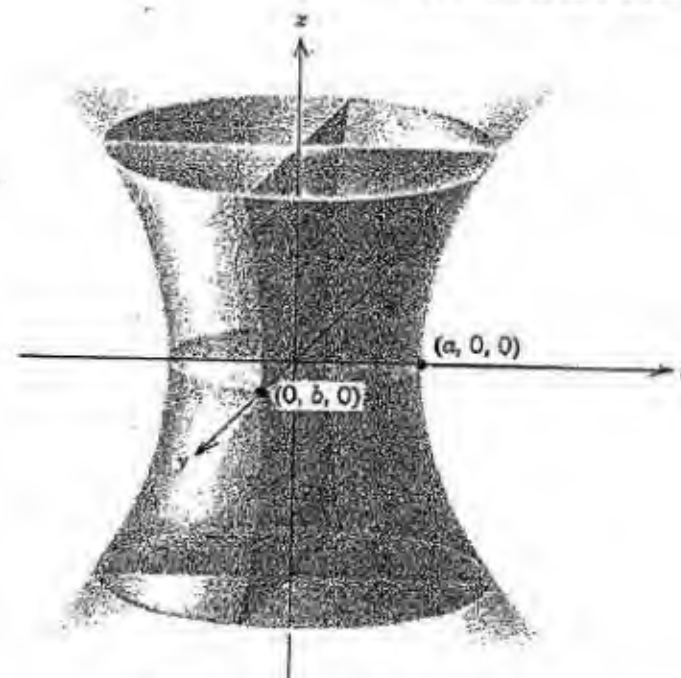


Fig. 9.22 Hiperboloide de una hoja

Una esfera es un caso especial del elipsoide cuando $a^2 = b^2 = c^2$.

(ii) El paraboloide elíptico cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz \quad (53)$$

Se muestra en la Fig. 9.21.

(iii) El hiperboloide de una hoja con ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (54)$$

Se muestra en la Fig. 9.22.

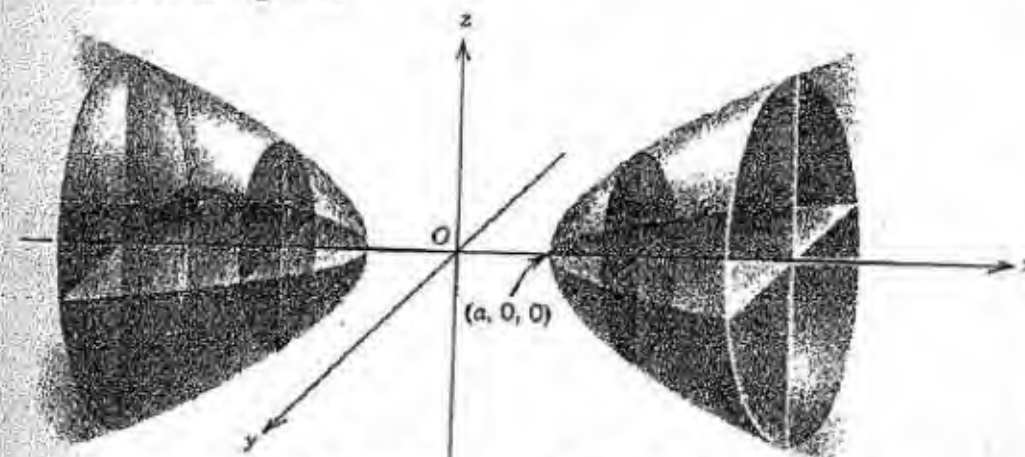


Fig. 9.23 Hiperboloide de dos hojas

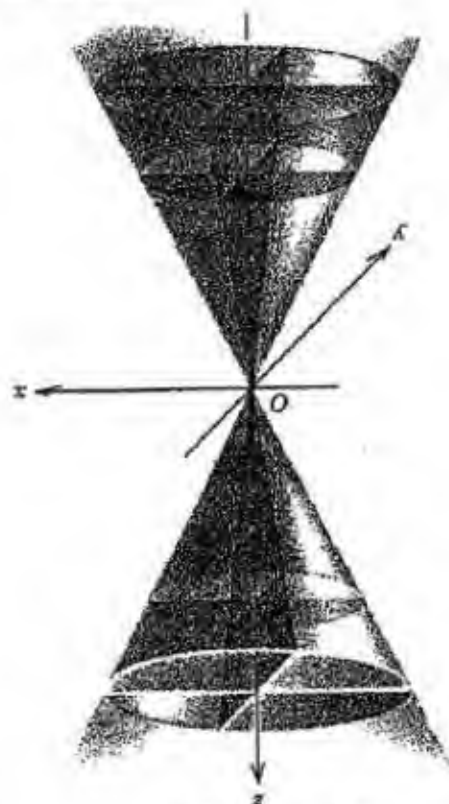


Fig. 9.24 Cono

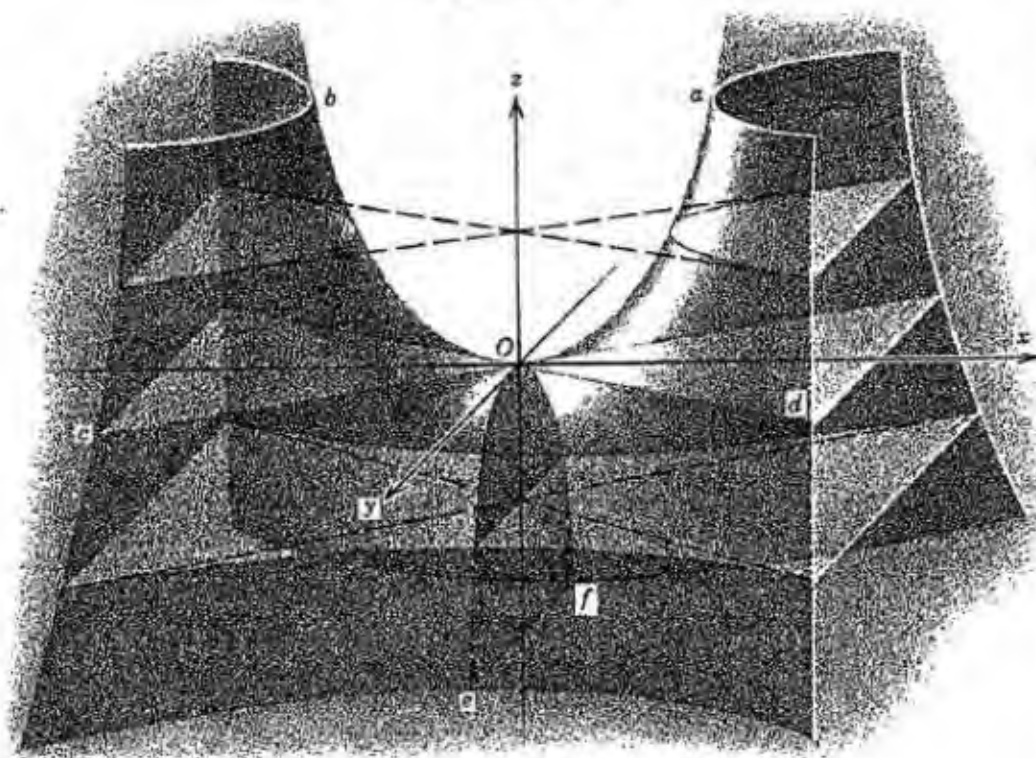


Fig. 9.25 Paraboloide hiperbólico

(iv) El hiperboloide de dos hojas con ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (55)$$

Se muestra en la Fig. 9.23.

(v) El cono con ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (56)$$

Se muestra en la Fig. 9.24.

(vi) El paraboloide hiperbólico con ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz \quad (57)$$

Se muestra en la Fig. 9.25.

Se debe notar que intercambiando los símbolos x , y y z en cualesquiera de las ecuaciones (49), (53), (54), (55), (56) y (57) no cambia el tipo de la superficie; tal intercambio solamente cambia las designaciones de los ejes coordenados. Por ejemplo, intercambiando y y z en la ecuación (54) obtenemos la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (58)$$

e intercambiando x y z en (54) resulta

$$-\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1. \quad (59)$$

La gráfica de cada una de las ecuaciones (58) y (59) es un hiperboloide de una hoja.

EJERCICIOS

En cada uno de los siguientes ejercicios identifique la superficie dada. Construya la gráfica de la ecuación; empiece la construcción graficando las trazas de la superficie en cada uno de los planos coordenados.

- | | |
|---------------------------------|----------------------------------|
| 1. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$. | 2. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$. |
| 3. $16x^2 + 9y^2 - z^2 = 144$. | 4. $16x^2 - 9y^2 - z^2 = 144$. |
| 5. $x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$. | 6. $x^2 - y^2 + 9z^2 = 0$. |
| 7. $-x^2 + 4y^2 + z^2 = 0$. | 8. $(x^2/9) + (y^2/4) = z$. |
| 9. $(x^2/9) - (y^2/4) = z$. | 10. $(x^2/9) - (y^2/4) = 0$. |
| 11. $y = x^2 + z^2$. | 12. $x^2 + y^2 - 6x = 0$. |
| 13. $x^2 + y^2 = 4$. | 14. $x^2 + y^2 = 0$. |
| 15. $x^2 + y^2 = 4x$. | 16. $x^2 + y^2 = 4x$. |
| 17. $x^2 + y^2 = z^2$. | 18. $x^2 + y^2 = z^2 - 2z + 1$. |

9.9 Curvas en el espacio-3. Básicamente, una curva en el espacio-3 es el conjunto de puntos de la intersección de dos superficies. Esto es, si C es una curva en el espacio-3, entonces C será la gráfica de una relación de la forma

$$\{(x, y, z) \mid E_1(x, y, z) = 0 \text{ y } E_2(x, y, z) = 0\},$$

o, convenimos en decir que C es la gráfica del sistema

$$E_1(x, y, z) = 0, \quad E_2(x, y, z) = 0. \quad (60)$$

El sistema (60) se llama **representación bisuperficial** de la curva.

Si todos los puntos de una curva C están en un plano M , entonces C es una *curva plana*; si no existe un plano M , con la propiedad de que todos los puntos de C estén en M , entonces C es una *curva alabeada*. En las secciones anteriores hemos hecho uso de las curvas planas al discutir las secciones planas de superficies.

Como ejemplo de una curva alabeada, consideremos la intersección de la esfera con ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ y el cilindro con ecuación $(x - \frac{5}{2})^2 + y^2 = 25$.

Esta intersección es la curva que es la gráfica de la relación

$$\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 25 \text{ y } (x - \frac{5}{2})^2 + y^2 = 25\},$$

o la gráfica del sistema

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad (x - \frac{5}{2})^2 + y^2 = 25.$$

Así como la recta en el espacio-3 tiene una representación paramétrica, otras curvas también la pueden tener. Si para una curva C hay tres funciones F_1, F_2 y

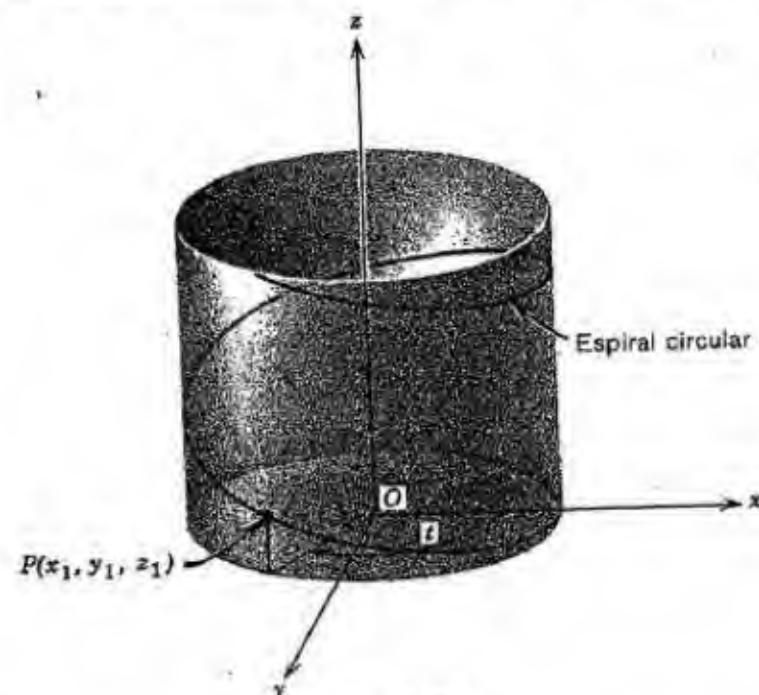


Fig. 9.26

F_3 con la propiedad de que para cada punto $P(x, y, z) \in C$ existe un número real t para el cual

$$x = F_1(t), \quad y = F_2(t), \quad z = F_3(t), \quad (61)$$

y si para cada número real t de un conjunto S el punto $P(x, y, z)$ cuyas coorde-

nadas se determinan por (61) pertenece a C , entonces las ecuaciones (61) se llaman **representación paramétrica** de C . En (61) el símbolo t es un parámetro; para cada valor de $t \in S$ corresponde un punto en C e inversamente, a cada punto de C corresponde al menos un valor de $t \in S$.

Las ecuaciones

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = kt$$

es una representación paramétrica de una curva llamada *hélice circular*. Si $P(x_1, y_1, z_1)$ es un punto de esta curva (correspondiente al valor t_1 del parámetro), notamos que:

$$(x_1, y_1, z_1) \in \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = a^2\}.$$

Entonces P está en el cilindro circular que es la gráfica de $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = a^2\}$ y P está a una distancia kt_1 del plano xy . La curva rodea al cilindro como la rosca de un tornillo; vea Fig. 9.26.

Supongamos que:

$$x = F_1(t), \quad y = F_2(t), \quad z = F_3(t) \quad (62)$$

es una representación paramétrica de una curva C en el espacio-3. Además supongamos que cada una de las funciones F_1, F_2 y F_3 es derivable en t_1 . Sea $P_1(x_1, y_1, z_1)$ el punto de C que corresponde al valor t_1 del parámetro y sea $Q(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y, z_1 + \Delta z)$ el punto de C que corresponde al valor $t_1 + \Delta t$

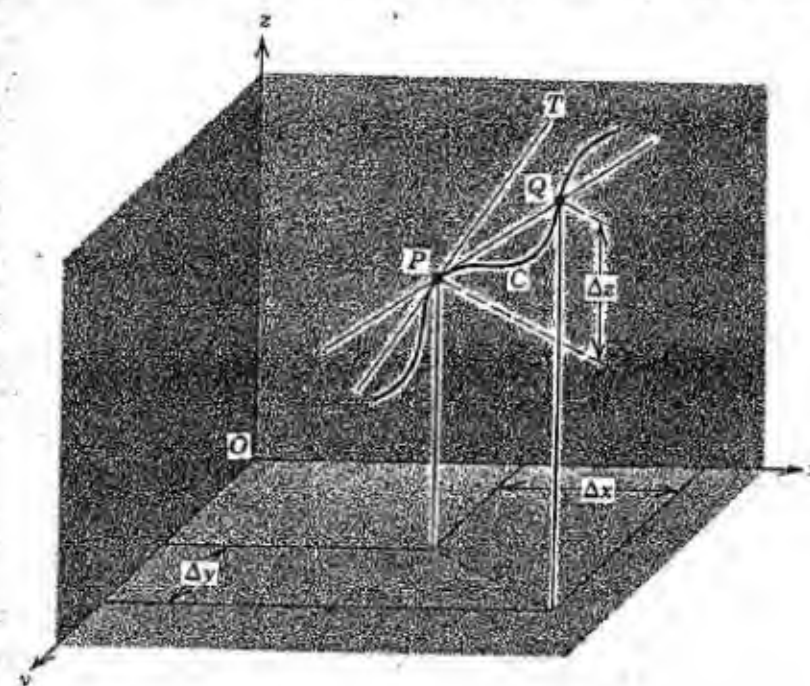


Fig. 9.27

del parámetro, $\Delta t \neq 0$. Entonces

$$\Delta x = F_1(t_1 + \Delta t) - F_1(t_1),$$

$$\Delta y = F_2(t_1 + \Delta t) - F_2(t_1),$$

$$\Delta z = F_3(t_1 + \Delta t) - F_3(t_1),$$

y los tres números $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ constituyen un conjunto de números directores de la recta que pasa por P y Q . El conjunto

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta z}{\Delta t},$$

también constituye un conjunto de números directores para la línea que pasa por P y Q ; vea Fig. 9.27.

La línea tangente PT a la curva C con representación paramétrica (62) es la recta que pasa por $P(x_1, y_1, z_1)$ con números directores

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = F_1'(t_1), \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = F_2'(t_1); \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = F_3'(t_1),$$

con tal que al menos una de estas derivadas sea diferente de cero; esto es siempre que $[F_1'(t_1)]^2 + [F_2'(t_1)]^2 + [F_3'(t_1)]^2 \neq 0$.

En la curva C con representación paramétrica (62) consideremos la parte C' de C para la cual $a \leq t \leq b$. Si para $t \in [a; b]$ cada una de las funciones F_1, F_2 y F_3 tiene derivada continua y $[F_1'(t)]^2 + [F_2'(t)]^2 + [F_3'(t)]^2 \neq 0$, y si a cada punto de C' corresponde solamente un valor del parámetro t , entonces la longitud L del arco C' está dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{[F_1'(t)]^2 + [F_2'(t)]^2 + [F_3'(t)]^2} dt. \quad (63)$$

Ejemplo. Para la hélice circular con ecuaciones

$$x = 4 \cos t, \quad y = 4 \sin t, \quad z = 5t,$$

encuentre (a) una representación paramétrica de la línea tangente en el punto para el cual $t = \pi/4$; (b) la longitud de la parte de la hélice entre los puntos que corresponden a $t = 0$ y $t = \pi/2$.

Solución. (a) Aquí $D_t x = -4 \sin t$, $D_t y = 4 \cos t$, $D_t z = 5$, y

$$F_1'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2}, \quad F_2'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}, \quad F_3'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5$$

son números directores de la tangente en el punto P para el cual $t = \pi/4$. Las coordenadas de P son $F_1(\pi/4) = 2\sqrt{2}$, $F_2(\pi/4) = 2\sqrt{2}$, $F_3(\pi/4) = 5\pi/4$. Entonces una representación paramétrica de la línea tangente a la hélice es

$$x = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}t, \quad y = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}t, \quad z = 5\pi/4 + 5t.$$

(b) Si usamos (63) tenemos

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{16 \sin^2 t + 16 \cos^2 t + 25} dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{41} dt,$$

$$L = \frac{\sqrt{41} \pi}{2}.$$

EJERCICIOS

1. Grafique la parte del primer octante de la curva con representación bisuperficial $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $(x - \frac{5}{2})^2 + y^2 = 25$.

2. Grafique la parte del primer octante de la curva con representación bisuperficial $x^2 + y^2 - 2y = 0$, $y^2 + z^2 - 4 = 0$.

3. La curva C tiene representación bisuperficial $x^2 + y^2 = 36$, $y - z = 0$.

(a) Construya la gráfica de C .

(b) Observe que

$$x = \sqrt{36 - t^2}, \quad y = t, \quad z = t, \quad 0 \leq t \leq 6$$

es una representación paramétrica de la parte C' de la curva C que está en el primer octante. Encuentre una representación paramétrica de la línea tangente a C en el punto para el cual $t = 3$.

4. (a) Encuentre las ecuaciones paramétricas de la línea tangente a la hélice circular con ecuaciones $x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta$, $z = k\theta$ en el punto donde $\theta = 2\pi$.

(b) Encuentre la longitud de esta hélice del punto para el cual $\theta = 0$ al punto donde $\theta = 2\pi$.

5. (a) Construya la parte C de la gráfica de la curva con ecuaciones $x = t$, $y = 2t$, $z = t^2$ del origen al punto $(1, 2, 1)$. *Sugerencia.* Note que la curva es la intersección del plano con ecuación $y = 2x$ y el cilindro con ecuación $z = x^2$.

(b) Encuentre la longitud de C .

(c) Calcule las ecuaciones paramétricas de la tangente C en el punto donde $t = \frac{1}{2}$.

6. (a) Construya la parte C de la gráfica de la curva con ecuaciones paramétricas $x = t$, $y = t$, $z = \frac{2}{3}t^{3/2}$ del origen al punto $(1, 1, \frac{2}{3})$.

(b) Calcule la longitud de C .

(c) Encuentre las ecuaciones paramétricas de la línea tangente a C en el punto $(1, 1, \frac{2}{3})$.

7. Demuestre que la longitud L de la hélice del ejercicio 4 entre los puntos para los cuales $\theta = 0$ y $\theta = \alpha$ está dada por $L = \sqrt{a^2 + k^2} \alpha$.

8. Demuestre que la tangente a la hélice del ejercicio 4 hace un ángulo constante β con el plano xy , donde $\sin \beta = \frac{k}{\sqrt{a^2 + k^2}}$.

EJERCICIOS ADICIONALES AL CAPITULO 9

1. Demuestre que los puntos $(6, -1, 8)$, $(-2, 7, 0)$, $(-2, -1, 0)$ y $(6, 7, 8)$ están sobre una esfera cuyo centro es $(2, 3, 4)$. ¿Cuál es el radio de la esfera? Dé una ecuación de la esfera.

2. Demuestre que el punto $(-4, -3, 1)$ está sobre el plano bisector perpendicular de la línea que pasa por los puntos $(5, -2, 6)$, y $(-3, 2, 10)$.

3. Encuentre una ecuación del conjunto de puntos G , con la propiedad que para cada punto $P \in G$ la distancia entre P y $(4, 2, 0)$ es igual a la distancia entre P y $(6, 3, 0)$. ¿qué clase de superficies G ? construya su gráfica.

4. Verifique que los puntos $(0, 0, 0)$, $(0, a, a)$, $(a, 0, a)$ y $(a, a, 0)$ son los vértices de un tetraedro regular.

5. Demuestre que los puntos $(7, 0, 5)$, $(3, 2\sqrt{10}, 3)$, $(5, 2\sqrt{6}, 2)$ y $(6, \sqrt{13}, 0)$ están en un cilindro circular cuyo eje es el eje z . Construya la gráfica de este cilindro y sobre ella indique los puntos dados.

6. El punto de intersección del plano xy y el segmento determinado por los puntos $P_1(2, 3, 1)$ y $P_2(1, 5, -2)$ es P_3 . ¿En qué razón divide P_3 a P_1P_2 ? ¿Cuáles son las coordenadas de P_3 ?

7. Dé una ecuación de un cilindro circular

(a) de radio 4 y el eje z como eje.

(b) de radio 3 y el eje y como eje.

(c) de radio 5 y el eje x como eje.

8. Encuentre una ecuación del conjunto de puntos G , con la propiedad que para punto $P \in G$, la suma de las distancias de P a $(5, 0, 0)$ y de P a $(-5, 0, 0)$ es 20. ¿Qué clase de superficie es G ? Construya su gráfica.

9. Sean α , β y γ los ángulos directores de la recta L . ¿Cuál es el valor de $\cos \gamma$ si L está en el plano xy ? ¿Cuál el de $\cos \beta$ si L está en el plano xz ? ¿Cuál el de $\cos \alpha$ si L está en el plano yz ?

10. ¿Tiene gráfica el sistema $x - y + 2z = 1$, $3x - 3y + 6z = 7$? Dé razones.

11. Si la línea recta L_1 tiene números directores 3, -4, 12 y la recta L_2 2, -2, 1, encuentre el coseno del ángulo entre L_1 y L_2 .

12. Encuentre una ecuación del plano que pasa por el origen, si $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 45^\circ$ y $\gamma = 60^\circ$ son los ángulos directores de su normal.

13. En cada uno de los siguientes casos determine si los planos cuyas ecuaciones se dan son paralelos o perpendiculares. Si los planos no son paralelos ni perpendiculares determine el ángulo que forman entre ellos.

(a) $x + 2y - 2z = 5$, $2x + y + 2z = 7$;

(b) $x - 3y + 2z = 7$, $2x - 6y + 4z = 13$;

(c) $2x + y + 2z = 9$, $x + 2y - 2z = 5$;

(d) $x + y + 2z = 11$, $2x - y + z = 7$.

14. Encuentre el centro y el radio de la esfera que pasa por los puntos $(1, -2, 0)$, $(0, -6, -1)$, $(1, -5, 3)$ y $(-2, -2, 3)$.

15. Demuestre que la recta L_1 con representación biplanar $2x - y + 3z + 3 = 0$, $x + 10y - 21 = 0$ y la recta L_2 con representación biplanar $2x - y = 0$, $7x + z - 6 = 0$ se cortan. Calcule las coordenadas del punto de intersección y una ecuación del plano que contiene a las rectas.

16. Si la recta L tiene representación paramétrica $x = 2 + t$, $y = 1 + 2t$, $z = -3 - t$, encuentre el punto M en el cual L corta perpendicularmente a la recta que pasa por $P(6, 6, -1)$. Calcule la distancia PM .

17. Si la línea L_1 tiene representación paramétrica $x = -7 + 3t$, $y = -2 + 2t$, $z = 1 + t$, y la línea recta L_2 tiene representación paramétrica $x = 4 + 2t$, $y = -2 + t$, $z = 3 - t$, encuentre una representación paramétrica de la recta L la cual es perpendicular a L_1 y L_2 y las corta.

18. Identifique la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones. Si la gráfica es una esfera de centro y radio,

(a) $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y - 8z - 14 = 0$,

(b) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 6x + 8y - 8z - 1 = 0$,

(c) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 8 = 0$,

(d) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z + 14 = 0$.

19. ¿Para que valores de k es $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + k = 0$ una ecuación de una esfera, un punto o el conjunto vacío?

20. Encuentre una ecuación del plano que pasa por el punto $P(1, 1, 1)$ y contiene la recta L con representación biplanar $x + 2y - z + 1 = 0$, $3x - y + 4z + 3 = 0$.

21. Demuestre que los planos con ecuaciones $5x - 3y + 4z = 1$, $8x + 3y + 5z = 4$, $18x - 3y + 13z = 6$, tienen una línea recta en común.

22. Encuentre una ecuación del plano que pasa por los puntos $(-1, 1, 1)$ y $(1, -1, 1)$, y es perpendicular al plano con ecuación $x + 2y + 2z = 5$.

23. Encuentre una ecuación del conjunto de puntos G , con la propiedad de que para cada punto $P \in G$ la suma de los cuadrados de las distancias de P a los puntos $(1, 1, -2)$, $(0, 1, -1)$, y $(2, -3, 4)$ es 100. Si G es una esfera, determine su centro y radio.

24. Encuentre la longitud de la curva con representación paramétrica $x = t$, $y = t^2/\sqrt{2}$, $z = \frac{1}{2}t^3$ del punto donde $t = 0$ al punto donde $t = 3$.

25. Calcule la longitud de la curva con representación paramétrica $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ del punto donde $t = 0$, al punto donde $t = 1$.

En cada uno de los ejercicios del 26 al 30 grafique la relación dada.

26. $R = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 25 \text{ y } z = x\}$.

27. $R = \{(x, y, z) \mid y^2 = 4x \text{ y } z = 4x\}$.

28. $R = \{(x, y, z) \mid \left\{ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1 \text{ y } z = 3 \right\}\}$.

29. $R = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - 4y = 0 \text{ y } y = 2z\}$.

30. $R = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 25 \text{ y } x^2 = 9\}$.

Funciones en diferentes variables independientes. Derivación parcial

10.1 Funciones de dos o más variables independientes. En la Sec. 1.3 definimos una función F como un conjunto no vacío de pares ordenados tales que dos pares distintos no tienen igual la primera componente. El conjunto de primeras componentes de los pares ordenados es el dominio D de la función y el conjunto de las segundas componentes de los pares ordenados es el rango R de la función. Si $(x, y) \in F$, llamaremos y la correspondiente de x bajo F y representaremos este correspondiente por $F(x)$. Entonces escribimos:

$$F = \{(x, y) \mid y = F(x), x \in D, y \in R\}.$$

Ejemplo

$$G = \{(x, y) \mid y = \sqrt{1-x}\}$$

es una función con $D = (-\infty; 1]$ y $R = [0; +\infty)$ para la cual $G(x) = \sqrt{1-x}$. Así, para $a \in D$, $G(a) = \sqrt{1-a}$, y llamamos $G(a)$ al valor de $G(x)$ en a .

Una variable cuyo universo es el dominio de una función dada se llama variable independiente y una variable cuyo universo es el rango de una función dada se llama variable dependiente. Para la función G dada en el ejemplo x es la variable independiente, y es la variable dependiente. Para $H = \{(r, s) \mid s = e^{2r}\}$, r es la variable independiente y s es la variable dependiente.

Hasta este punto del cálculo hemos considerado funciones cuyo dominio y rango ambos son conjuntos de números reales. Llamamos a una función de este tipo función real de una variable real independiente o simplemente *función de una variable independiente*.

Ahora ya no nos restringiremos a funciones cuyo dominio son conjuntos de números reales. Consideraremos el dominio de una función como un conjunto de pares ordenados de números reales, triadas ordenadas de números reales o n -adas ordenadas de números reales. Si F es una función cuyo dominio es un conjunto de

parejas ordenadas de números reales y cuyo rango es un conjunto de números reales y si x y y son variables para las cuales $(x, y) \in \text{dominio de } F$, entonces x y y se llaman *variables independientes*. Una variable cuyo universo es el rango de F se llama *variable dependiente*. En forma similar definimos variables independientes para una función cuyo dominio es un conjunto de triadas ordenadas o un conjunto de n -adas ordenadas de números reales.

Una función cuyo dominio es un conjunto de pares ordenados de números reales y cuyo rango es un conjunto de números reales se llama función real de dos variables independientes reales o simplemente *función de dos variables independientes*. Una función cuyo dominio es un conjunto de triadas ordenadas de números reales y cuyo rango es un conjunto de números reales se llama función real de tres variables independientes reales o simplemente *una función de tres variables independientes*. En forma similar, si el dominio es un conjunto de n -adas ordenadas, la función se llama *una función de n variables independientes*.

Por ejemplo, el conjunto

$$\{(2, 1), (3, 1), (1, 2), (5)\}$$

es una función de dos variables independientes cuyo dominio es el conjunto $\{(2, 1), (3, 1), (1, 2)\}$ y cuyo rango es el conjunto $\{7, 6, 5\}$. El conjunto

$$\{(x, y, z) \mid z = 4x - y, (x, y) \in D\}$$

es una función de dos variables independientes cuyo dominio es D .

Si F es una función con dos variables independientes y si (x, y) pertenece al dominio de F , representaremos la correspondiente de (x, y) bajo F , con la notación anterior, por

$$F(x, y).$$

Por conveniencia reemplazamos ésta por

$$F(x, y).$$

Esto es

$$z = F(x, y) \iff (x, y, z) \in F.$$

Si F es una función con tres variables independientes, usamos el símbolo $F(x, y, z)$ para representar la correspondiente de (x, y, z) bajo F .

$$u = F(x, y, z) \iff (x, y, z, u) \in F.$$

Notaciones semejantes se usan con funciones con más de tres variables independientes.

Si $(a, b) \in \text{dominio de } F$, llamamos $F(a, b)$ el valor de $F(x, y)$ en (a, b) . Definiciones semejantes se usan con funciones de más de dos variables independientes. Por ejemplo, si

$$F(x, y) = 2xy - 4x^2 + y^2,$$

entonces

$$F(1, 3) = 6 - 4 + 9 = 11$$

es el valor de $F(x, y)$ en $(1, 3)$.

Por conveniencia usamos el símbolo

$$(x, y, z)$$

en lugar de

$$(x, y, z)$$

para representar un par ordenado, que pertenece a la función F , cuya primera componente es el par ordenado (x, y) . Si usamos esta notación representaremos una función F de dos variables independientes por

$$F = \{(x, y, z) \mid z = F(x, y), (x, y) \in D, z \in R\}. \quad (1)$$

Nótese que una función F de dos variables independientes se puede interpretar como un conjunto de triadas ordenadas (x, y, z) con la propiedad de que si (a, b, c_1) y (a, b, c_2) son elementos de F , entonces $c_1 = c_2$.

Si para la función (1) consideramos cada par ordenado del dominio D como las coordenadas de un punto en el plano xy , entonces la gráfica del dominio D de la función F es un conjunto de puntos en el plano xy . Por ejemplo, para

$$F = \{(x, y, z) \mid z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}\},$$

$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$, la gráfica de D es el conjunto de puntos sobre el círculo o interiores al mismo, con ecuación $x^2 + y^2 = 9$.

En un sistema coordenado de tres dimensiones la gráfica de una función F de dos variables independientes es el conjunto G de todos los puntos con la propiedad de que

$$P(a, b, c) \in G \iff (a, b, c) \in F.$$

Esto es, la gráfica de la función F es la gráfica de la ecuación $z = F(x, y)$. Si $F = \{(x, y, z) \mid z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}\}$, la gráfica de F es la semiesfera superior con centro en el origen y de radio 3 (si el eje z está dirigido hacia arriba).

Es evidente que la gráfica de una función de dos variables independientes puede ser cortada a lo máximo una vez por cualquier línea perpendicular al plano donde el dominio se ha graficado. Entonces el conjunto de triadas ordenadas

$$\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$$

no puede constituir una función de dos variables independientes porque su gráfica es una esfera y hay líneas perpendiculares al plano xy que cortan la gráfica en dos puntos.

Si F es una función con tres variables independientes, en lugar de escribir $(x, y, z, u) \in F$, es usual escribir simplemente $(x, y, z, u) \in F$. Haciendo uso de esta notación representaremos una función de tres variables independientes por:

$$F = \{(x, y, z, u) \mid u = F(x, y, z), (x, y, z) \in D, u \in R\}. \quad (2)$$

Si para la función (2) consideramos cada triada ordenada del dominio D como las coordenadas de un punto en un sistema de coordenadas de tres dimensiones, entonces la gráfica del dominio D de la función F es un conjunto de puntos en este sistema de coordenadas de tres dimensiones. Como ejemplo, para

$$F = \{(x, y, z, u) \mid u = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}\}$$

$D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$, y por lo tanto la gráfica de D es el conjunto de puntos sobre la esfera o interiores a la esfera con ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Si F es una función de n variables independientes, escribimos:

$$F = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, w) \mid w = F(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D, w \in R\}. \quad (3)$$

Ya que hay una correspondencia biunívoca entre los pares ordenados de números reales y puntos del espacio-2, identificaremos frecuentemente la gráfica de un conjunto de pares ordenados de números con el conjunto mismo. En consecuencia cuando hablemos del dominio de una función con dos variables independientes tendremos en mente un conjunto de pares ordenados de números reales o la gráfica de este conjunto; como ejemplo, para la función $F = \{(x, y; z) \mid z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}\}$ decimos que el dominio D es el conjunto de puntos que pertenecen al disco circular mostrado en la Fig. 10.1. Ya que hay una correspondencia

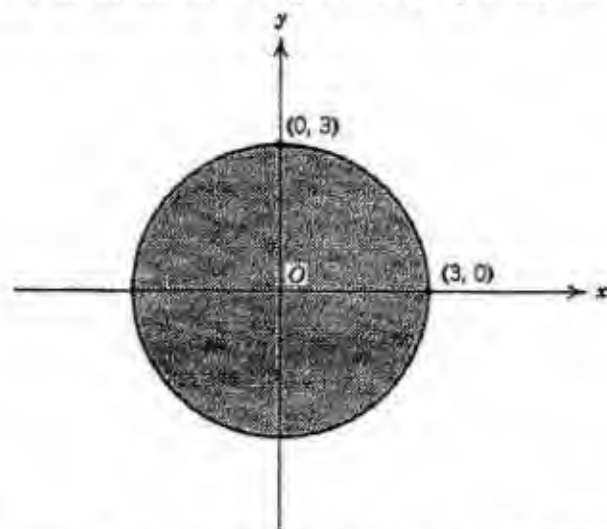


Fig. 10.1 El dominio de $F = \{(x, y; z) \mid z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}\}$

biunívoca entre las triadas ordenadas de números reales y los puntos en el espacio-3, identificaremos la gráfica del dominio de una función de tres variables independientes con el dominio en sí, y hablaremos del dominio como un conjunto de puntos.

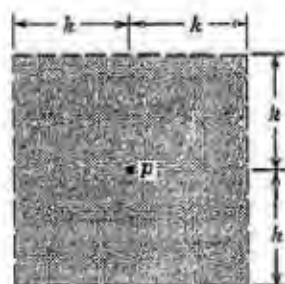


Fig. 10.2 Una vecindad k de p

Al trabajar con conjuntos de puntos en el espacio-2 es conveniente usar conceptos tales como vecindad o entorno, punto interior, punto frontera, conjunto abierto, conjunto conexo y región. Daremos las definiciones de estos conceptos.

Si p es un punto del espacio-2, llamaremos una **vecindad de p** al conjunto de puntos dentro de un cuadrado* con centro en p . Entonces, si las coordenadas de p

* Con frecuencia se usa un círculo con centro en p en lugar de un cuadrado. La selección de vecindades cuadradas o circulares no afecta a ninguna de las definiciones posteriores.

son (a, b) , el conjunto $\{(x, y) \mid |x - a| < k, |y - b| < k\}$, siendo k un positivo real, es una vecindad de p y llamaremos a esta vecindad una **vecindad k de p** . La figura 10.2 muestra una vecindad k de p donde las líneas punteadas indican que los puntos sobre estas líneas no pertenecen al conjunto.

Si S es un conjunto de puntos del espacio-2 y si $p \in S$, p se llama **punto interior** de S si existe una vecindad de p con la propiedad de que cada punto de la vecindad pertenece a S . En la Fig. 10.3 p es un punto interior de S y q no es un punto interior de S .

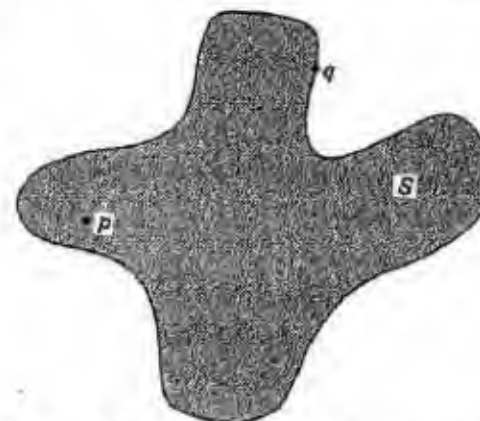


Fig. 10.3 Puntos interiores y frontera de S .

Si S es un conjunto de puntos del espacio-2, un punto q es un **punto frontera** de S si *toda* vecindad de q contiene puntos que pertenecen a S y puntos que no pertenecen a S . (Nótese que q no necesita pertenecer a S). En la Fig. 10.3 q es un punto frontera de S . Para el conjunto $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 4\}$, el punto $(2, 0)$ es un punto frontera del conjunto, aunque no pertenece al conjunto Fig. 10.4).

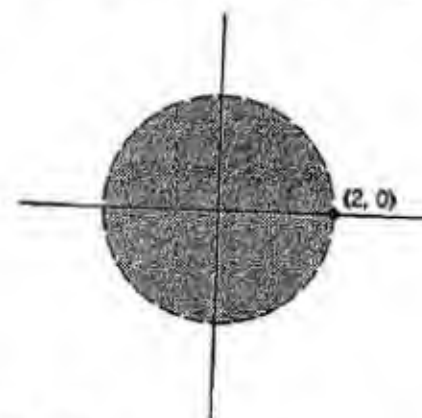


Fig. 10.4 El conjunto $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 4\}$

Si un punto p pertenece al conjunto S , entonces p es un punto interior o un punto frontera de S .

Un conjunto de puntos en el espacio-2 es un **conjunto abierto** si todo punto

de S es un punto interior de S . Por ejemplo, el conjunto en la Fig. 10.4 es abierto, ya que ninguno de sus puntos frontera pertenecen al conjunto.

Un conjunto S de puntos del espacio-2 es un **conjunto conexo** si cualquier par de puntos de S se pueden unir por una poligonal cuyos puntos en su totalidad pertenecen a S . Los conjuntos de las Figs. 10.3, 10.4 y 10.5 son conexos, pero el representado en la Fig. 10.6 no lo es.



Fig. 10.5 Un conjunto conexo

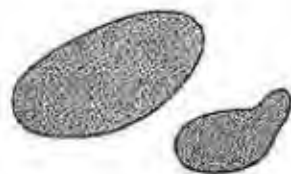


Fig. 10.6 Un conjunto no conexo

Usamos la palabra **región** para significar la unión de un conjunto abierto con ninguno, algunos o todos sus puntos frontera. Una **región abierta** es la que no contiene ninguno de sus puntos frontera, y una **región cerrada** es aquella que contiene todos sus puntos frontera. Los conjuntos mostrados en las Figs. 10.2, 10.3, 10.4, 10.5 y 10.7 son regiones. El conjunto mostrado en la Fig. 10.6 no es región. (¿Por qué?) Las regiones mostradas en las Figs. 10.2 y 10.4 son abiertas; las regiones de las Figs. 10.3 y 10.5 son cerradas; la región de la Fig. 10.7 no es ni abierta ni cerrada.



Fig. 10.7

Nótese que una vecindad k de un punto p es una región abierta; una **vecindad cerrada** de p es la unión de una vecindad de p y sus puntos frontera.

Algunos escritores usan la palabra "región" para designar un conjunto abierto conexo de puntos y se le advierte al lector tener cuidado de cuál significado interpretar al encontrar esta palabra.

Los conceptos vecindad, punto interior, punto frontera, conjunto abierto, conjunto conexo y región se pueden definir para el espacio-3 por extensiones obvias de nuestras definiciones para el espacio-2.

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 4 dé el dominio D y el rango R de función F para la cual la correspondiente de x se especifica y grafique la función

1. $F(x) = x^2 - 4x, -1 \leq x \leq 5$.
2. $F(x) = \sqrt{25 - x^2}$.
3. $F(x) = \frac{1}{4} \sqrt{25 - x^2}$.
4. $F(x) = \sqrt{2 - x}$.

En cada uno de los ejercicios del 5 al 8 describa el dominio D de la función F

para la cual se especifica la correspondiente de (x, y) o de (x, y, z) . Diga cuándo el dominio es una región, una región abierta o una región cerrada. (El espacio-2 se considera tanto abierto como cerrado).

$$5. F(x, y) = x^2 + y^2.$$

$$6. F(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

$$7. F(x, y) = \log_{10}(1 - x^2 - y^2).$$

$$8. F(x, y, z) = \frac{2x}{y - 3z}.$$

En los ejercicios del 9 al 13 establezca si el conjunto dado de triadas ordenadas se considera una función de las variables independientes x y y

$$9. \{(x, y, z) \mid 2x + 3y - 4z = 6\}.$$

$$10. \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 25\}.$$

$$11. \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z = 4\}.$$

$$12. \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}.$$

$$13. \{(x, y, z) \mid z^2 = 4x\}.$$

14. ¿Es el conjunto $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$ una región? Razone su respuesta. ¿Es el punto $(0, -2)$ un punto frontera, interior o ninguno de los dos?

15. ¿Es el conjunto $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 4 \text{ y } y \leq x\}$ una región? ¿Es un conjunto abierto? ¿Es un conjunto cerrado? Grafique el conjunto.

16. ¿Es el conjunto $\{(x, y) \mid |x - 2| > 4 \text{ y } |y| < 2\}$ una región? Dé las razones de su respuesta. Grafique el conjunto e indique sobre la gráfica un punto frontera y un punto interior al conjunto. ¿Es abierto el conjunto?

10.2 Derivadas Parciales. Consideremos la función

$$F = \{(x, y, z) \mid z = F(x, y), (x, y) \in D\}$$

y sea h un número distinto de cero para el cual $(x + h, y) \in D$. Si existe una función F_x de dos variables independientes para la cual

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x + h, y) - F(x, y)}{h} = F_x(x, y) \quad (4)$$

para algunos pares ordenados $(x, y) \in D$, entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x + h, y) - F(x, y)}{h}$$

se llama **derivada parcial de $F(x, y)$ con respecto a x** , y se representa por

$$D_x F(x, y)$$

El proceso de encontrar $D_x F(x, y)$ para una $F(x, y)$ dada se llama **derivación parcial**.

La función

$$F_x = \{(x, y, z) \mid z = D_x F(x, y)\}$$

para la cual

$$F_x(x, y) = D_x F(x, y)$$

se llama **derivada parcial de F con respecto a x** . El dominio de F_x consta de aquellos pares del dominio de F para los cuales $D_x F(x, y)$ existe.

El valor de $D_x F(x, y)$ en (x_1, y_1) se representa por $D_x F(x, y) \Big|_{(x_1, y_1)}$; esto es:

$$D_x F(x, y) \Big|_{(x_1, y_1)} = F_x(x_1, y_1).$$

Ejemplo 1. Si $F(x, y) = 2x^2y + y^2x$, encuentre $D_x F(x, y)$.

Solución. De acuerdo con la definición de $D_x F(x, y)$ debemos calcular

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[2(x+h)^2 y + y^2(x+h)] - (2x^2 y + y^2 x)}{h}.$$

Escribimos: $[2(x+h)^2 y + y^2(x+h)] - (2x^2 y + y^2 x)$ como
 $[2(x+h)^2 - 2x^2]y + [(x+h) - x]y^2$ ó $2y(2xh + h^2) + y^2 h$.

Por tanto:

$$D_x F(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2y(2xh + h^2) + y^2 h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [2y(2x + h) + y^2] = 4xy + y^2.$$

Este ejemplo muestra que $D_x F(x, y)$ puede obtenerse directamente de la definición de $F(x, y) = 2x^2 y + y^2 x$ por derivación con respecto a x , considerando y como una constante. Se deduce de la definición de $D_x F(x, y)$ que si $D_x F(x, y)$ existe para una función dada $F = \{(x, y; z) \mid z = F(x, y)\}$, entonces $D_x F(x, y)$ se obtiene directamente de la fórmula que especifica $F(x, y)$ considerando y como una constante y derivando con respecto a x . Por ejemplo, si

$$F(x, y) = 2xy + y^2 x^2 + 6x^3 + y^4,$$

entonces

$$D_x F(x, y) = 2y + 2y^2 x + 18x^2 + 0.$$

Regresemos a la función

$$F = \{(x, y; z) \mid z = F(x, y), (x, y) \in D\}$$

y sea h un número distinto de cero para el cual $(x, y+h) \in D$. Si existe una función F_y de dos variables independientes, para la cual

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x, y+h) - F(x, y)}{h} = F_y(x, y) \quad (5)$$

para algunos pares ordenados $(x, y) \in D$, entonces:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x, y+h) - F(x, y)}{h}$$

es la derivada parcial de $F(x, y)$ con respecto a y y se representa por:

$$D_y F(x, y).$$

El proceso de encontrar $D_y F(x, y)$ para $F(x, y)$ dada se llama también **derivación parcial** y la función

$$F_y = \{(x, y; z) \mid z = D_y F(x, y)\},$$

para la cual

se llama la **derivada parcial de F con respecto a y** . El dominio de F_y consta de aquellos pares en el dominio de F para las cuales $D_y F(x, y)$ existe.

El valor de $D_y F(x, y)$ en (x_1, y_1) se presenta por $D_y F(x, y) \Big|_{(x_1, y_1)}$; esto es

$$D_y F(x, y) \Big|_{(x_1, y_1)} = F_y(x_1, y_1).$$

Como en el caso de $D_x F(x, y)$, la obtención de $D_y F(x, y)$ a partir de una fórmula para $F(x, y)$ equivale a encontrar la derivada de una expresión de una sola variable, ya que al calcular $D_y F(x, y)$ de una fórmula para $F(x, y)$, x se considera constante. Ejemplo, si

$$F(x, y) = 2xy + y^2 x^2 + 6x^3 + y^4,$$

entonces

$$D_y F(x, y) = 2x + 2yx^2 + 0 + 4y^3.$$

Ejemplo 2. Para la función $F = \{(x, y; z) \mid z = 4 - 4x^2 - y^2\}$ cuyo dominio es $Re \times Re$, encuentre $D_x F(x, y)$ y especifique las funciones F_x y F_y . Dé los dominios de F_x y F_y . Calcule los valores de $D_x F(x, y)$ y $D_y F(x, y)$ en $(\frac{1}{2}, 1)$.

Solución. Aquí $F(x, y) = 4 - 4x^2 - y^2$, entonces

$$D_x F(x, y) = -8x, \quad D_y F(x, y) = -2y.$$

por tanto

$$F_x = \{(x, y; z) \mid z = -8x\}$$

con dominio $Re \times Re$, y

$$F_y = \{(x, y; z) \mid z = -2y\}$$

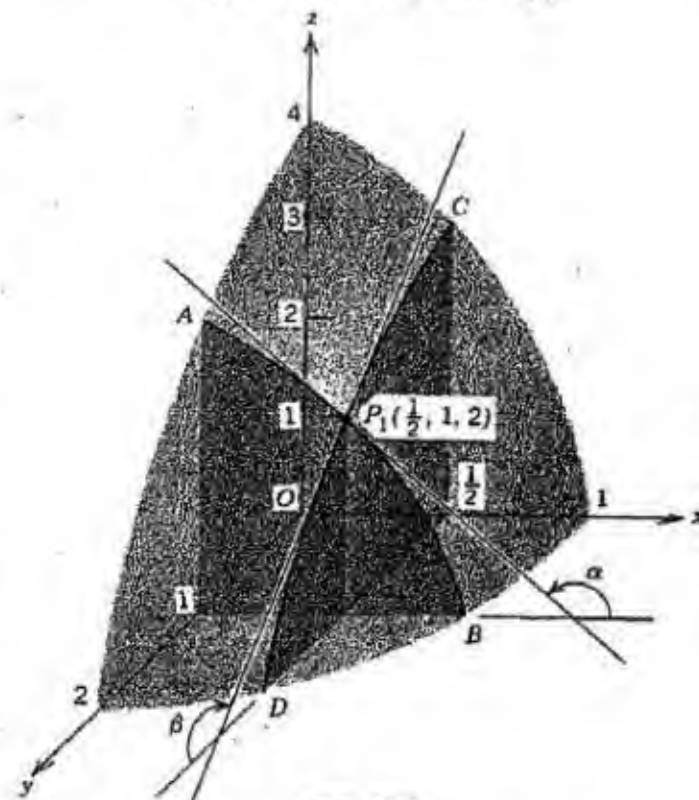


Fig. 10.8

con el dominio de ambas es $Re \times Re$. Ya que $(\frac{1}{2}, 1)$ está en el dominio de F_x y en el de F_y , tenemos:

$$D_x F(x, y) \Big|_{(\frac{1}{2}, 1)} = F_x(\frac{1}{2}, 1) = -4,$$

$$D_y F(x, y) \Big|_{(\frac{1}{2}, 1)} = F_y(\frac{1}{2}, 1) = -2,$$

En relación con el ejemplo 2 notamos que la gráfica de F es un paraboloide elíptico. La parte de esta superficie que está en el primer octante se indica en la Fig. 10.8. Más adelante (Sec. 10.4) discutiremos una representación geométrica de las derivadas parciales. Mientras, el estudiante debe estudiar la Fig. 10.8 cuidadosamente y preguntarse a sí mismo qué interpretación se le puede dar a

$$F_x(\tfrac{1}{2}, 1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\tfrac{1}{2} + h, 1) - F(\tfrac{1}{2}, 1)}{h}$$

$$F_y(\tfrac{1}{2}, 1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\tfrac{1}{2}, 1 + h) - F(\tfrac{1}{2}, 1)}{h}$$

y cuyos valores hemos calculado en el Ejemplo 2.

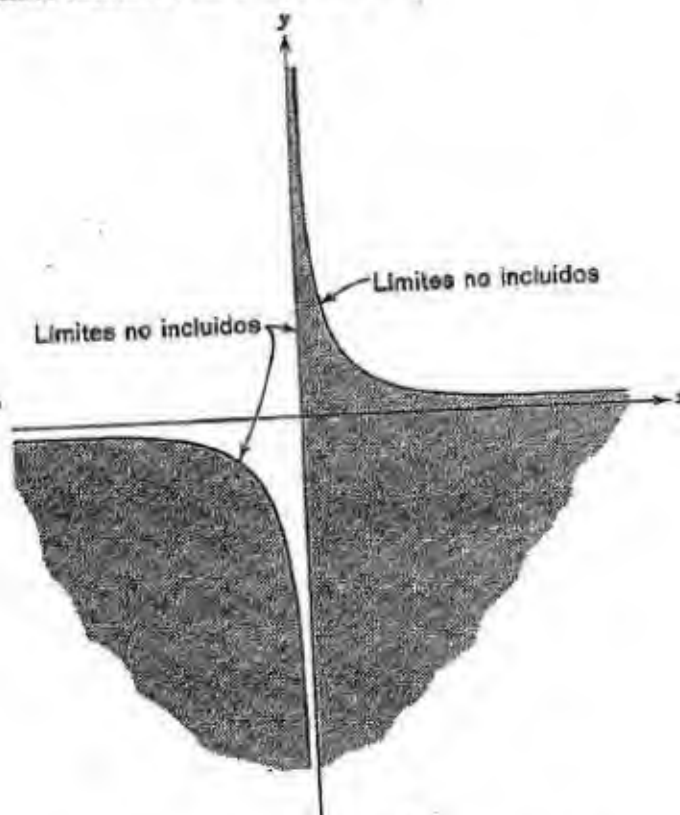


Fig. 10.9

Es evidente ahora que las fórmulas familiares para derivación se pueden aplicar para obtener derivadas parciales.

Ejemplo 3. Encuentre $D_x F(x, y)$ y $D_y F(x, y)$ y dé el dominio de cada una de las funciones F_x y F_y donde (a) $F(x, y) = \sqrt{x - x^2 y}$; (b) $F(x, y) = \cos x^2 y$.

Solución. (a) Aquí

$$D_x F(x, y) = \tfrac{1}{2}(x - x^2 y)^{-1/2} D_x(x - x^2 y) = \frac{1 - 2xy}{2\sqrt{x - x^2 y}},$$

$$D_y F(x, y) = \tfrac{1}{2}(x - x^2 y)^{-1/2} D_y(x - x^2 y) = \frac{-x^2}{2\sqrt{x - x^2 y}}.$$

Recordemos que el dominio de F_x es el conjunto de pares ordenados (x, y) las cuales pertenecen al dominio de F y para los cuales existe $D_x F(x, y)$; en forma similar se definió el dominio de F_y . En este ejemplo, el dominio de F es el conjunto $\{(x, y) \mid x - x^2 y \geq 0\}$, $D_x F(x, y)$ y $D_y F(x, y)$ existen sobre el conjunto $\{(x, y) \mid x - x^2 y > 0\}$. Por tanto, el dominio de F_x , que es también el de F_y , es el conjunto $\{(x, y) \mid x - x^2 y > 0\}$. La gráfica de este conjunto se indica en la Fig. 10.9.

(b) En este caso:

$$D_x F(x, y) = (-\sin x^2 y) D_x(x^2 y) = -2xy \sin x^2 y$$

$$D_y F(x, y) = (-\sin x^2 y) D_y(x^2 y) = -x^2 \sin x^2 y.$$

Aquí el dominio de $F_x =$ dominio de $F_y =$ dominio de $F = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Algunas veces la notación

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}, \quad \text{ó} \quad \frac{\partial F}{\partial x},$$

se usa en lugar de $D_x F(x, y)$ y la notación

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}, \quad \text{ó} \quad \frac{\partial F}{\partial y},$$

se usa para $D_y F(x, y)$. Por ejemplo, si $F(x, y) = xe^{x^2 y}$, entonces

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = x \frac{\partial(e^{x^2 y})}{\partial x} + e^{x^2 y} \frac{\partial x}{\partial x} = x(2xye^{x^2 y}) + e^{x^2 y} = e^{x^2 y}(2x^2 y + 1),$$

y

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = x \frac{\partial(e^{x^2 y})}{\partial y} = xe^{x^2 y} \frac{\partial(x^2 y)}{\partial y} = xe^{x^2 y}(x^2) = x^3 e^{x^2 y}.$$

Cuando usamos el símbolo $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}$ para representar la derivada parcial de

$F(x, y)$ con respecto a x , o el símbolo $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$ para representar la derivada parcial de $F(x, y)$ con respecto a y , se entiende que estos símbolos *no* son cocientes de dos cantidades $\partial F(x, y)$ y ∂x o $\partial F(x, y)$ y ∂y . Ningún significado se le asigna a los símbolos $\partial F(x, y)$, ∂x , o ∂y tomado separadamente. Ya que esto difiere del caso en la cual el símbolo $\frac{dF(x)}{dx}$ se usa en relación con una función de una variable independiente, se debe tener cuidado al usar estos símbolos. Cuando la expresión para $F(x, y)$ es muy complicada, es común escribir

$$\frac{\partial}{\partial x} (F(x, y)) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial y} (F(x, y))$$

en lugar de

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}.$$

Las definiciones y símbolos para las derivadas parciales de $F(x, y, z)$ son semejantes a las usadas para las derivadas parciales de $F(x, y)$. Por ejemplo, si $F = \{(x, y, z; u) \mid u = F(x, y, z), (x, y, z) \in D\}$,

la derivada parcial de $F(x, y, z)$ con respecto a x se representa por $D_x F(x, y, z)$ y

$$D_x F(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h, y, z) - F(x, y, z)}{h},$$

si este límite existe. El estudiante debe escribir las definiciones de $D_y F(x, y, z)$ y $D_z F(x, y, z)$.

Como en la determinación de $D_x F(x, y)$, podemos deducir $D_x F(x, y, z)$ de la fórmula que especifica $F(x, y, z)$ al considerar y y z constantes y derivar con respecto a x . Por ejemplo: si

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2xy \cos z,$$

entonces

$$D_x F(x, y, z) = 2x - 2y \cos z, \quad D_y F(x, y, z) = 2y - 2x \cos z \quad \text{y} \quad D_z F(x, y, z) = 2xy \sin z.$$

Si F es una función de n variables independientes.

$F = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; u) \mid u = F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D\}$, podemos definir n derivadas parciales de $F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. Así

$$D_{x_3} F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_1, x_2, x_3+h, \dots, x_n) - F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}{h},$$

si el límite existe.

Si $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 5x_4^2$, y si queremos encontrar $D_{x_3} F(x_1, x_2, x_3, x_4)$, consideramos x_3 como la única variable y x_1, x_2, x_4 como constantes y obtenemos

$$D_{x_3} F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 8x_3.$$

De la Sec. 3.10 recordamos el Teorema del Valor Medio para Derivadas, el cual enunciamos de nuevo como teorema 1.

Teorema 1. Si $F = \{(x, y) \mid y = F(x)\}$ es continua en el intervalo cerrado $[a; b]$ y derivable en el intervalo abierto $(a; b)$, entonces existe un número tal que $a < c < b$ y

$$F(b) - F(a) = (b - a)F'(c).$$

Como una consecuencia directa de este teorema tenemos los dos teoremas siguientes.

Teorema 2. Sea F una función de dos variables independientes, a y b dos números reales tales que $a < b$, y y_0 un número real. Si $F_x(x, y)$ existe para $x \in [a; b]$, $y = y_0$, entonces existe un número real c tal que $a < c < b$ y

$$F(b, y_0) - F(a, y_0) = (b - a)F_x(c, y_0). \quad (6)$$

Demostración. Definamos la función G de una variable independiente

$$G(x) = F(x, y_0), \quad x \in [a; b].$$

entonces:

$$G'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h, y_0) - F(x, y_0)}{h} = F_x(x, y_0).$$

Por tanto, ya que $F_x(x, y_0)$ existe para $x \in [a; b]$, $G'(x)$ existe para $x \in [a; b]$ y G satisface la hipótesis del teorema 1. Entonces, por teorema 1, existe un número real c tal que $a < c < b$ y

$$G(b) - G(a) = (b - a)G'(c),$$

esto es

$$F(b, y_0) - F(a, y_0) = (b - a)F_x(c, y_0).$$

Algunas veces es útil establecer el teorema 2 en la forma siguiente. Si existe un intervalo cerrado I y un número real y_0 el cual tiene la propiedad de que $F_x(x, y)$ existe para $x \in I$, $y = y_0$, entonces:

$$F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0) = hF_x(c, y_0) \quad (7)$$

donde $x_0 \in I$, $(x_0 + h) \in I$ y c es un número real entre x_0 y $x_0 + h$.

Es fácil para el lector dar la demostración del siguiente teorema.

Teorema 3. Sea F una función de dos variables independientes, a y b dos números reales tales que $a < b$ y x_0 un número real.

Si $F_y(x, y)$ existe para $x = x_0$, $y \in [a; b]$, entonces existe un número real c tal que $a < c < b$ y

$$F(x_0, b) - F(x_0, a) = (b - a)F_y(x_0, c). \quad (8)$$

Otra forma de establecer el teorema 3 es: Si existe un intervalo cerrado J y un número real x_0 el cual tiene la propiedad de que $F_y(x, y)$ existe para $x = x_0$, $y \in J$, entonces:

$$F(x_0, y_0 + k) - F(x_0, y_0) = kF_y(x_0, c), \quad (9)$$

donde $y_0 \in J$, $(y_0 + k) \in J$ y c es número real entre y_0 y $y_0 + k$.

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 8 encuentre $D_x F(x, y)$ y $D_y F(x, y)$.

1. $F(x, y) = \tan(ax + by)$.
2. $F(x, y) = e^{ax+by}$.
3. $F(x, y) = \sqrt{y - 2x}$.
4. $F(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$.
5. $F(x, y) = \arcsen(x/y)$.
6. $F(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$.
7. $F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$.
8. $F(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$.
9. Dé el dominio de la función F especificada en cada uno de los ejercicios 3, 4, 6, 7 y 8. Grafique cada uno de estos dominios.
- En los ejercicios 10 al 13 encuentre $F_x(x, y)$ y $F_y(x, y)$ y escriba las expresiones para las funciones F_x y F_y . Dé el dominio de F , F_x y F_y . Encuentre el valor de $F(x, y)$, $F_x(x, y)$ y $F_y(x, y)$ en el punto (x_1, y_1) .
10. $F(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$; $(x_1, y_1) = (2, 1)$.
11. $F(x, y) = 4 - 4x^2 - y^2$ y $F(x, y) > 0$; $(x_1, y_1) = (\frac{1}{2}, 1)$.

12. $F(x, y) = \ln(9 - x^2 - y^2)$; $(x_1, y_1) = (2, 2)$.
 13. $F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 9$; $(x_1, y_1) = (-3, 2)$.
 14. Para $F(\theta, \phi) = \sin 2\theta \cos 3\phi$, encuentre $D_\theta F(\theta, \phi)$ y $D_\phi F(\theta, \phi)$.
 15. Para $F(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, donde $(x, y) \neq (0, 0)$, encuentre

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \text{ y } \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}.$$

16. Para $F(x, y) = \tan \frac{x}{y}$ encuentre $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}$ y $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$.

17. Para $F = \{(x, y, z; u) \mid u = F(x, y, z)\}$, dé las definiciones de $D_x F(x, y, z)$ y $D_y F(x, y, z)$ semejantes a la definición dada en esta sección para $D_z F(x, y, z)$.

En los ejercicios del 18 al 21 encuentre $D_x F(x, y, z)$, $D_y F(x, y, z)$ y $D_z F(x, y, z)$.

18. $F(x, y, z) = xyz + x^2y - xz^2 + y^4$.

19. $F(x, y, z) = 2x^3 + 4y^2 - 2xy \cos z$.

20. $F(x, y, z) = x \arctan(y/z)$.

21. $F(x, y, z) = ye^{2xz} + x \ln(y^2 - z^2) + \arctan 3z^2$.

22. Para $F = \{(x, y, z; u) \mid u = F(x, y, z)\}$, dé las definiciones de F_x , F_y y F_z semejantes a las definiciones de F_x y F_y dadas en esta sección para $F = \{(x, y; z) \mid z = F(x, y)\}$.

En cada uno de los ejercicios del 23 al 26 encuentre $F_x(x, y, z)$, $F_y(x, y, z)$ y $F_z(x, y, z)$ y escriba las expresiones para las funciones F_x , F_y y F_z .

23. $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2$.

24. $F(x, y, z) = 3x^2y^3 - 4x^3y^2 + \sin 2xy + e^{xyz} + \ln 4yz$.

25. $F(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^3 - 6xyz$.

26. $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Algunas veces es conveniente poner $z = F(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}$, y $\frac{\partial z}{\partial y} =$

$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$. En los ejercicios del 27 al 30 encuentre $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

27. $z = e^{xy}$.

28. $z = x^3 - 3x^2y - 2y^3$.

29. $z = \cos(y - 2x)$.

30. $z = \tan \frac{x}{y}$.

En los ejercicios del 31 al 34 encuentre $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial z}$.

31. $u = x^2yz + xy^2z + xyz^2$.

32. $u = \frac{x}{y + z}$.

33. $u = \cot(ax + by + cz)$.

34. $u = e^{xy/z}$.

35. Si $u = x^2y + y^2z + z^2x$, verifique que $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = (x + y + z)^2$.

36. Si $z = x^3 - 3x^2y - 2y^3$; verifique que $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 3z$.

37. Si $z = \arcsen \frac{x-y}{x+y}$, verifique que $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

38. Si $u = \sen \frac{x+y}{z}$, verifique que $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

39. Si $z = \ln(e^x + e^y)$, verifique que $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

40. Si $z = \frac{xy}{x+y}$, verifique que $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$.

10.3 Sistemas de derivadas parciales. El par de ecuaciones:

$$F_x(x, y) = G(x, y), \quad F(a, y) = H(y) \quad (10)$$

donde G es una función dada de dos variables independientes, H es una función dada de una variable independiente y a una constante, se llama **sistema de derivada parcial**. Si existe una función F que satisfice ambas ecuaciones de (10) para $(x, y) \in D$, es una solución del sistema (10) sobre D . Demostraremos para cierto tipo del conjunto D que si existe una solución de (10) sobre D entonces esta solución es única sobre D .

Teorema 4. Sean D una región cerrada, y_0 cualquier número tal que $(a, y_0) \in D$. Si D tiene la propiedad de que $\{x \mid (x, y_0) \in D\}$ es un intervalo cerrado, y si el sistema de derivada parcial (10) tiene una solución sobre D , entonces, el sistema tiene una única solución sobre D .

Demostración. Supóngase que F y K son dos soluciones del sistema (10) sobre D . Demostraremos que $F(x, y) = K(x, y)$ para $(x, y) \in D$. Por hipótesis:

$$\begin{aligned} F_x(x, y) &= G(x, y), & F(a, y) &= H(y) & \text{para } (x, y) \in D, \\ K_x(x, y) &= G(x, y), & K(a, y) &= H(y) & \text{para } (x, y) \in D. \end{aligned}$$

Definamos una función de dos variables U ,

$$U(x, y) = F(x, y) - K(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

Entonces:

$$U_x(x, y) = F_x(x, y) - K_x(x, y)$$

$$U_x(x, y) = G(x, y) - G(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D. \quad (11)$$

Sea y_0 cualquier valor de y para el cual $(a, y_0) \in D$; entonces $U_x(x, y)$ satisface la hipótesis del teorema 2; esto es, $U_x(x, y)$ existe para x en el intervalo cerrado $\{x \mid (x, y_0) \in D\}$, $y = y_0$. Por lo tanto, por la ecuación (7), para este valor y_0 tenemos: (poniendo $x_0 = a$, $x_0 + h = x$ en el teorema)

$$U(x, y_0) - U(a, y_0) = (x - a)U_x(c, y_0)$$

Para un número real c entre a y x . Sin embargo, por (11), $U_x(c, y_0) = 0$ y por tanto

$$U(x, y_0) = U(a, y_0) \quad (12)$$

para cualquier número y_0 tal que $(a, y_0) \in D$ y $x \in \{x \mid (x, y_0) \in D\}$, esto es para $(x, y_0) \in D$. Por la definición de la función U , la ecuación (12) se transforma:

$$F(x, y_0) - K(x, y_0) = F(a, y_0) - K(a, y_0)$$

para $(x, y_0) \in D$. Ya que F y K son soluciones de (10), $F(a, y_0) - K(a, y_0) = 0$, y en consecuencia:

$$F(x, y_0) - K(x, y_0) = 0,$$

donde y_0 es cualquier valor de y tal que $(a, y_0) \in D$. Por lo tanto:

$$F(x, y) = K(x, y) \quad \text{para } (x, y) \in D.$$

Supóngase que se nos pide resolver el sistema

$$F_x(x, y) = 3x^2y^2 + 4x^3y^3, \quad F(2, y) = -5y^3. \quad (13)$$

Al considerar la primera de estas ecuaciones, ¿qué podemos decir acerca de $F(x, y)$? Observamos que

$$x^3y^2 + x^4y^3$$

es una expresión cuya derivada parcial con respecto a x es $3x^2y^2 + 4x^3y^3$. Además

$$x^3y^2 + x^4y^3 + 7y \quad y \quad x^3y^2 + x^4y^3 + 9y$$

son expresiones con la propiedad de que la derivada parcial con respecto a x de cada una ellas es $3x^2y^2 + 4x^3y^3$. En general cualquier expresión de la forma

$$x^3y^2 + x^4y^3 + G(y),$$

donde $G(y)$ es cualquier expresión que no contiene a x , tiene la propiedad de que

$$D_x[x^3y^2 + x^4y^3 + G(y)] = 3x^2y^2 + 4x^3y^3.$$

concluimos que:

$$F(x, y) = x^3y^2 + x^4y^3 + G(y).$$

De esta ecuación tenemos:

$$F(2, y) = 8y^3 + 16y^3 + G(y).$$

Pero para satisfacer la segunda ecuación del sistema (13), debemos tener:

$$F(2, y) = -5y^3.$$

Entonces establecemos:

$$8y^3 + 16y^3 + G(y) = -5y^3,$$

de donde encontramos que

$$G(y) = -16y^3 - 13y^3.$$

concluimos que la función F expresada por

$$F(x, y) = x^3y^2 + x^4y^3 - 16y^3 - 13y^3$$

satisface el sistema (13). Lo cual puede ser verificado por el estudiante.

Ejemplo 1. Resuelva el sistema de derivada parcial

$$F_x(x, y) = y \cos(xy), \quad F(1, y) = \sin y.$$

Solución. Observamos que $\sin(xy) + G(y)$, donde $G(y)$ es cualquier expresión que no contiene a x , tiene la propiedad de que

$$D_x[\sin(xy) + G(y)] = y \cos(xy);$$

por tanto, escribimos:

$$F(x, y) = \sin(xy) + G(y).$$

Entonces

$$F(1, y) = \sin y + G(y).$$

Ya que $F(1, y) = \sin y$, tendremos que $\sin y = \sin y + G(y)$; esto implica que $G(y) = 0$.

Por tanto,

$$F(x, y) = \sin(xy)$$

es la solución del sistema dado, resultado que el estudiante puede verificar.

Algunas veces, en lugar de darse un par de ecuaciones como las del sistema (10), se dan un par de ecuaciones de la forma

$$F_x(x, y) = G(x, y), \quad F_y(x, y) = H(x, y),$$

y se pide encontrar F , si existe, que satisfaga estas ecuaciones. Este problema se ilustra en el ejemplo 2.

Ejemplo 2. Encuentre una función F , si existe, la cual satisface (a) $F_x(x, y) = x + y$, $F_y(x, y) = x$; (b) $F_x(x, y) = x + y$, $F_y(x, y) = -x$.

Solución. (a) Observamos que podemos escribir:

$$F(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + G(y), \quad (14)$$

donde $G(y)$ es cualquier expresión que no contiene a x ; puesto que

$$D_x\left[\frac{x^2}{2} + xy + G(y)\right] = x + y = F_x(x, y).$$

En forma semejante, podemos escribir:

$$F(x, y) = xy + H(x), \quad (15)$$

donde $H(x)$ es cualquier expresión que no contiene a y ; ya que

$$D_y[xy + H(x)] = x = F_y(x, y).$$

Al comparar (14) y (15) vemos que si escogemos

$$G(y) = 0 \quad y \quad H(x) = \frac{x^2}{2},$$

la función F expresada por

$$F(x, y) = xy + \frac{x^2}{2}$$

satisface las ecuaciones (a). Es evidente que la función F especificada por

$$F(x, y) = xy + \frac{x^2}{2} + c, \quad \text{donde } c \text{ es una constante,}$$

también satisface el sistema dado.

(b) Si procedemos como en (a), vemos que si $F_x(x, y) = x + y$, podemos escribir

$$F(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + G(y). \quad (16)$$

En forma similar, si $F_y(x, y) = -x$, podemos escribir:

$$F(x, y) = -xy + H(x). \quad (17)$$

Nótese que el término de (16) que contiene a x y y , y el término de (17) el cual contiene a x y y , $-xy$, no son iguales. En consecuencia, es imposible escoger $G(y)$ y $H(x)$ para formar una función definida por (16) y por (17) a la vez. Por tanto, no existe una función F que satisfaga el sistema (b).

EJERCICIOS

En los ejercicios del 1 al 4 resuelva el sistema de derivada parcial dado.

1. $F_x(x, y) = 4x^2y - 3x^2y^3$; $F(2, y) = 18y - y^3$.

2. $F_x(x, y) = x^2 + 3y$; $F(1, y) = \frac{1}{3} + y^3$.

3. $F_x(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-1}$; $F(0, y) = 4 \ln |y|$.

4. $F_x(x, y) = y \cos(xy)$; $F(1, y) = 3 \sin y$.

En los ejercicios del 5 al 8 encuentre una función F que satisfaga el par de ecuaciones dadas.

5. $F_x(x, y) = x^2 - 4xy - 2y^2$; $F_y(x, y) = y^2 - 4xy - 2x^2$.

6. $F_x(x, y) = x^2 + 2y + y^2 - 2xy$; $F_y(x, y) = 2x - x^2 + 2xy - y^2$.

7. $F_x(x, y) = \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}$; $F_y(x, y) = -\frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y}$.

8. $F_x(x, y) = \frac{1}{x} e^{2y}$; $F_y(x, y) = 2 e^{2y} \ln x$.

En los ejercicios del 9 al 10 demuestre que no hay función que satisfaga el par de ecuaciones dadas

9. $F_x(x, y) = \frac{1}{y}$; $F_y(x, y) = \frac{x-y}{y^2}$.

10. $F_x(x, y) = 2xe^y$; $F_y(x, y) = 2xe^y$.

En los ejercicios del 11 al 18 encuentre una función F , si existe, que satisfaga el par de ecuaciones dadas.

11. $F_x(x, y) = ye^x + e^y$; $F_y(x, y) = e^x + xe^y$.

12. $F_x(x, y) = \frac{2x}{y^3} + 1$; $F_y(x, y) = -\frac{3x^2}{y^4} - 2y$.

13. $F_x(x, y) = y \cos x$; $F_y(x, y) = -\sin x$.

14. $F_x(x, y) = y^2 \sin x$; $F_y(x, y) = -2y \cos x$.

15. $F_x(x, y) = e^x \cos y + 2x$; $F_y(x, y) = -e^x \sin y + \cos y + 3y^2$.

16. $F_x(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; $F_y(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$.

17. $F_x(x, y) = y \sin 2x$; $F_y(x, y) = (1 + \sin^2 x)$.

18. $F_x(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} + e^x$; $F_y(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2}$.

10.4 Interpretación geométrica de las derivadas parciales. Consideremos una superficie que sea la gráfica de la ecuación:

$$z = F(x, y),$$

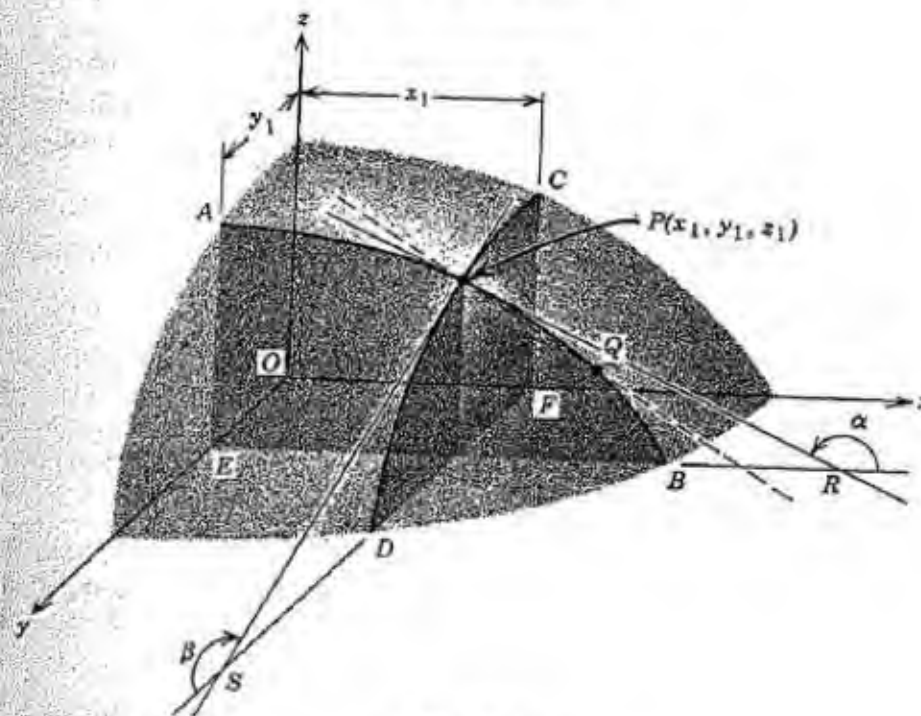


Fig. 10.10

esto es, la gráfica de la función

$$F = \{(x, y, z) \mid z = F(x, y)\}$$

(Vea Fig. 10.10). Supóngase que $P(x_1, y_1, z_1)$ es un punto en esta superficie, esto es, que $z_1 = F(x_1, y_1)$, y supóngase también que $F_x(x_1, y_1)$ y $F_y(x_1, y_1)$ existen. Entonces $y = y_1$ es una ecuación del plano ABE perpendicular al plano xy y

$$z = F(x, y), \quad y = y_1$$

son las ecuaciones de la curva de intersección APB de la superficie dada y el plano con ecuación $y = y_1$. Obsérvese que la pendiente de la línea secante PQ pasa por los puntos

$$P(x_1, y_1, F(x_1, y_1)) \quad \text{y} \quad Q(x_1 + h, y_1, F(x_1 + h, y_1))$$

en la curva APB está dada por

$$\frac{F(x_1 + h, y_1) - F(x_1, y_1)}{h}$$

Por definición, la pendiente de la línea PR tangente a la curva APB en P (o simplemente la pendiente de APB en P) es:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_1 + h, y_1) - F(x_1, y_1)}{h},$$

si este límite existe. Reconocemos este límite como $F_x(x_1, y_1)$; entonces:

$$F_x(x_1, y_1) = \text{pendiente de } APB \text{ en } P = \tan \alpha.$$

En forma similar, si $x = x_1$ es una ecuación del plano CDF perpendicular al plano xy ,

$$z = F(x, y), \quad x = x_1$$

son las ecuaciones de la curva CPD , intersección de la superficie dada y el plano cuya ecuación es $x = x_1$, y

$$F_y(x_1, y_1) = \text{pendiente de } CPD \text{ en } P = \tan \beta.$$

Por el capítulo 9 sabemos que

$$z - z_1 = F_x(x_1, y_1)(x - x_1)$$

es una ecuación del plano que contiene a la línea tangente PR y que es perpendicular al plano xy ; entonces

$$y = y_1, \quad z - z_1 = F_y(x_1, y_1)(y - y_1)$$

es una representación perpendicular de la línea tangente PR . Para conseguir una representación paramétrica de la línea tangente PR , escribimos $x - x_1 = t$ y obtenemos:

$$x = x_1 + t, \quad y = y_1, \quad z = z_1 + F_x(x_1, y_1)t.$$

En forma similar vemos que:

$$x = x_1, \quad z - z_1 = F_y(x_1, y_1)(y - y_1)$$

es una representación perpendicular de la línea tangente PS y

$$x = x_1 + t, \quad y = y_1 + t, \quad z = z_1 + F_x(x_1, y_1)t.$$

es una representación paramétrica.

Las líneas tangentes PR y PS determinan un plano del cual podemos encontrar una ecuación. Por inspección vemos que su ecuación es:

$$z - z_1 = F_x(x_1, y_1)(x - x_1) + F_y(x_1, y_1)(y - y_1) \quad (18)$$

ya que la intersección del plano con esta ecuación y el plano con ecuación $y = y_1$ es la línea PR , con ecuaciones:

$$y = y_1, \quad z - z_1 = F_x(x_1, y_1)(x - x_1),$$

y la intersección del plano con ecuación (18) y el plano con ecuación $x = x_1$ es la línea PS , con ecuaciones:

$$x = x_1, \quad z - z_1 = F_y(x_1, y_1)(y - y_1).$$

Al plano con ecuación (18) se le llama **plano tangente** a la superficie que es la gráfica de F en el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ porque contiene a las líneas tangentes PR y PS .

Se demostrará más adelante (Sec. 10.8) que si la función F tiene la propiedad de que F_x y F_y son continuas en alguna vecindad de (x_1, y_1) , y si C es la intersección de la gráfica de F y de cualquier plano perpendicular al plano xy que contiene al punto $P(x_1, y_1, F(x_1, y_1))$, entonces la línea tangente a C en P estará en el plano con ecuación (18).

La línea perpendicular al plano tangente a la superficie en un punto dado P se llama **línea normal** a la superficie en P . Hemos visto que una ecuación del plano tangente a la gráfica de $z = F(x, y)$ en el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ es:

$$F_x(x_1, y_1)(x - x_1) + F_y(x_1, y_1)(y - y_1) - (z - z_1) = 0. \quad (19)$$

Sabemos por los resultados de la Sec. 9.4 que el conjunto

$$F_x(x_1, y_1), \quad F_y(x_1, y_1), \quad -1$$

es un conjunto de números directores de la línea perpendicular al plano con ecuación (19). Por tanto, la línea normal a la gráfica de $z = F(x, y)$ en el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ tiene la representación paramétrica

$$x = x_1 + F_x(x_1, y_1)t, \quad y = y_1 + F_y(x_1, y_1)t, \quad z = z_1 - t, \quad (20)$$

Si $F_x(x_1, y_1) \neq 0$ y $F_y(x_1, y_1) \neq 0$, tiene la representación simétrica

$$\frac{x - x_1}{F_x(x_1, y_1)} = \frac{y - y_1}{F_y(x_1, y_1)} = \frac{z - z_1}{-1}. \quad (21)$$

Ejemplo. Encuentre una ecuación del plano tangente a la superficie con ecuación $z = 4 - 4x^2 - y^2$ en el punto $P_1(\frac{1}{2}, 1, 2)$. Además encuentre las ecuaciones paramétricas y una representación simétrica, si existe, de la línea normal en P .

Solución. $F(x, y) = 4 - 4x^2 - y^2$, entonces:

$$F_x(x, y) = -8x, \quad F_y(x, y) = -2y, \\ F_x(\frac{1}{2}, 1) = -4, \quad F_y(\frac{1}{2}, 1) = -2.$$

Usando (19) encontramos que una ecuación del plano tangente es:

$$-4(x - \frac{1}{2}) - 2(y - 1) - 1(z - 2) = 0, \\ 4x + 2y + z - 6 = 0.$$

Usando (20) tenemos que:

$$x = \frac{1}{2} - 4t, \quad y = 1 - 2t, \quad z = 2 - t$$

son las ecuaciones paramétricas de la línea normal, y, en consecuencia,

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$$

es una representación simétrica de la línea normal. La gráfica de una parte de esta superficie se muestra en la Fig. 10.8.

EJERCICIOS

1. (a) Construya la parte de la gráfica de $z = \sqrt{9-x^2-y^2}$ que está en el primer octante. Sobre esta gráfica indique las curvas de intersección C_1 y C_2 de esta superficie y los planos $y=2$ y $x=1$, respectivamente.

(b) Si $F(x, y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$, encuentre $F_x(1, 2)$ y $F_y(1, 2)$ y dé la interpretación geométrica de estos valores.

(c) Dé una representación perpendicular y una representación paramétrica de la línea tangente a C_1 en $(1, 2, 2)$ y de la línea tangente a C_2 en $(1, 2, 2)$.

(d) Encuentre una ecuación del plano tangente a la superficie dada en $(1, 2, 2)$. ¿Cuáles son las intersecciones de este plano tangente?

(e) Encuentre una representación paramétrica de la línea normal a la superficie dada, en el punto $(1, 2, 2)$.

2. (a) Construya la parte de la gráfica de $z = 9 - x^2 - 9y^2$ que está en el primer octante. Sobre esta gráfica indique las curvas de intersección C_1 y C_2 de esta superficie y los planos con ecuaciones $y = \frac{1}{3}$ y $x = 2$, respectivamente.

(b) Si $F(x, y) = 9 - x^2 - 9y^2$, encuentre $F_x(2, \frac{1}{3})$ y $F_y(2, \frac{1}{3})$ y dé una interpretación geométrica de estos valores.

(c) Dé una representación perpendicular y una representación paramétrica de la línea tangente a C_1 en $(2, \frac{1}{3}, 4)$ y de la línea tangente a C_2 en $(2, \frac{1}{3}, 4)$.

(d) Encuentre una ecuación del plano tangente a la superficie dada en $(2, \frac{1}{3}, 4)$. ¿Cuáles son las intersecciones de este plano tangente?

(e) Encuentre una representación paramétrica de la línea normal a la superficie en $(2, \frac{1}{3}, 4)$.

En los ejercicios del 3 al 12 se da la ecuación de una superficie. Encuentre para cada una de ellas una ecuación del plano tangente y una representación paramétrica de la línea normal en el punto indicado P_1 .

En los ejercicios 3 y 5 grafique en el mismo sistema de coordenadas la parte del plano tangente y la parte de la superficie que están en el primer octante.

3. $x^2 + 4y^2 = 2z$; $P_1(2, 1, 4)$ grafique.

4. $z = \sqrt{17 - x^2 - y^2}$; $P_1(3, 2, 2)$.

5. $z = \frac{1}{2}\sqrt{8 - x^2 - 2y^2}$; $P_1(\sqrt{2}, 1, 1)$ grafique.

6. $z = 8/xy$; $P_1(1, 2, 4)$.

7. $z = x^2 - y^2$; $P_1(1, 1, 0)$.

8. $z = \ln(x^2 + y^2)$; $P_1(2, 0, \ln 4)$.

9. $z = ye^{x/y}$; $P_1(1, 1, e)$.

10. $z = \arctan(y/x)$; $P_1(-2, 2, -\pi/4)$.

11. $z = 4/x$; $P_1(1, 0, 4)$.

12. $z = x^2 + xy - 2y^2$; $P_1(1, 2, -5)$.

13. Encuentre la pendiente en $P_1(2, 1, 8)$ de la curva de intersección C_1 de la superficie con ecuación $z = x^2 + 4y^2$ y el plano con ecuación $y = 1$. Haga lo mismo

para la curva intersección C_2 de la superficie y el plano $x = 2$. Grafique la parte de esta superficie que está en el primer octante, y sobre esta gráfica indique C_1 y C_2 .

14. Encuentre una representación perpendicular de la línea tangente en $P_1(2, 3, 1)$ a la curva de intersección de la semiesfera con ecuación

$$z = \sqrt{14 - x^2 - y^2}$$

y el plano con ecuación $x = 2$.

15. Demuestre que el volumen del tetraedro formado por los planos coordenados y un plano tangente a la superficie $z = a^3/xy$ es $9a^3/2$.

16. Demuestre que una ecuación del plano tangente a la superficie con ecuación $z = (x^2/a^2) + (y^2/b^2)$ en el punto (x_1, y_1, z_1) es:

$$z + z_1 = \frac{2xx_1}{a^2} + \frac{2yy_1}{b^2}.$$

17. Dos superficies son *tangentes* en el punto P si tienen el mismo plano tangente en P . Demuestre que las superficies con ecuaciones $z = \sqrt{2x^2 + 2y^2 - 25}$ y $5z = x^2 + y^2$ son tangentes en el punto $(4, 3, 5)$.

18. Dos superficies son *ortogonales* en el punto P si sus normales en P son perpendiculares. Demuestre que las superficies con ecuaciones $2z = -1 + x^2 + y^2$ y $2x = 1 - x^2 - y^2$ son ortogonales en cada uno de los puntos de intersección.

10.5 Límites y continuidad. En el capítulo 2 definimos la proposición:

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = L. \quad (22)$$

Aquí deseamos generalizar este concepto a funciones de más de una variable independiente; definiremos el significado de las proposiciones:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} F(x, y) = L. \quad (23)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (a,b,c)} F(x, y, z) = L. \quad (24)$$

En la definición de (22) se requiere que el dominio de F tenía la propiedad de que cualquier intervalo abierto que contenga a a , contenga también un número diferente de a perteneciente al dominio de F , y para cualquier número $\epsilon > 0$ exista un número $\delta > 0$, tal que $|F(x) - L| < \epsilon$, cuando $0 < |x - a| < \delta$ donde x está en el dominio de F .

Para dar una definición de (23), que es una generalización de (22), consideraremos la función:

$$F = \{(x, y, z) \mid z = F(x, y), (x, y) \in D\}$$

y supondremos que (a, b) es un par ordenado, tal que para todo número $\delta > 0$ el conjunto $\{(x, y) \mid |x - a| < \delta, |y - b| < \delta\}$ contiene pares de D diferentes del par (a, b) . Decimos que el límite de $F(x, y)$ cuando (x, y) tiende a (a, b) es L y escribimos:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} F(x, y) = L,$$

si para todo número $\epsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$, tal que para todos los pares (x, y) que pertenecen a D con la propiedad $(x, y) \neq (a, b)$, $|x - a| < \delta$ y $|y - b| < \delta$, $|F(x, y) - L| < \epsilon$.

Por ejemplo observamos que, $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} (x^2 y) = 12$, ya que escogiendo (x, y) suficientemente próximo a $(2, 3)$, $x^2 y$ se puede aproximar a 12 tanto como se desee.

La interpretación geométrica de esta definición es que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} F(x, y) = L$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, para el cual se cumple que si (x, y) es distinto de (a, b) pero pertenece a la vecindad δ de (a, b) , entonces $(x, y, F(x, y))$ está dentro del paralelepípedo cuyo centro es (a, b, L) y cuyos lados miden 2δ , 2δ y 2ϵ (Fig. 10.11).

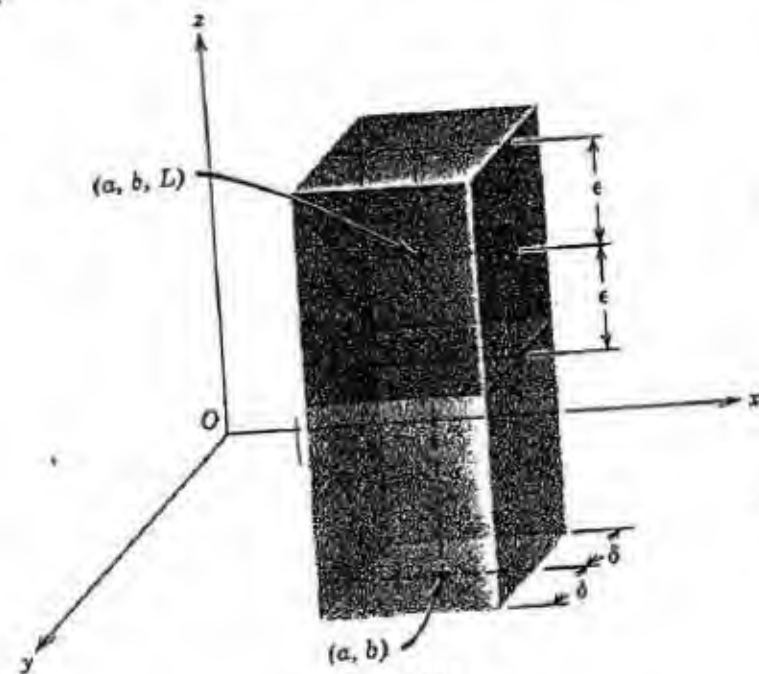


Fig. 10.11

Como un ejemplo más, si $F(x, y) = x^2 + y^2$, entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x, y) = 0.$$

Para verificar lo anterior, observemos que

$$|F(x, y) - 0| = |x^2 + y^2|$$

Para un $\epsilon > 0$ dado, si escogemos $\delta \leq \sqrt{\epsilon/2}$, entonces $|x^2 + y^2| < \epsilon$ cuando $|x - 0| < \delta$ y $|y - 0| < \delta$.

Si existe un número L para el cual se verifique (23), diremos que existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} F(x, y)$; si no existe ningún número L , que cumpla las mencionadas condiciones diremos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} F(x, y)$ no existe.

Si $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} F(x, y)$ existe, se puede demostrar que este límite es único.

Los teoremas dados en el capítulo 2 referentes a suma, diferencia, producto y cociente de los límites de $F(x)$ y $G(x)$ tienen análogos para límites de $F(x, y)$ y $G(x, y)$, y las demostraciones son completamente semejantes.

Para que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} F(x, y)$ exista, se necesita que $|F(x, y) - L|$ sea menor que ϵ para todos los puntos (x, y) distintos de (a, b) que pertenezcan al dominio de F y a la vecindad δ de (a, b) . Consideremos $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x, y)$, donde

$$F(x, y) = \frac{xy^3}{x^2 + y^6}.$$

Aquí para todo punto en el plano XY , distinto de $(0, 0)$ y sobre la línea cuya ecuación es $y = 2x$ tenemos $F(x, y) = F(x, 2x) = \frac{8x^4}{x^2 + 64x^2} = \frac{8x^2}{1 + 64x^2}$. Y como

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2}{1 + 64x^2} = 0,$$

existen puntos cercanos a $(0, 0)$, para los cuales $F(x, y)$ es tan próxima a cero como se quiera; entonces si $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x, y)$ existe, este límite debe ser cero. Sin embargo, para cualquier punto distinto de $(0, 0)$ sobre la curva cuya ecuación es $y^3 = x$, encontramos que

$$F(x, y) = F(y^3, y) = \frac{y^6}{y^6 + y^6} = \frac{1}{2}.$$

Entonces, en cualquier vecindad de $(0, 0)$ habrán puntos diferentes del $(0, 0)$ para los cuales $F(x, y) = \frac{1}{2}$. Por tanto, no podemos hacer que $F(x, y)$ se aproxime a cero tanto como se desee para todos los puntos próximos a $(0, 0)$, y concluimos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$ no existe.

En general, si

$$y = G_1(x) \quad y \quad y = G_2(x)$$

son las ecuaciones de dos curvas que pasan por (a, b) , y si podemos demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x, G_1(x)) \neq \lim_{x \rightarrow a} F(x, G_2(x))$$

entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} F(x, y)$ no existe.

La continuidad de una función F de dos variables independientes en el punto (a, b) de su dominio se define en forma similar a la continuidad de una función de una variable independiente. **La función**

$$F = \{(x, y; z) \mid z = F(x, y), (x, y) \in D\}$$

es continua en (a, b) si:

- (i) (a, b) está en el dominio de F ;
- (ii) $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} F(x, y)$ existe;
- (iii) $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} F(x, y) = F(a, b)$;

Estas tres condiciones se escriben a menudo en forma condensada, como:

$$(a, b) \in D \text{ y } \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} F(x, y) = F(a, b).$$

Si F es continua en cada punto de la región R , es continua en la región R . Si S es un conjunto de puntos que es la unión de varias regiones y si F es continua en cada punto de S , se dice que F es continua en el conjunto S .

Si F no es continua en (a, b) , se dice que es discontinua en (a, b) ó que tiene una discontinuidad en (a, b) .

El decir que F es continua en (a, b) esto es, que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} F(x, y) = F(a, b) \quad (25)$$

no equivale afirmar que

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x, b) = F(a, b) \text{ y } \lim_{y \rightarrow b} F(a, y) = F(a, b) \quad (26)$$

Si (25) es cierta, entonces también (26), pero si (26) es verdadera no por ello se deduce que (25) lo sea. Si la primera ecuación de (26) es cierta decimos que F es continua en x en (a, b) , y si la segunda ecuación de (26) es verdadera, decimos que F es continua en y en (a, b) .

Para funciones de tres o más variables independientes, las definiciones de límite y continuidad son semejantes a las definiciones dadas para una función de dos variables independientes.

EJERCICIOS

1. Demuestre que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ no existe:

2. (a) Usando el resultado del ejercicio 1, justifique que si:

$$F(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad F(0, 0) = 0$$

entonces la función F no es continua en $(0, 0)$.

(b) Demuestre que para esta función, $F_x(x, y)$ y $F_y(x, y)$ existen en Re .

3. Para $F(x, y) = \ln \frac{a-x}{a-y}$, donde $x < a$ y $y < a$, demuestre que

$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, a)} F(x, y)$ no existe.

Sugerencia: Note que $y - a = 2(x - a)$ y $(y - a) = 3(x - a)$ son las ecuaciones de dos líneas que pasan por (a, a) y considere los límites $\lim_{x \rightarrow a} F(x, a + 2(x - a))$ y $\lim_{x \rightarrow a} F(x, a + 3(x - a))$.

5. Demuestre que si $x \neq 0$ y $y \neq 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{ax + by}{cx + dy} \right) = \frac{a}{c}; \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + by}{cx + dy} \right) = \frac{b}{d};$$

6. $F(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $x \neq 0$ y $y \neq 0$; demuestre que $\lim_{x \rightarrow 0} F(x, y) = -1$ y $\lim_{y \rightarrow 0} F(x, y) = 1$, y en consecuencia:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} F(x, y) \right] \neq \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} F(x, y) \right].$$

7. Escriba una definición tomando como base la proposición $\lim_{(x, y, z) \rightarrow (a, b, c)} F(x, y, z) = L$.

8. Escriba una definición tomando como base la proposición siguiente: la función $F = \{(x, y, z; u) \mid u = F(x, y, z), (x, y, z) \in D\}$ es continua en (a, b, c) .

9. Para $F(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$, demuestre que $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} F(x, y) \right]$ y $\lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} F(x, y) \right]$ existen pero que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} F(x, y)$ no existe.

10.6 Un teorema básico. En esta sección demostraremos un teorema referente a funciones de dos variables, y mostraremos cómo se puede generalizar este resultado a funciones de más de dos variables independientes. Este teorema con sus generalizaciones es la base de la mayor parte del material subsecuente relativo a derivadas parciales.

Teorema 5. Sea $F = \{(x, y; z \mid z = F(x, y))\}$ una función cuyo dominio es la región R . Si (x_1, y_1) es un punto interior de R y F_x y F_y son continuas en una vecindad cerrada N de (x_1, y_1) donde $N \subseteq R$, entonces

$$F(x_1 + h, y_1 + k) - F(x_1, y_1) = hF_x(x_1, y_1) + kF_y(x_1, y_1) + h\theta_1(h, k) + k\theta_2(h, k), \quad (27)$$

donde h y k son dos números reales tales que $(x_1 + h, y_1 + k) \in N$, y θ_1 y θ_2 son dos funciones de dos variables independientes tales que

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \theta_1(h, k) = 0, \quad \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \theta_2(h, k) = 0. \quad (28)$$

Demostración. Sean h y k dos números tales que $(x_1 + h, y_1 + k) \in N$, y hagamos:

$$F(x_1 + h, y_1 + k) - F(x_1, y_1) = [F(x_1 + h, y_1 + k) - F(x_1, y_1 + k)] + [F(x_1, y_1 + k) - F(x_1, y_1)]. \quad (29)$$

Por hipótesis F_x y F_y son continuas en N ; sabemos que $F_x(x, y)$ y $F_y(x, y)$ existen en N . Por tanto las hipótesis de los teoremas 2 y 3 de la Sec. 10.2 (en sus segundas formas) se satisfacen y usando estos teoremas tenemos que:

$$F(x_1 + h, y_1 + k) - F(x_1, y_1 + k) = hF_x(c, y_1 + k) \quad (30)$$

$$F(x_1, y_1 + k) - F(x_1, y_1) = kF_y(x_1, d), \quad (31)$$

donde C está entre x_1 y $x_1 + h$, y d está entre y_1 y $y_1 + k$.

Usando (30) y (31) en (29), obtenemos

$$F(x_1 + h, y_1 + k) - F(x_1, y_1) = hF_x(c, y_1 + k) + kF_y(x_1, d), \quad (32)$$

donde C está entre x_1 y $x_1 + h$, y d está entre y_1 y $y_1 + k$.

Como F_x y F_y son continuas en N , esto implica que:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} F_x(c, y_1 + k) = F_x(x_1, y_1) \quad (33)$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} F_y(x_1, d) = F_y(x_1, y_1). \quad (34)$$

Definamos dos funciones θ_1 y θ_2 por las igualdades

$$\theta_1(h, k) = F_x(c, y_1 + k) - F_x(x_1, y_1)$$

$$\theta_2(h, k) = F_y(x_1, d) - F_y(x_1, y_1),$$

entonces

$$F_x(c, y_1 + k) = F_x(x_1, y_1) + \theta_1(h, k)$$

$$F_y(x_1, d) = F_y(x_1, y_1) + \theta_2(h, k).$$

De estas igualdades y de (32) se deduce que:

$$F(x_1 + h, y_1 + k) - F(x_1, y_1) = hF_x(x_1, y_1) + kF_y(x_1, y_1) + h\theta_1(h, k) + k\theta_2(h, k).$$

Además, (33), (34) y las definiciones de $\theta_1(h, k)$ y $\theta_2(h, k)$ implican que:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \theta_1(h, k) = 0, \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \theta_2(h, k) = 0.$$

Por tanto, queda demostrado el teorema.

El teorema 5 puede dar una condición suficiente para que una función F de dos variables independientes sea continua en una región R .

Teorema 6. Si la función $F = \{(x, y; z) \mid z = F(x, y)\}$ tiene la propiedad de que F_x y F_y son continuas en una región R , entonces F es continua en cada punto interior de R .

Demostración. Sea (x_1, y_1) un punto interior de R . De (27) se deduce que:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} [F(x_1 + h, y_1 + k) - F(x_1, y_1)] = 0,$$

entonces

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} F(x_1 + h, y_1 + k) = F(x_1, y_1).$$

Con esto el teorema queda demostrado. ■

El teorema 6 debe compararse con el teorema 1 de la Sec. 3.2, el cual establece que si F es una función de una variable, entonces la existencia de $F'(x)$ en a es suficiente para asegurar la continuidad de F en a . El teorema 6 requiere no solamente la existencia de las derivadas parciales $F_x(x_1, y_1)$ y $F_y(x_1, y_1)$, sino también la continuidad de F_x y F_y en (x_1, y_1) . Para poner de relieve que la sola existencia de las derivadas parciales $F_x(x_1, y_1)$ y $F_y(x_1, y_1)$ no es suficiente para asegurar la continuidad de F en (x_1, y_1) , consideremos la función F expresada por

$$F(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

$$F(0, 0) = 0.$$

Del ejercicio 1 de la Sec. 10.5 resulta que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x, y)$ no existe y por tanto F no es continua en $(0, 0)$. Sin embargo:

$$F_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(0 + h, 0) - F(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$F_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(0, 0 + h) - F(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

existen.

El teorema 5 se puede extender a funciones de más de dos variables independientes.

Por ejemplo, si

$$F = \{(x, y, z; u) \mid u = F(x, y, z)\}$$

es una función cuyo dominio es una región (tridimensional) R , y si F_x , F_y y F_z son continuas en alguna vecindad (tridimensional) cerrada N de un punto interior (x_1, y_1, z_1) de R , entonces

$$\begin{aligned} F(x_1 + h, y_1 + k, z_1 + m) - F(x_1, y_1, z_1) \\ = hF_x(x_1, y_1, z_1) + kF_y(x_1, y_1, z_1) + mF_z(x_1, y_1, z_1) \\ + h\theta_1(h, k, m) + k\theta_2(h, k, m) + m\theta_3(h, k, m), \end{aligned} \quad (35)$$

donde $(x_1 + h, y_1 + k, z_1 + m) \in N$, θ_1 , θ_2 y θ_3 son funciones de tres variables independientes; tales que

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k,m) \rightarrow (0,0,0)} \theta_1(h, k, m) &= \lim_{(h,k,m) \rightarrow (0,0,0)} \theta_2(h, k, m) \\ &= \lim_{(h,k,m) \rightarrow (0,0,0)} \theta_3(h, k, m) = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

En general, si

$$F = \{(x_1, x_2, \dots, x_n; w) \mid w = F(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

es una función de n variables independientes con F_{x_i} ; $i = 1, 2, \dots, n$, continuas en una vecindad (n -dimensional) cerrada N de un punto interior $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ del dominio de F , entonces:

$$\begin{aligned} F(x'_1 + h_1, x'_2 + h_2, \dots, x'_n + h_n) - F(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \\ = \sum_{i=1}^n [h_i F_{x_i}(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) + h_i \theta_i(h_1, h_2, \dots, h_n)] \end{aligned} \quad (37)$$

donde

$$\lim_{(h_1, h_2, \dots, h_n) \rightarrow (0, 0, \dots, 0)} \theta_i(h_1, h_2, \dots, h_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

En las aplicaciones del teorema 5 y sus generalizaciones, frecuentemente reemplazamos x_2 por x , y_1 por y etc.; h por Δx , k por Δy , etc. Si hacemos $z = F(x, y)$ y definimos Δz como:

$$\Delta z = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y),$$

entonces (27) se transforma en:

$$\Delta z = F_x(x, y) \Delta x + F_y(x, y) \Delta y + \theta_1(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \theta_2(\Delta x, \Delta y) \Delta y, \quad (38)$$

y (28) se transforma en:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \theta_1(\Delta x, \Delta y) = 0, \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \theta_2(\Delta x, \Delta y) = 0. \quad (39)$$

Algunas veces encontramos (38) escrita en la siguiente forma:

$$\Delta z = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + \theta_1(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \theta_2(\Delta x, \Delta y) \Delta y. \quad (40)$$

En forma similar escribimos (35) como:

$$\Delta u = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \Delta z + \theta_1(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \Delta x + \theta_2(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \Delta y + \theta_3(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \Delta z \quad (41)$$

y (37) como:

$$\Delta w = \frac{\partial F}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \Delta x_n + \sum_{i=1}^n \theta_i(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n) \Delta x_i \quad (42)$$

La igualdad (38) constituye una fórmula para el incremento Δz de z en términos de $x, y, \Delta x, \Delta y, \theta_1(\Delta x, \Delta y)$ y $\theta_2(\Delta x, \Delta y)$. Esta igualdad y sus generalizaciones son de importancia básica en los desarrollos subsecuentes. Sin embargo, si para una función dada $F = \{(x, y; z) \mid z = F(x, y)\}$ deseamos obtener una fórmula que exprese Δz en términos de $x, y, \Delta x$ y Δy , obtendremos esta fórmula por cálculo directo en lugar de usar (38). Esto es necesario porque antes de tales cálculos no conocemos las características particulares de las funciones θ_1 y θ_2 ; sólo sabemos que θ_1 y θ_2 existen.

Por ejemplo: Para $z = F(x, y) = 2x^2 - xy + 3y^2$, tenemos

$$\begin{aligned} \Delta z &= F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) \\ &= 2(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)(y + \Delta y) + 3(y + \Delta y)^2 - 2x^2 + xy - 3y^2, \end{aligned}$$

o

$$\Delta z = \Delta x(6x^2 - y) + \Delta y(6y - x) + \Delta x(6x \Delta x + 2\Delta x^2 - \frac{1}{2}\Delta y) + \Delta y(3\Delta y - \frac{1}{2}\Delta x).$$

Aquí $F_x(x, y) = 6x^2 - y$ y $F_y(x, y) = 6y - x$. Si se compara esta expresión de Δz con (38) se observará que:

$$\theta_1(\Delta x, \Delta y) = 6x \Delta x + 2\Delta x^2 - \frac{1}{2}\Delta y, \quad \theta_2(\Delta x, \Delta y) = 3\Delta y - \frac{1}{2}\Delta x,$$

e inmediatamente se verifica que:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \theta_1(\Delta x, \Delta y) = 0, \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \theta_2(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

Las expresiones de θ_1 y θ_2 pueden no ser únicas, para dar un ejemplo de este caso, nótese que en el anterior podíamos haber escrito:

$$\Delta z = \Delta x(6x^2 - y) + \Delta y(6y - x) + \Delta x(6x \Delta x + 2\Delta x^2 - \Delta y) + \Delta y(3\Delta y),$$

donde:

$$\theta_1(\Delta x, \Delta y) = 6x \Delta x + 2\Delta x^2 - \Delta y, \quad \theta_2(\Delta x, \Delta y) = 3\Delta y.$$

Sin embargo, para cualquier expresión permitida de $\theta_1(\Delta x, \Delta y)$ y $\theta_2(\Delta x, \Delta y)$, se satisfacen las igualdades de (39).

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 4 encuentre una fórmula para Δz en términos de $x, y, \Delta x$ y Δy . En cada caso escriba esta fórmula en la misma forma que la igualdad (38); identifique $\theta_1(\Delta x, \Delta y)$ y $\theta_2(\Delta x, \Delta y)$, y para estas identificaciones verifique que las igualdades (39) se satisfacen.

1. $F = \{(x, y; z) \mid z = x^2 + 2xy - y^2\}.$
2. $F = \{(x, y; z) \mid z = x^2 + xy\}.$
3. $F = \{(x, y; z) \mid z = 2x^2 - xy + y^2\}.$
4. $F = \{(x, y; z) \mid z = x^2 + xy + y^2\}.$

5. Para $F = \{(x, y, z; u) \mid u = x^2 - y^2 + xz - z\}$, encuentre una expresión de Δu en términos de $x, y, z, \Delta x, \Delta y$ y Δz . Escriba esta fórmula tomando como base la forma de la igualdad (41); identifique $\theta_1(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, $\theta_2(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, $\theta_3(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, y para estas identificaciones verifique que:

$$\begin{aligned} \lim_{(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \rightarrow (0, 0, 0)} \theta_1(\Delta x, \Delta y, \Delta z) &= \lim_{(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \rightarrow (0, 0, 0)} \theta_2(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \rightarrow (0, 0, 0)} \theta_3(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = 0. \end{aligned}$$

10.7 Derivadas totales. Supóngase que F es una función de dos variables independientes cuyo dominio es la región R :

$$F = \{(x, y; z) \mid z = F(x, y), (x, y) \in R\}.$$

Supóngase además que G y H son funciones de una variable independiente, que tienen como dominio común el intervalo $[a; b]$, y que tienen la propiedad de que el punto (x, y) , para el cual

$$x = G(t), \quad y = H(t), \quad t \in [a; b]$$

es un punto de R . Entonces se deduce que existe una función \bar{F} , tal que:

$$\bar{F}(t) = F[G(t), H(t)], \quad t \in [a; b],$$

esto es:

$$\bar{F} = \{(t, z) \mid z = \bar{F}(t) = F[G(t), H(t)], t \in [a; b]\}.$$

La derivada ordinaria $D_t z = D_t \bar{F}(t)$ (si existe) se llama la **derivada total** de $F(x, y)$ con respecto a t .

Aunque podemos encontrar la derivada total $D_t z$, primero encontrando $\bar{F}(t)$ y después derivando $F(t)$ con respecto a t en forma directa, es más conveniente encontrar $D_t z$ usando la fórmula

$$D_t z = F_x(x, y) D_t x + F_y(x, y) D_t y,$$

que obtendremos a continuación:

Sea t_1 un punto del intervalo $[a; b]$, con la propiedad de que si

$$x_1 = G(t_1), \quad y_1 = H(t_1),$$

entonces el punto (x_1, y_1) es un punto interior de R . Supóngase que G y H son derivables en $[a; b]$ y que F_x y F_y son continuas en una vecindad cerrada N de (x_1, y_1) , donde $N \subseteq R$. Sea Δt cualquier número diferente de cero con la propiedad de que si ponemos:

$$x_1 + \Delta x = G(t_1 + \Delta t), \quad y_1 + \Delta y = H(t_1 + \Delta t),$$

entonces $(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y) \in N$. Si $\Delta z = F(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y) - F(x_1, y_1)$, por el teorema 5:

$$\Delta z = F_x(x_1, y_1) \Delta x + F_y(x_1, y_1) \Delta y + \theta_1(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \theta_2(\Delta x, \Delta y) \Delta y$$

donde:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \theta_1(\Delta x, \Delta y) = 0, \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \theta_2(\Delta x, \Delta y) = 0. \quad (43)$$

Por tanto,

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = F_x(x_1, y_1) \frac{\Delta x}{\Delta t} + F_y(x_1, y_1) \frac{\Delta y}{\Delta t} + \theta_1(\Delta x, \Delta y) \frac{\Delta x}{\Delta t} + \theta_2(\Delta x, \Delta y) \frac{\Delta y}{\Delta t}. \quad (44)$$

De la definición de $D_t z$ sabemos que:

$$D_t z \Big|_{t_1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[F_x(x_1, y_1) \frac{\Delta x}{\Delta t} + F_y(x_1, y_1) \frac{\Delta y}{\Delta t} + \theta_1(\Delta x, \Delta y) \frac{\Delta x}{\Delta t} + \theta_2(\Delta x, \Delta y) \frac{\Delta y}{\Delta t} \right], \quad (45)$$

si este límite existe. Como G y H son derivables en $[a; b]$ son continuas en t_1 (Vea Sec. 3.2), y en consecuencia:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta x = 0, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta y = 0. \quad (46)$$

Sabemos por (43) que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que:

$$|\theta_1(\Delta x, \Delta y) - 0| = |\theta_1(\Delta x, \Delta y)| < \varepsilon$$

para todo $(\Delta x, \Delta y)$ que pertenezca a una vecindad δ de $(0, 0)$, esto es, para todo $(\Delta x, \Delta y)$, tal que $|\Delta x| < \delta$ y $|\Delta y| < \delta$. De acuerdo con (46) para este $\delta > 0$ existe un $\delta_1 > 0$, para el cual

$$|\Delta x| < \delta \quad \text{y} \quad |\Delta y| < \delta$$

si $|\Delta t| > \delta_1$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$, para la cual se cumple:

$$|\theta_1(\Delta x, \Delta y)| < \varepsilon$$

si $|\Delta t| < \delta_1$; esto es:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \theta_1(\Delta x, \Delta y) = 0. \quad (47)$$

En forma similar se deduce que:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \theta_2(\Delta x, \Delta y) = 0. \quad (48)$$

Substituyendo (47) y (48) en (45) tenemos:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = F_x(x_1, y_1) \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + F_y(x_1, y_1) \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Si existen los límites por la derecha. Como G y H son derivables en t_1 , sabemos que:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = D_t G(t) \Big|_{t_1}, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = D_t H(t) \Big|_{t_1},$$

y por tanto:

$$D_t \bar{F}(t) \Big|_{t_1} = D_t z \Big|_{t_1} = F_x(x_1, y_1) D_t G(t) \Big|_{t_1} + F_y(x_1, y_1) D_t H(t) \Big|_{t_1}.$$

Como esta fórmula se verifica para cualquier valor de t_1 para el cual (x_1, y_1) es un punto interior de R , se deduce:

$$D_t \bar{F}(t) = F_x(x, y) D_t G(t) + F_y(x, y) D_t H(t) \quad (49)$$

$$D_t z = F_x(x, y) D_t x + F_y(x, y) D_t y. \quad (50)$$

Hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 7. Sea $F = \{(x, y; z) \mid z = F(x, y)\}$ una función para la cual F_x y F_y sean continuas en todo punto interior de una región R . Si $G = \{(t, x) \mid x = G(t)\}$ y $H = \{(t, y) \mid y = H(t)\}$ son dos funciones derivables en un intervalo $[a; b]$ y (x, y) es un punto interior de R , que cumple:

$$x = G(t), \quad y = H(t), \quad t \in [a; b]$$

entonces la derivada total de $F(x, y)$ con respecto a t , $D_t z$ existe para $t \in [a; b]$ y

$$D_t z = F_x(x, y) D_t x + F_y(x, y) D_t y.$$

Ejemplo 1. Si $z = F(x, y) = x^2 y^2 + 3x - 2y$; $x = e^t$, $y = \sin t$: (a) Encuentre $D_t z$, usando la fórmula (50). (b) Obtenga una fórmula para $\bar{F}(t)$. (c) Usando esta fórmula, encuentre que $D_t z = D_t \bar{F}(t)$.

Solución. (a) Aquí:

$$F_x(x, y) = 2x^2 y^2 + 3, \quad F_y(x, y) = 2x^2 y - 2; \quad D_t x = e^t, \quad D_t y = \cos t.$$

Sustituyendo en (50), obtenemos:

$$D_t z (3x^2 y^2 + 3)e^t + (2x^3 y - 2) \cos t.$$

Al combinar este resultado con las igualdades $x = e^t$, $y = \sin t$, podemos expresar $D_t z$ en términos de t . Encontramos que:

$$D_t z = 3e^{2t} \sin^2 t + 3e^t + 2e^{2t} \sin t \cos t - 2 \cos t.$$

(b) Al combinar las igualdades dadas $z = F(x, y) = x^3 y^2 + 3x - 2y$, $x = e^t$, $y = \sin t$, obtenemos:

$$z = F(e^t, \sin t) = e^{3t} \sin^2 t + 3e^t - 2 \sin t = \bar{F}(t).$$

(c) Al derivar tenemos:

$$D_t z = D_t \bar{F}(t) = e^{3t} \cdot 2 \sin t \cos t + 3e^{2t} \sin^2 t + 3e^t - 2 \cos t.$$

El argumento que conduce al desarrollo de la fórmula (50) se puede generalizar a funciones de más de dos variables independientes. Entonces para

$$u = F(x, y, z), \quad x = G_1(t), \quad y = G_2(t), \quad z = G_3(t),$$

tenemos, bajo condiciones adecuadas (extensiones de las condiciones del teorema 7) al usar (41), que:

$$D_t u = F_x(x, y, z) D_t x + F_y(x, y, z) D_t y + F_z(x, y, z) D_t z. \quad (51)$$

En forma semejante, si

$$w = F(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{y} \quad x_i = G_i(t),$$

entonces

$$D_t w = \sum_{i=1}^n F_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) D_t x_i \quad (52)$$

donde

$$F_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) = D_{x_i} F(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

y el segundo miembro de (52) es la suma de n términos, uno para cada una de las variables x_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Dada $z = F(x, y)$, donde $x = G(t)$, $y = H(t)$, entonces $z = F[G(t), H(t)]$; si interpretamos a t como el tiempo, la fórmula (50) nos da la razón de cambio de z con respecto al tiempo. En forma similar, dada $u = F(x, y, z)$ donde $x = G_1(t)$, $y = G_2(t)$, $z = G_3(t)$, entonces $u = F[G_1(t), G_2(t), G_3(t)]$, y si interpretamos t como el tiempo, la fórmula (51) nos da la razón de cambio de u con respecto al tiempo.

Ejemplo 2. Un sólido rectangular de acero se enfría. Cuando el tiempo es t_0 las dimensiones son 6, 4, 2 cm. El enfriamiento causa una contracción en las aristas de 0.06, 0.04 y 0.02 cm. por hora. Encuentre la razón de cambio del volumen con respecto al tiempo en t_0 .

Solución. Sean x, y, z las dimensiones y $V(x, y, z) = xyz$ el volumen del sólido en el tiempo t . Supóngase la existencia de las funciones derivables G_1, G_2 y G_3 , tales que:

$$x = G_1(t), \quad y = G_2(t), \quad z = G_3(t),$$

y póngase

$$V[G_1(t), G_2(t), G_3(t)] = \bar{V}(t).$$

Entonces por (51)

$$D_t \bar{V}(t) = yz D_t x + xz D_t y + xy D_t z,$$

y en consecuencia,

$$D_t \bar{V}(t) \big|_{t_0} = (4)(2)(-0.06) + (6)(2)(-0.04) + (6)(4)(-0.02) \\ = -1.44 \text{ cm. cúbicos por hora.}$$

El signo negativo en la respuesta indica que el volumen está decreciendo en el tiempo t_0 .

Si $z = F(x, y)$ y $y = G(x)$, entonces

$$z = F[x, G(x)] = \bar{F}(x).$$

Podemos encontrar $D_x \bar{F}(x)$, la derivada total de $F(x, y)$ con respecto a x , al tomar $t = x$ en la fórmula (50). Ya que $D_x(x) = 1$, donde tenemos:

$$D_x z = F_x(x, y) + F_y(x, y) D_x y. \quad (53)$$

Es importante entender el significado de cada una de las derivadas que aparecen en (53). $F_x(x, y)$ es la derivada parcial de $F(x, y)$ con respecto a x ; $F_y(x, y)$ es la derivada parcial de $F(x, y)$ con respecto a y , y $D_x y$ es la derivada ordinaria de $y = G(x)$ con respecto a x . Finalmente, $D_x z$ es la derivada total de $F(x, y)$ con respecto a x .

Ejemplo 3. Si $F(x, y) = 4x^2 + 9y^2$ y $y = x^2$, encuentre $F_x(x, y)$ y $F_y(x, y)$; $D_x y$ y $D_x \bar{F}(x)$.

Solución. Aquí $F_x(x, y) = 8x$, $F_y(x, y) = 18y$ y $D_x y = 2x$. Usando (53) obtenemos:

$$D_x \bar{F}(x) = 8x + 18y(2x) = 8x + 36x^3.$$

Como verificación de este resultado, encontramos directamente de las igualdades dadas que:

$$F(x, x^2) = 4x^2 + 9x^4 = \bar{F}(x).$$

Entonces,

$$D_x \bar{F}(x) = 8x + 36x^3.$$

Si $z = F(x, y)$ y $x = G(t)$, $y = H(t)$, entonces $D_t z$, la derivada total de $F(x, y)$ con respecto a t , tiene una útil e interesante interpretación. En el plano xy , el par de ecuaciones

$$x = G(t), \quad y = H(t), \quad t \in [t_1; t_2] \quad (54)$$

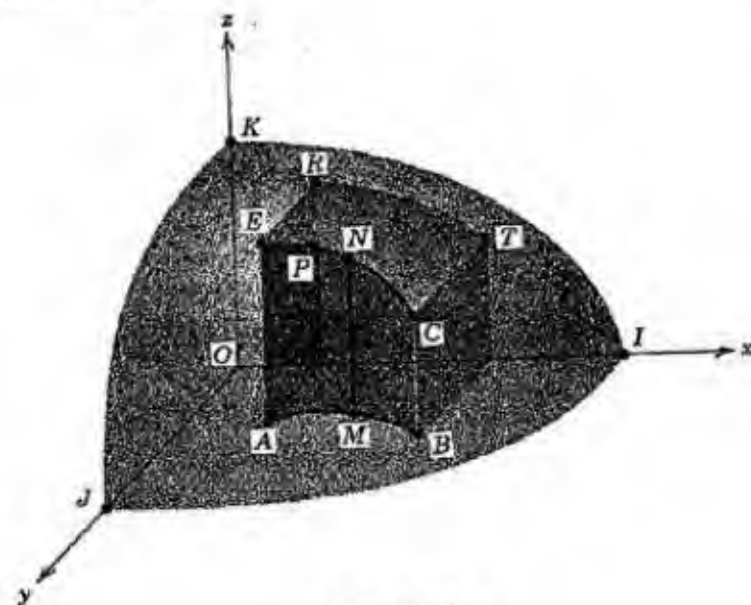


Fig. 10.12

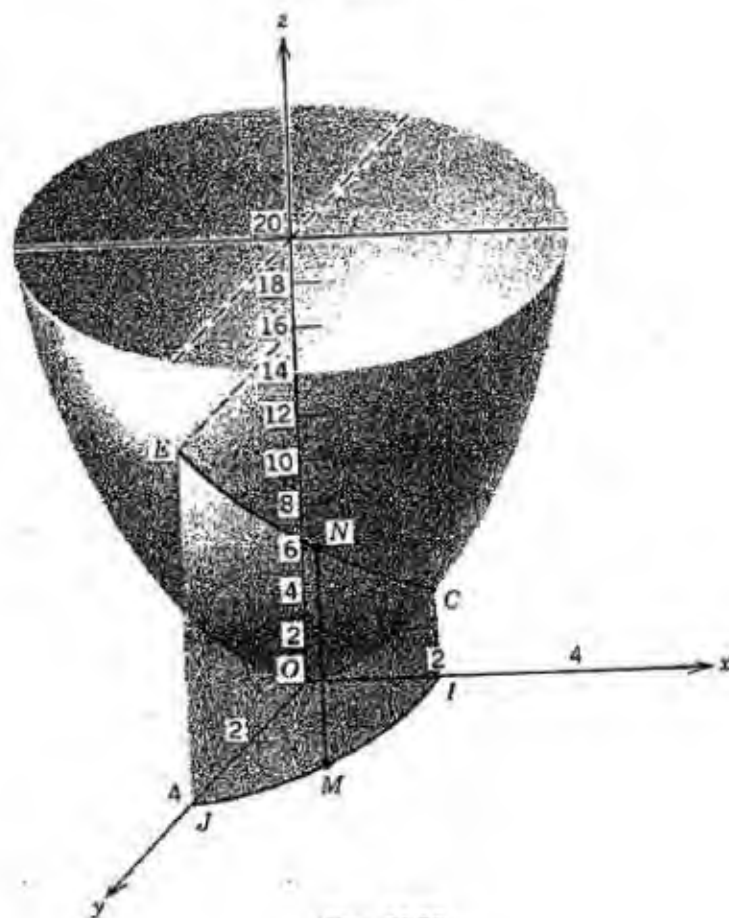


Fig. 10.13

es una representación paramétrica de una curva como la AMB en la Fig. 10.12. En el espacio-3 el par de ecuaciones (54) es una representación paramétrica de una superficie, la superficie cuya gráfica es el conjunto:

$$\{(x, y, z) \mid x = G(t), y = H(t), t \in [t_1; t_2]\}. \quad (55)$$

Esto es, una superficie cilíndrica cuyos elementos son paralelos al eje z . En la Fig. 10.12 $ABCE$ representa una parte de esta superficie. La gráfica de $z = F(x, y)$ es una superficie en el espacio-3 como la superficie IJK de la Fig. 10.12.

El conjunto de ecuaciones:

$$x = G(t), \quad y = H(t), \quad z = F[G(t), H(t)], \quad t \in [t_1; t_2]$$

es una representación paramétrica en el espacio-3 de la curva de intersección de la gráfica de $z = F(x, y)$ y la superficie cilíndrica que es la gráfica de (55). Esto, es, el punto $P(x, y, z)$ donde

$$x = G(t), \quad y = H(t), \quad z = F[G(t), H(t)], \quad t \in [t_1; t_2],$$

está en la curva CNE de la Fig. 10.12. Por tanto, $D_t z$, la derivada total de $F(x, y)$ con respecto a t , es la razón de cambio de la coordenada z del punto $P(x, y, z)$ con respecto a t cuando el punto P se mueve sobre la curva CNE .

Ejemplo 4. Si $z = F(x, y) = x^2 + y^2$, $x = 2 - \frac{1}{2}t$, $y = 2t^{1/2}$, encuentre $D_t z$ para $t = 2$ e interprete este resultado geoméricamente.

Solución. Aquí $F_x(x, y) = 2x$ y $F_y(x, y) = 2y$, $D_t x = -\frac{1}{2}$ y $D_t y = 1/t^{1/2}$. Usando (50) obtenemos:

$$D_t z = 2x \left(-\frac{1}{2}\right) + 2y \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Para $t = 2$ encontramos que $x = 1$, $y = 2\sqrt{2}$ y, en consecuencia, $D_t z|_{t=2} = -1 + 4 = 3$.

Para $t = 0$, el punto cuyas coordenadas están dadas por $x = 2 - \frac{1}{2}t$, $y = 2t^{1/2}$, $z = x^2 + y^2$ es $C(2, 0, 4)$; véase Fig. 10.13. Usando la expresión para $D_t z$ y las igualdades $x = 2 - \frac{1}{2}t$, $y = 2t^{1/2}$, encontramos que $D_t z = \frac{1}{2}t + 2$, y este resultado implica que $D_t z > 0$ para $t \in [0; 4]$.

Esto es la coordenada z de un punto en la curva intersección CNE de la superficie determinada por $x = 2 - \frac{1}{2}t$, $y = t^{1/2}$ y la superficie con ecuación $z = x^2 + y^2$ aumenta cuando t aumenta dentro del intervalo $[0; 4]$.

Obsérvese que cuando t aumenta en el intervalo $[0; 4]$, el punto $P(x, y, z)$ se mueve sobre la curva CNE de $C(2, 0, 4)$ a $E(0, 4, 16)$. La razón de cambio de z con respecto a t en $N(1, 2\sqrt{2}, 9)$ es $D_t z|_2 = 3$.

EJERCICIOS

En los ejercicios del 1 al 4 encuentre la derivada total $D_t z$: (a) Use la fórmula (50); (b) Derive directamente $z = F(t)$. En cada caso exprese $D_t z$ en función de t .

1. $z = x^2 + y^2$; $x = \sin t$, $y = \cos t$.
2. $z = x^2 - 2xy + 4y^2$; $x = \cos t$, $y = \sin t$.
3. $z = e^x \sin y + e^y \sin x$; $x = \frac{1}{2}t$, $y = 2t$.
4. $z = e^x \sin y$; $x = \ln t$, $y = t^2$.

En cada uno de los ejercicios del 5 al 12 encuentre la derivada total $D_t z$.

5. $z = x \ln y$; $x = t^2$, $y = \sqrt{1 - 3t}$.
6. $z = \ln(x - y)$; $x = a \cos t$, $y = a \sin t$.
7. $z = \arctan(y/x)$; $x = a \cos t$, $y = a \sin t$.
8. $z = x^2 + 2xy$; $x = \ln t$, $y = e^t$.
9. $z = \cos(x^2 + y^2)$; $x = 3t$, $y = e^t$.
10. $z = \arctan(x/y)$; $x = \ln t$, $y = e^t$.
11. $z = \sin(xy) - x \sin y$; $x = e^t$, $y = te^t$.
12. $z = \ln(x^2 - y^2)$; $x = a \cos t$, $y = a \sin t$.
13. Si $u = xyz$ y $x = e^t$, $y = \ln t$, $z = t^2$, encuentre $D_t u$ en función de t .

En los ejercicios del 14 al 19 encuentre la derivada total $D_t u$.

14. $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z}$; $x = 2t$, $y = \frac{1}{t}$; $z = t^2$.
15. $u = \sin(x + y + z)$; $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = t^2$.
16. $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$; $x = \frac{1}{t}$, $y = \frac{1}{t^2}$, $z = \frac{1}{t^3}$.
17. $u = x \cos z - y \cos z$; $x = \sin 2t$, $y = \cos 2t$, $z = 2t$.
18. $u = x^2 + y^2 + z^2$; $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$.
19. $u = 2xy + 5z$; $x = 2t$, $y = t$, $z = t^2$.

20. La base de una pieza rectangular de metal tiene 15 cm de largo y 10 cm de altura. Si la longitud de la base está aumentando a razón de 0.03 cm por hora y la altura aumenta a razón de 0.02 cm por hora, ¿Cuál es la razón del cambio del área?

21. La presión, el volumen y la temperatura absoluta de una masa de aire son respectivamente 20 kg por centímetro cuadrado, 30 cm cúbicos y 303°. Si la temperatura está subiendo a razón de 0.2° por segundo y el volumen aumenta a razón de 0.4 cm cúbicos por segundo, encuentre la razón de cambio de la presión con respecto al tiempo.

22. La longitud, la anchura y la altura de un paralelepípedo rectangular están aumentando a razón de 2, 1 y 0.5 cm por minuto, respectivamente. Encuentre la razón de cambio del volumen y superficie con respecto al tiempo, cuando la longitud, la anchura y la altura son 15, 8 y 6 cm respectivamente.

23. El radio de la base de un cono circular recto, está aumentando a razón de 0.5 cm por minuto, y la altura está decreciendo a razón de 1 cm por minuto. ¿Está el volumen aumentando o decreciendo cuando el radio y la altura son 10 y 22 cm? ¿A qué razón aumenta o disminuye?

En cada uno de los ejercicios del 24 al 27 encuentre la derivada total $D_x z$.

a) Usando la fórmula (53); (b) derive directamente $z = F(x)$. Exprese el resultado en función de x .

24. $z = \ln(x^2 + y^2)$; $y = \sin x$.
25. $z = y^2 + 2x$; $y = 2x$.

$$26. z = x^2 - y^2; y = \tan x.$$

$$27. z = \frac{1}{2} \sqrt{36 - x^2 - 4y^2}; y = x^2.$$

28. Un punto $P(x, y, z)$ se mueve sobre la curva de intersección de las gráficas $z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$, $x = 2 \sin t$, $y = -3 + 7 \cos t$, donde t representa tiempo. Encuentre la razón de cambio de la coordenada z con respecto al tiempo en el punto $(2, -3, 6)$.

29. Si $u = F(x, y, z)$, $x = x$, $y = G(x)$, $z = H(x)$, Demuestre que

$$D_x u = F_x(x, y, z) + F_y(x, y, z) D_x y + F_z(x, y, z) D_x z$$

es un caso particular de la fórmula (51).

30. Si $u = e^x(y - z)$, $y = \sin x$, $z = \cos x$, use el resultado del ejercicio 29 para encontrar $D_x u$.

31. Si $u = xy + yz + zx$, $y = e^x$ y $z = \sin x$, encuentre $D_x u$.

10.8 Derivada direccional. Supóngase que $z = F(x, y)$ es una ecuación de una superficie, y sea $P(x_1, y_1, z_1)$ un punto de esta superficie. Supóngase que $PRQS$ de la Fig. 10.14 representa una parte de esta superficie. A través del punto $M(x_1, y_1, 0)$ en el plano xy , constrúyase una línea dirigida MC que forma un ángulo positivo θ con la parte positiva del eje x . ($0 \leq \theta < 360^\circ$). El conjunto de ecuaciones.

$$x = x_1 + t \cos \theta, \quad y = y_1 + t \sin \theta, \quad z = 0$$

es una representación paramétrica de la línea MC . El plano $MGQP$, perpendicular al plano xy a través de la línea MC , intersecta a la superficie $PRQS$ en la curva C , que tiene por representación paramétrica:

$$x = x_1 + t \cos \theta, \quad y = y_1 + t \sin \theta, \quad z = F(x_1 + t \cos \theta, y_1 + t \sin \theta). \quad (56)$$

Para z dada por (56) podemos calcular [usando 50] la derivada total de z con respecto a t :

$$D_t z = F_x(x_1 + t \cos \theta, y_1 + t \sin \theta) \cos \theta + F_y(x_1 + t \cos \theta, y_1 + t \sin \theta) \sin \theta.$$

Este resultado expresa la razón de cambio de la coordenada z del punto $A(x, y, z)$ con respecto a t cuando A se mueve sobre la curva C (véase Sec. 10.7). Al valor de $D_t z$ cuando $t = 0$ se le llama la **derivada direccional** de z en (x_1, y_1) en la dirección θ y se representa $\mathcal{D}_{(\theta)} z$:

$$\mathcal{D}_{(\theta)} z = F_x(x_1, y_1) \cos \theta + F_y(x_1, y_1) \sin \theta. \quad (57)$$

Nótese que si $\theta = 0$ tenemos $\cos \theta = 1$, $\sin \theta = 0$, y por (57) vemos que $\mathcal{D}_{(0)} z = F_x(x_1, y_1)$. En forma similar, encontramos que $\mathcal{D}_{(\pi/2)} z = F_y(x_1, y_1)$. En otras palabras, las derivadas direccionales de $z = F(x, y)$ en (x_1, y_1) en las direcciones del eje x y del eje y , son $F_x(x_1, y_1)$ y $F_y(x_1, y_1)$, respectivamente. Por tanto, las derivadas direccionales son generalizaciones de las derivadas parciales.

De los resultados de la Sec. 9.9 recordamos que la línea tangente PT a la curva C en $P(x_1, y_1, z_1)$ es la línea que pasa por P y tiene números directores

$$D_x z \Big|_{t=0}, \quad D_y z \Big|_{t=0}, \quad D_z z \Big|_{t=0}.$$

* Nótese que este plano tiene por ecuación $y - y_1 = (x - x_1) \tan \theta$.

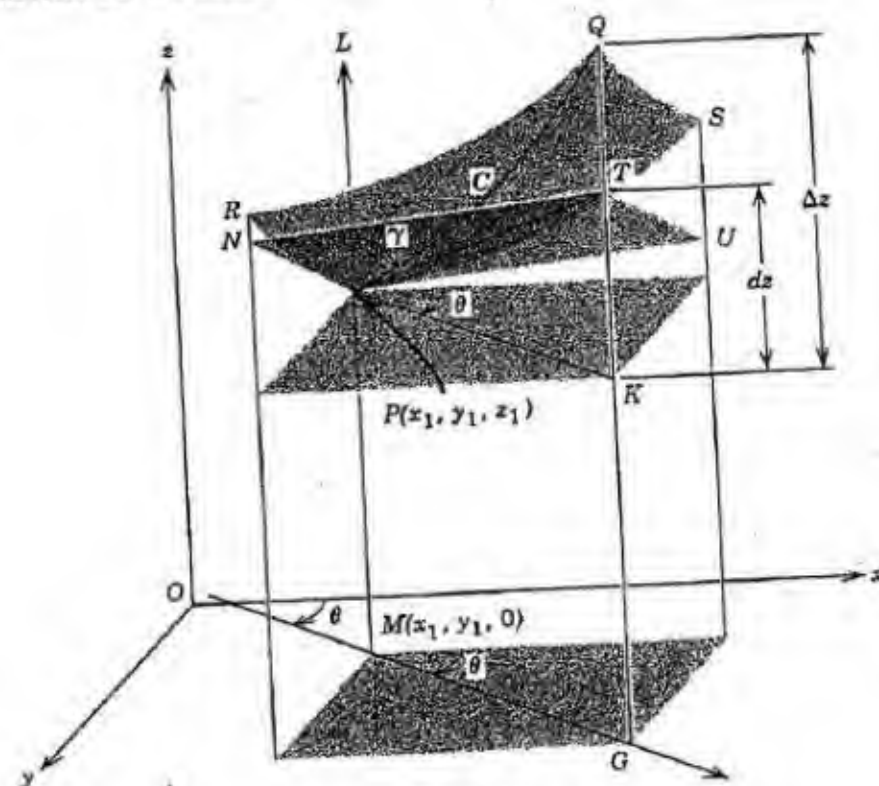


Fig. 10.14

Para la curva C , definida por (56), tenemos:

$$D_x z|_{t=0} = \cos \theta, \quad D_y z|_{t=0} = \sin \theta, \quad D_z z|_{t=0} = D_{(0)} z,$$

así, si α , β y γ son los ángulos directores de la tangente (dirigida) PT , tenemos:

$$\cos \gamma = \frac{D_{(0)} z}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + (D_{(0)} z)^2}} = \frac{D_{(0)} z}{\sqrt{1 + (D_{(0)} z)^2}},$$

y ya que $0 \leq \gamma < 180^\circ$

$$\sin \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = \frac{1}{\sqrt{1 + (D_{(0)} z)^2}}.$$

De estas igualdades se deduce que:

$$D_{(0)} z = \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} = \cot \gamma.$$

Ejemplo 1. Sea la curva C la intersección del paraboloide elíptico con ecuación

$$z = F(x, y) = x^2 + \frac{1}{4}y^2$$

y el plano con ecuación $y = x$. Encuentre $\cot \gamma$ para la tangente a C en el punto $(2, 2, 5)$, en la dirección $\pi/4$. Indique sobre una gráfica la parte del paraboloide

que está en el primer octante; dibuje la curva C , e indique la línea tangente PT para la cual calculamos $\cot \gamma$.

Solución. Si $F(x, y) = x^2 + \frac{1}{4}y^2$: tenemos

$$F_x(x, y) = 2x, \quad F_y(x, y) = \frac{1}{2}y,$$

y así

$$F_x(2, 2) = 4, \quad F_y(2, 2) = 1.$$

Usando (57) con $\theta = \pi/4$, $\cos \theta = 1/\sqrt{2}$, $\sin \theta = 1/\sqrt{2}$, tenemos que en $(2, 2)$:

$$D_{(\pi/4)} z = 4 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{5}{\sqrt{2}},$$

por tanto, $\cot \gamma = 5/\sqrt{2}$.

La gráfica pedida está en la Fig. 10.15. El valor de la derivada direccional de $z = F(x, y)$ en (x_1, y_1) dado por (57) depende del ángulo θ . En general, existe al menos un valor de θ para el cual la derivada direccional en (x_1, y_1) tiene un valor máximo. Supóngase que θ_1 es un valor de θ que hace que la derivada direccional de $z = F(x, y)$ en (x_1, y_1) sea máxima y sea Π el plano perpendicular al plano xy que pasa por la línea con ecuaciones:

$$x = x_1 + t \cos \theta_1, \quad y = y_1 + t \sin \theta_1, \quad z = 0.$$

(El plano Π forma un ángulo θ_1 con el plano xy). Entonces la curva C con ecuaciones:

$$x = x_1 + t \cos \theta_1, \quad y = y_1 + t \sin \theta_1, \quad z = F(x_1 + t \cos \theta_1, y_1 + t \sin \theta_1),$$

que es la intersección del plano Π y la superficie con ecuación $z = F(x, y)$, tiene una tangente en $P(x_1, y_1, z_1)$ cuyo ángulo director γ_1 es menor que o igual al ángulo direccional γ_2 de la línea tangente a cualquier otra curva (que pase por P) y que sea la intersección de la superficie con ecuación $z = F(x, y)$ y un plano que pase por P , perpendicular al plano xy .

Ejemplo 2. Encuentre el valor del ángulo θ que hace que la derivada direccional de $z = x^2 + \frac{1}{4}y^2$ en $(2, 2)$ sea máxima, y encuentre asimismo este valor máximo. Encuentre una ecuación del plano vertical (el plano perpendicular al plano xy) que pasa por $(2, 2, 0)$ para este valor de θ . Construya la gráfica de $z = x^2 + \frac{1}{4}y^2$, y sobre ella indique la curva C que pasa por $P(2, 2, 5)$ y cuya tangente en P tiene ángulo director γ , para el cual $\cot \gamma$ es el valor máximo de la derivada direccional.

Solución. Por el ejemplo 1 sabemos que

$$D_{(\theta)} z = 4 \cos \theta + \sin \theta.$$

Por conveniencia establecemos:

$$G(\theta) = 4 \cos \theta + \sin \theta.$$

Para encontrar el valor de θ que hace que $G(\theta)$ sea máxima, calculamos $D_\theta G(\theta)$.

$$D_\theta G(\theta) = -4 \sin \theta + \cos \theta.$$

Igualando la derivada a cero, obtenemos:

$$-4 \sin \theta + \cos \theta = 0, \text{ o } \tan \theta = \frac{1}{4}.$$

Existen dos posibles valores de θ ; uno en el primer cuadrante, digamos θ_1 y otro en el tercer cuadrante, digamos θ_2 , que hacen $\tan \theta = \frac{1}{4}$. Para el valor de θ_1 :

$$\tan \theta_1 = \frac{1}{4}, \quad \sin \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}, \quad \cos \theta_1 = \frac{4}{\sqrt{17}};$$

Para el valor θ_2 :

$$\tan \theta_2 = \frac{1}{4}, \quad \sin \theta_2 = -\frac{1}{\sqrt{17}}, \quad \cos \theta_2 = -\frac{4}{\sqrt{17}}.$$

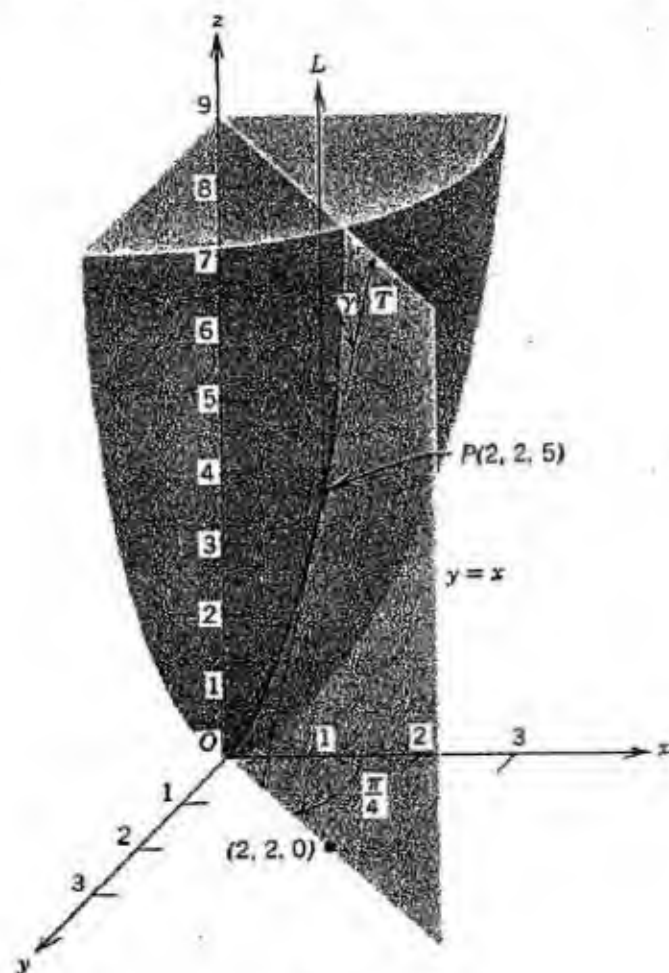


Fig. 10.15

(Vea Fig. 10.16). Para determinar cual de los valores de θ_1 y θ_2 hace máxima la derivada direccional, encontramos la segunda derivada,

$$D_{\theta}^2 G(\theta) = -4 \cos \theta - \sin \theta.$$

Observamos, que esta segunda derivada es negativa para θ_1 y positiva para θ_2 , por tanto $\theta_1 = \arctan \frac{1}{4}$ es la dirección que hace que la derivada direccional sea máxima.

Para esta dirección:

$$D_{(\theta_1)} z = 4 \frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}.$$

Una ecuación del plano vertical que pasa por $(2, 2, 0)$ y cuya intersección con el plano xy hace un ángulo $\theta_1 = \arctan \frac{1}{4}$ con el eje x es

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 2) \quad \text{ó} \quad x - 4y + 6 = 0.$$

Este plano y la curva C que es la intersección con la superficie dada, se muestran en la Fig. 10.17.

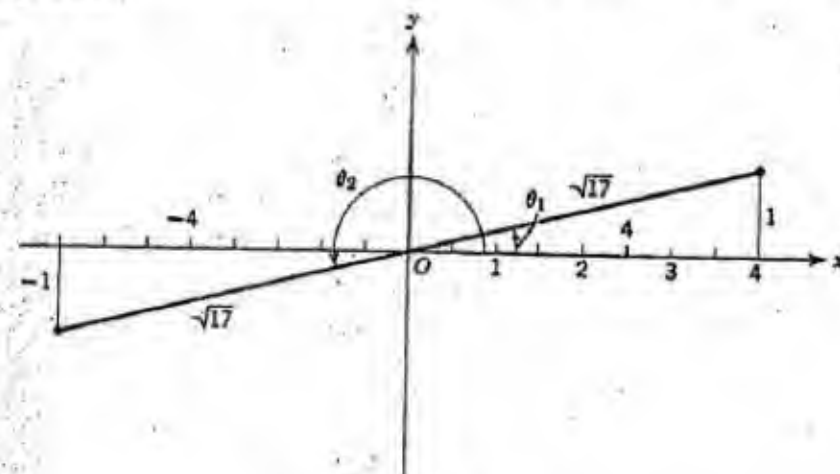


Fig. 10.16

Usando el concepto de derivada direccional, podemos demostrar el teorema citado en la Sec. 10.4 para justificar la definición de plano tangente a una superficie en un punto dado.

Teorema 8. Sea $F = \{(x, y, z) \mid z = F(x, y)\}$ una función con F_x y F_y continuas en alguna vecindad de (x_1, y_1) y sea $z_1 = F(x_1, y_1)$. Para un valor dado de θ , sea la curva C la intersección de la gráfica de $z = F(x, y)$ y el plano vertical Π con ecuación.

$$y - y_1 = (x - x_1) \tan \theta. \quad (58)$$

Entonces para cada curva C así definida la línea tangente PT a C en $P(x_1, y_1, z_1)$ está en el plano tangente τ con ecuación

$$z - z_1 = F_x(x_1, y_1)(x - x_1) + F_y(x_1, y_1)(y - y_1). \quad (59)$$

Demostración. Es obvio que el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ pertenece a los planos Π y τ . Consideramos el punto $V(x_2, y_2, z_2)$ donde

$$x_2 = x_1 + \cos \theta, \quad y_2 = y_1 + \sin \theta, \quad z_2 = z_1 + D_{(\theta)} z.$$

Al sustituir las coordenadas de V en (58) encontramos que V pertenece al plano π . La condición para que V pertenezca al plano tangente τ es que

$$x_2 - x_1 = F_x(x_1, y_1)(x_2 - x_1) + F_y(x_1, y_1)(y_2 - y_1).$$

Por hipótesis

$$x_2 - x_1 = \cos \theta, \quad y_2 - y_1 = \sin \theta, \quad z_2 - z_1 = \mathcal{D}_{(\theta)} z.$$

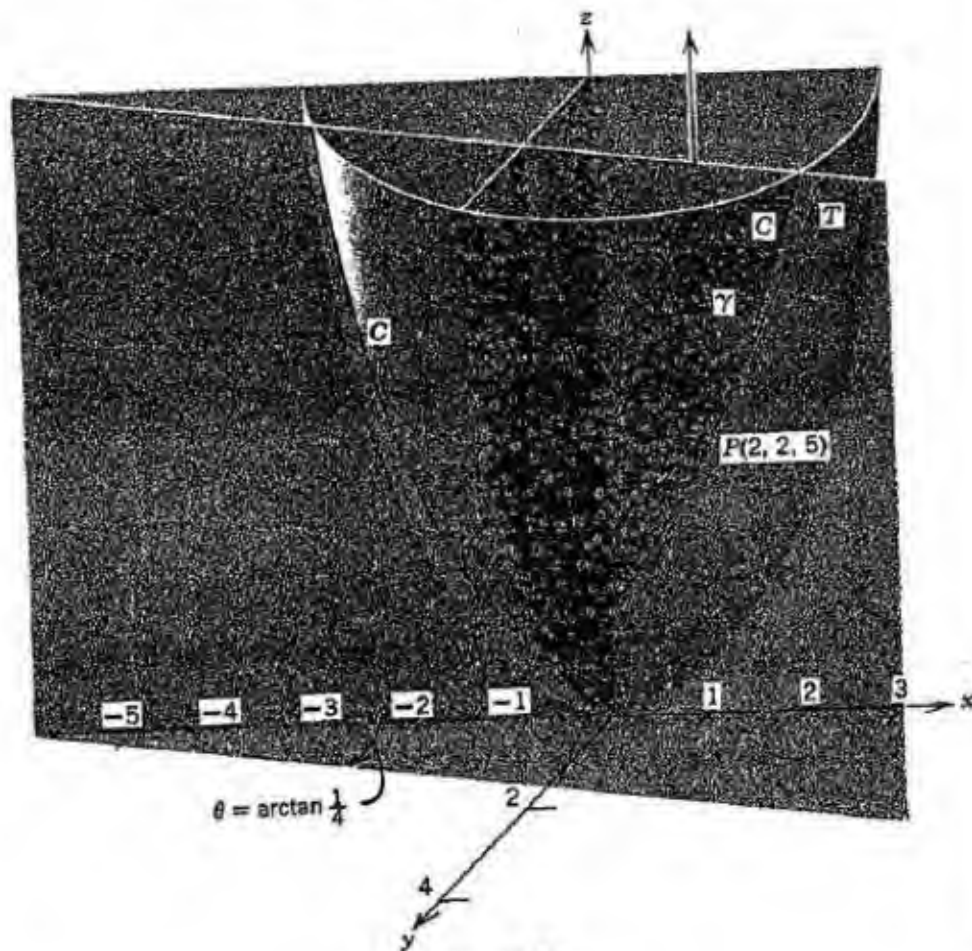


Fig. 10.17

Esta condición es equivalente al requisito de que

$$\mathcal{D}_{(\theta)} z = F_x(x_1, y_1) \cos \theta + F_y(x_1, y_1) \sin \theta.$$

Por (57) vemos que esta proposición es verdadera, y que por tanto V pertenece al plano tangente τ . Queda por demostrar que la línea PV es la tangente PT a la curva C en $P(x_1, y_1, z_1)$. Note que un conjunto de números directores para la línea PV es

$$x_2 - x_1 = \cos \theta, \quad y_2 - y_1 = \sin \theta, \quad z_2 - z_1 = \mathcal{D}_{(\theta)} z.$$

En la figura 10.14 si representamos por (x_2, y_2, z_2) las coordenadas de un punto T de la recta tangente PT y por d la distancia de P a T , vemos que:

$$\frac{x_2 - x_1}{d} = \cos \theta, \quad \frac{y_2 - y_1}{d} = \sin \theta, \quad \frac{z_2 - z_1}{d} = \cot \gamma = \mathcal{D}_{(\theta)} z.$$

de donde se deduce que $\cos \theta$, $\sin \theta$ y $\mathcal{D}_{(\theta)} z$ es también un conjunto de números directores de la línea PT . En consecuencia como PT y PV son rectas que tienen un punto en común P y un conjunto de números directores comunes, ambas rectas coinciden, y hemos demostrado que para cualquier valor dado de θ la tangente PT a la curva C en P pertenece al plano tangente τ . ■

EJERCICIOS

1. Encuentre $\cot \gamma$ para la tangente a la curva de intersección C de la gráfica de $z = x^2 + \frac{1}{2}y^2$.

- (a) Con la gráfica de $y = 2$, en el punto $(1, 2, 2)$, en la dirección $\theta = 0$;
- (b) Con la gráfica de $x = 1$, en el punto $(1, 2, 2)$, en la dirección $\pi/2$;
- (c) Con la gráfica de $y = x + 1$, en el punto $(1, 2, 2)$, en la dirección $\pi/4$.

2. Encuentre el valor del ángulo θ que hace que la derivada direccional de $z = x^2 + \frac{1}{2}y^2$ en $(1, 2)$ sea máxima; encuentre este valor máximo.

3. Encuentre $\cot \gamma$ para la tangente a la curva de intersección C de la gráfica de $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

- (a) Con la gráfica de $y = 3$, en el punto $(3, 3, \sqrt{7})$, en la dirección π ;
- (b) Con la gráfica de $x = 3$, en el punto $(3, 3, \sqrt{7})$, en la dirección $3\pi/2$;
- (c) Con la gráfica de $y = x$, en el punto $(3, 3, \sqrt{7})$, en la dirección $5\pi/4$.

4. Construya la parte de la gráfica de $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ que está en el primer octante.

Indique sobre esta gráfica las curvas especificadas en el ejercicio 3, (a), (b) y (c), y la tangente a cada una de estas curvas en el punto $(3, 3, \sqrt{7})$, en la dirección fijada.

5. (a) Encuentre el valor del ángulo θ que hace que la derivada direccional de $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ en $M(1, 2)$ sea máxima; obtenga este valor máximo. Construya la parte de la gráfica de $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ que está en el primer octante, e indique sobre esta gráfica la curva C que pasa por $P_1(1, 2, \sqrt{7})$ para la cual $\cot \gamma$ es igual al valor máximo de la derivada direccional.

(b) ¿Cuál es el valor de θ que hace que la derivada direccional de $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ en $M(1, 2)$ sea mínima, cuál es el valor de este mínimo?

6. Encuentre $\cot \gamma$ para la tangente a la curva de intersección C de la gráfica de $x^2 + y^2 + z^2 = 13$.

- (a) Con la gráfica de $y = 1$, en el punto $(2, 1, \sqrt{8})$, en la dirección 0 ;
- (b) Con la gráfica de $x = -2$, en el punto $(-2, 1, \sqrt{8})$, en la dirección $3\pi/2$;
- (c) Con la gráfica de $y = 2x$, en el punto $(1, 2, \sqrt{8})$, en la dirección $\arctan 2$.

7. Si $z = 64 - x^2 - y^2$, encuentre la dirección que se debe seguir partiendo de $(3, 4)$ para que z tenga la razón de incremento máxima.

8. (a) Encuentre la derivada direccional de $z = x^2 - y^2$ en $(3, -1)$, en la dirección $\theta = 45^\circ$.

(b) Encuentre el valor máximo de la derivada direccional de $z = x^2 - y^2$ en $(3, -1)$.

9. (a) Encuentre la derivada direccional de $z = x^2y$ en $(1, 2)$, en la dirección $\theta = 150^\circ$.

(b) Encuentre el valor máximo de la derivada direccional de $z = x^2y$ en $(1, 2)$.

10.9 Diferenciales. En la Secc. 3.14 al referirnos a la función $F = \{(x, y) | y = F(x)\}$ se definió el término $F'(x) \Delta x$ de la igualdad

$$\Delta y = F'(x) \Delta x + \theta(\Delta x) \Delta x,$$

donde $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \theta(\Delta x) = 0$ como el diferencial de y , y se representó como dy :

$$dy = F'(x) \Delta x.$$

En forma semejante, usando la función $F = \{(x, y; z) | z = F(x, y)\}$ definiremos la suma de los dos primeros términos en la igualdad [vea (38) en la Sec. 10.6]

$$\Delta z = F_x(x, y) \Delta x + F_y(x, y) \Delta y + \theta_1(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \theta_2(\Delta x, \Delta y) \Delta y, \quad (60)$$

donde

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \theta_1(\Delta x, \Delta y) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \theta_2(\Delta x, \Delta y) = 0; \quad (61)$$

como la **diferencial** de z , y la representaremos por dz :

$$dz = F_x(x, y) \Delta x + F_y(x, y) \Delta y. \quad (62)$$

Δx y Δy en la igualdad (60) son números con la propiedad de que $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ pertenece al dominio de F . Como en la Sec. 3.13 llamaremos a Δx *incremento de x* a Δy , *incremento de y* y a Δz *incremento de z* el que corresponde a los incrementos Δx de x y Δy de y . Las funciones F_x y F_y deben ser continuas en alguna vecindad cerrada de (x, y) para que la fórmula (60) se verifique.

Consideremos las siguientes funciones de x y y

$$I = \{(x, y; z) | z = x\} \quad \text{para el que} \quad I(x, y) = x$$

$$\text{y} \quad J = \{(x, y; z) | z = y\} \quad \text{para el que} \quad J(x, y) = y.$$

hora bien $I_x(x, y) = 1$, $I_y(x, y) = 0$; $J_x(x, y) = 0$, $J_y(x, y) = 1$.

Usando (62) y estos valores obtenemos

$$dx = \Delta x \quad \text{y} \quad dy = \Delta y.$$

Por tanto, cuando x y y son variables independientes, podemos escribir (62) en la forma

$$dz = F_x(x, y) dx + F_y(x, y) dy. \quad (63)$$

Si F es una función de dos variables independientes el segundo miembro de la igualdad (63) contiene 4 variables independientes, x, y, dx (ó Δx) y dy (ó Δy) su-

jetas a la restricción de que (x, y) y $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ pertenezcan al dominio de F .

En forma semejante, si $F = \{(x, y, z; u) | u = F(x, y, z)\}$ definiremos la suma de los tres primeros términos en la igualdad (35) de la Sec. 10.6 como la **diferencial** de u , y la representaremos por du :

$$du = F_x(x, y, z) \Delta x + F_y(x, y, z) \Delta y + F_z(x, y, z) \Delta z. \quad (64)$$

Como en el caso de la fórmula (62), para cada una de las variables independientes la diferencial es igual al incremento (si x, y y z son las variables independientes, $dx = \Delta x, dy = \Delta y, dz = \Delta z$), y podemos escribir (64) como

$$du = F_x(x, y, z) dx + F_y(x, y, z) dy + F_z(x, y, z) dz. \quad (65)$$

Esta fórmula se puede extender a funciones de n variables independientes. Si $w = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, donde x_1, x_2, \dots, x_n son las variables independientes, la diferencial dw está dada por:

$$dw = \sum_{i=1}^n F_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i \quad (66)$$

donde el segundo miembro de (66) es la suma de n términos, uno por cada una de las n variables $x_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Recordemos de la Sec. 3.14 que si $F = \{(x, y) | y = F(x)\}$ es una función de la variable independiente x , entonces:

$$dy = D_y dx. \quad (67)$$

Supongamos que:

$$F = \{(x, y; z) | z = F(x, y), (x, y) \in R\}$$

y que

$$x = G(t), \quad y = H(t),$$

por lo cual

$$z = F[G(t), H(t)] = \bar{F}(t).$$

Entonces \bar{F} , G y H son funciones de una variable independiente t , y usando (67) tendremos

$$dz = D_t \bar{F}(t) dt, \quad dx = D_t G(t) dt, \quad dy = D_t H(t) dt.$$

Además de (49) obtendremos

$$\begin{aligned} dz &= [F_x(x, y) D_t G(t) + F_y(x, y) D_t H(t)] dt \\ &= F_x(x, y) D_t G(t) dt + F_y(x, y) D_t H(t) dt, \end{aligned}$$

y por tanto

$$dz = F_x(x, y) dx + F_y(x, y) dy. \quad (68)$$

Este resultado demuestra que la diferencial de z está dada por (68) en los casos cuando x y y son variables independientes y cuando x es la correspondiente de una variable independiente t bajo la función G y y es la correspondiente de la misma variable independiente t bajo la función H .

Ejemplo 1. Si $z = F(x, y) = e^{-x} \cos y$, encuentre dz .

Solución. $F_x(x, y) = -e^{-x} \cos y$, $F_y(x, y) = -e^{-x} \sin y$, y usando (68) tenemos:

$$dz = -e^{-x} \cos y \, dx - e^{-x} \sin y \, dy.$$

Recordemos de la última sección que una ecuación del plano tangente *PNTU* (Fig. 10.14) a la superficie con ecuación $z = F(x, y)$ en el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ es

$$z - z_1 = F_x(x_1, y_1)(x - x_1) + F_y(x_1, y_1)(y - y_1). \quad (69)$$

Sea V otro punto del plano tangente con coordenadas $(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y, z_2)$, por lo tanto V es el punto del plano tangente que se obtiene al incrementar Δx la coordenada x de P y Δy la coordenada y de P . La igualdad (69) nos dice que para que V pertenezca al plano tangente se necesita que el cambio en la coordenada z (*KT* en la Fig. 10.14) sea

$$z_2 - z_1 = F_x(x_1, y_1) \Delta x + F_y(x_1, y_1) \Delta y. \quad (70)$$

Pero en $P(x_1, y_1, z_1)$ tenemos de (62), que

$$dz = F_x(x_1, y_1) \Delta x + F_y(x_1, y_1) \Delta y. \quad (71)$$

Comparando (70) y (71) concluimos que

$$dz = z_2 - z_1 = KT.$$

Hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 9. Si $z = F(x, y)$ es una ecuación de una superficie y si $P(x_1, y_1, z_1)$ está sobre esta superficie, entonces para Δx y Δy dados la diferencial dz en $P(x_1, y_1, z_1)$,

$$dz = F_x(x_1, y_1) \Delta x + F_y(x_1, y_1) \Delta y,$$

es igual a $z_2 - z_1$ si el punto $V(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y, z_2)$ está en el plano tangente a la superficie en $P(x_1, y_1, z_1)$.

Recordamos que el símbolo Δz se ha usado para representar

$$F(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y) - F(x_1, y_1)$$

(en la Fig. 10.14, KQ representa Δz). Entonces, de (60), tenemos

$$\Delta z = dz + \theta_1(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \theta_2(\Delta x, \Delta y) \Delta y, \quad (72)$$

de esto, vemos que en general $\Delta z \neq dz$. Sin embargo, si $F = \{(x, y, z) \mid z = F(x, y)\}$ es una función de primer grado con variables independientes x y y , entonces la gráfica de F es un plano. En este caso el plano tangente *PNTU* coincide con la gráfica de F , y $\Delta z = dz$. Por ejemplo, si

$$z = 2x + 3y + 4,$$

entonces

$$dz = 2dx + 3dy,$$

y

$$\begin{aligned} \Delta z &= 2(x + \Delta x) + 3(y + \Delta y) + 4 - (2x + 3y + 4) \\ &= 2\Delta x + 3\Delta y = dz. \end{aligned}$$

De (72) se deduce que

$$|\Delta z - dz| = |\theta_1(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \theta_2(\Delta x, \Delta y) \Delta y|,$$

y por (61) se ve que $|\Delta z - dz|$ se puede hacer tan pequeño como se quiera al tomar Δx y Δy suficientemente pequeños. Por esta razón dz es una buena aproximación de Δz cuando Δx y Δy son pequeños.

En el caso de funciones de tres o más variables también se verifica que la diferencial es una buena aproximación del incremento.

Ejemplo 2. Sea $z = F(x, y) = 3x^2 + 2y^2$.

(a) Encuentre dz y Δz en función de $x, y, \Delta x$ y Δy .

(b) Encuentre dz y Δz cuando $x = 2, y = 3, \Delta x = 0.01, \Delta y = 0.02$.

(c) Encuentre dz y Δz cuando $x = 2, y = 3, \Delta x = 0.001, \Delta y = 0.002$.

Solución. (a) Aquí $F_x(x, y) = 6x, F_y(x, y) = 4y$, y por (62) tenemos

$$dz = 6x \Delta x + 4y \Delta y.$$

Por otro lado encontramos que

$$\begin{aligned} \Delta z &= F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) \\ &= 3(x + \Delta x)^2 + 2(y + \Delta y)^2 - (3x^2 + 2y^2) \\ &= 3x^2 + 6x \Delta x + 3\Delta x^2 + 2y^2 + 4y \Delta y + 2\Delta y^2 - 3x^2 - 2y^2, \\ \Delta z &= 6x \Delta x + 4y \Delta y + 3\Delta x^2 + 2\Delta y^2. \end{aligned}$$

(b) Para los valores dados y por los resultados de (a) vemos que:

$$dz = 6(2)(0.01) + 4(3)(0.02) = 0.12 + 0.24 = 0.36;$$

$$\Delta z = 6(2)(0.01) + 4(3)(0.02) + 3(0.01)^2 + 2(0.02)^2 = 0.3611.$$

(c) En este caso

$$dz = 6(2)(0.001) + 4(3)(0.002) = 0.012 + 0.024 = 0.036;$$

$$\Delta z = 6(2)(0.001) + 4(3)(0.002) + 3(0.001)^2 + 2(0.002)^2 = 0.036011.$$

Ejemplo 3. El área z de un rectángulo con lados x y y está dada por $z = xy$. Encuentre el error máximo aproximado dz en el área si las dimensiones de las longitudes de los lados son $x = 5$ y $y = 6$ cm con errores máximos de $dx = \pm 0.01$ y $dy = \pm 0.01$ cm.

Solución. Usando (63) tenemos que $dz = x \, dy + y \, dx$. Por tanto, para los valores dados,

$$dz = 6(\pm 0.01) + 5(\pm 0.01) = \pm 0.11 \text{ cm cuadrados.}$$

EJERCICIOS

1. (a) Para $z = x^2 + 2xy - y^2$, encuentre dz y Δz en función de $x, y, \Delta x$ y Δy (vea ejercicio 1, Sec. 10.6).

(b) Use los resultados de (a), para encontrar dz y Δz si $x = 3, y = 2, \Delta x = 0.1, \Delta y = 0.2$.

2. (a) Para $z = x^2 + xy + y^2$, encuentre dz y Δz en función de $x, y, \Delta x$ y Δy (vea ejercicio 4, Sec. 10.6).

(b) Use los resultados de (a) para encontrar dz y Δz si $x = 2, y = 1, \Delta x = 0.02, \Delta y = 0.01$.

3. (a) Si $z = F(x, y) = x^2 + xy + y^2$, encuentre $F(2, 1)$.
 (b) Use el valor de Δz del ejercicio 2(b) para encontrar $F(2.02, 1.01)$.
 (c) Use el valor de dz del ejercicio 2(b), para encontrar el valor aproximado de z si $x = 2.02$ y $y = 1.01$.
 4. Use el diferencial dz para encontrar el valor aproximado de $F(3.001, 2.006)$ cuando $F(x, y) = x^2 + xy + y^2$.
 5. Use diferenciales en (a) y (b) para encontrar el cambio aproximado dz de z para los incrementos indicados de Δx y Δy . Use este resultado para calcular el valor aproximado de z que corresponde a los valores $x_1 + \Delta x$ de x y $y_1 + \Delta y$ de y .
 (a) $z = x^2y + xy^2 - 3x - 2y$; x cambia de $x_1 = 2$ a $x_1 + \Delta x = 2.1$ y y cambia de $y_1 = 3$ a $y_1 + \Delta y = 2.8$.
 (b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; x cambia de $x_1 = 10$ a $x_1 + \Delta x = 10.1$ y y cambia de $y_1 = 5$ a $y_1 + \Delta y = 5.01$.

En los ejercicios del 6 al 13 encuentre la diferencial dz si se da z y la diferencial du si se da u .

6. $z = x^2y + xy^2$. 7. $z = \arcsen(x/y)$.
 8. $z = x^2 \sen 2y$. 9. $z = e^{2x}e^{3y}$.
 10. $u = xy^2z^3$. 11. $u = e^{xy^2}$.
 12. $u = \arctan(xy/z)$. 13. $u = ze^{xy}$.

14. El radio de un cono circular es 3.1 cm y la altura es 8.4 cm. Si el error máximo al tomar estas medidas es de 0.1 cm, encuentre el error máximo aproximado al calcular el volumen.

15. El período t en segundos para oscilaciones pequeñas de un péndulo simple que tiene p cm. de largo está dado por:

$$t = 2\pi\sqrt{p/g}.$$

donde g es la constante de aceleración debida a la gravedad. Si t se calcula para $p = 8$ cm y $g = 9.80$ cm/s² por segundo, encuentre el error aproximado de t si los valores correctos son $p = 8.05$ cm y $g = 9.81$ cm/s² por segundo.

En cada uno de los ejercicios del 16 al 19 encuentre dz usando (68). Después verifique sus resultados calculando una expresión de la forma $z = \bar{F}(t)$ de las igualdades dadas y usando $dz = D_t \bar{F}(t) dt$.

16. $z = xy^2$; $x = t^2$, $y = t^3$.
 17. $z = xe^y$; $x = t^2$, $y = \ln t$.
 18. $z = y/x$; $x = t$, $y = t^2$.
 19. $z = x^2 + y^2$; $x = \cos t$, $y = \sen t$.

10.10 Funciones compuestas. El teorema 5 y las igualdades (35) y (37), que son generalizaciones de dicho teorema, encuentran una aplicación importante en el caso siguiente.

Supongamos que F es una función de dos variables independientes cuyo dominio es la región R ,

$$F = \{(x, y; z) \mid z = F(x, y), (x, y) \in R\},$$

y además supongamos que G y H son funciones de dos variables independientes cuyo dominio común D tiene la propiedad de que

$$\{(x, y) \mid x = G(r, s), y = H(r, s), (r, s) \in D\} \subseteq R.$$

Podemos considerar la función \bar{F} definida por:

$$\bar{F} = \{(r, s; z) \mid z = F[G(r, s), H(r, s)], (r, s) \in D\},$$

y preguntarnos si $\bar{F}(r, s)$ tiene derivadas parciales con respecto a r y s , y si estas existen como se pueden obtener $\bar{F}_r(r, s)$ y $\bar{F}_s(r, s)$ de las funciones F, G y H . La respuesta la encontramos en el teorema 10.

Teorema 10. Sea $F = \{(x, y; z) \mid z = F(x, y)\}$ una función con F_x y F_y continuas en cada punto interior de una región R . Si $G = \{(r, s; x) \mid x = G(r, s)\}$ y $H = \{(r, s; y) \mid y = H(r, s)\}$ son dos funciones que son continuas y cuyas derivadas parciales $G_r(r, s)$, $G_s(r, s)$, $H_r(r, s)$, $H_s(r, s)$ existen en una región D donde

$$\{(x, y) \mid x = G(r, s), y = H(r, s), (r, s) \in D\} \subseteq R,$$

entonces, para la función

$$\bar{F} = \{(r, s; z) \mid z = \bar{F}(r, s) = F[G(r, s), H(r, s)], (r, s) \in D\},$$

$$\bar{F}_r(r, s) = F_x(x, y)G_r(r, s) + F_y(x, y)H_r(r, s), \quad (73)$$

y

$$\bar{F}_s(r, s) = F_x(x, y)G_s(r, s) + F_y(x, y)H_s(r, s). \quad (74)$$

La demostración del teorema 10 es semejante a la demostración del teorema 7. Al usar la igualdad (38) obtendremos la correspondiente a la igualdad (44)

$$\frac{\Delta z}{\Delta r} = F_x(x, y) \frac{\Delta x}{\Delta r} + F_y(x, y) \frac{\Delta y}{\Delta r} + \theta_1(\Delta x, \Delta y) \frac{\Delta x}{\Delta r} + \theta_2(\Delta x, \Delta y) \frac{\Delta y}{\Delta r} \quad (75)$$

y

$$\frac{\Delta z}{\Delta s} = F_x(x, y) \frac{\Delta x}{\Delta s} + F_y(x, y) \frac{\Delta y}{\Delta s} + \theta_1(\Delta x, \Delta y) \frac{\Delta x}{\Delta s} + \theta_2(\Delta x, \Delta y) \frac{\Delta y}{\Delta s}. \quad (76)$$

Como $\bar{F}_r(r, s) = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta r}$ y $\bar{F}_s(r, s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta s}$; obtenemos (73) de (75) y (74) de (76). Los detalles de la demostración se dejan al estudiante.

Ejemplo 1. Dado $F(x, y) = x^2 - xy + y^2$, $x = G(r, s) = rs$, $y = H(r, s) = r^2 + s^2$, de modo que

$$F[G(r, s), H(r, s)] = \bar{F}(r, s)$$

encuentre $\bar{F}_r(r, s)$ y $\bar{F}_s(r, s)$ en función de x, y, r , y s .

Solución. Aquí

$$\begin{aligned} F_x(x, y) &= 2x - y, & F_y(x, y) &= -x + 2y, \\ G_r(r, s) &= s, & G_s(r, s) &= r, \\ H_r(r, s) &= 2r, & H_s(r, s) &= 2s. \end{aligned}$$

Al usar (73) y (74) obtenemos

$$\bar{F}_r(r, s) = (2x - y)s + 2(-x + 2y)r,$$

$$\bar{F}_s(r, s) = (2x - y)r + 2(-x + 2y)s.$$

Las ecuaciones (73) y (74), que expresan $\bar{F}_r(r, s)$ y $\bar{F}_s(r, s)$ en función de x, y, r y s , se describen en la forma siguiente:

$$\bar{F}_r(r, s) = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \quad (77)$$

$$\bar{F}_s(r, s) = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}, \quad (78)$$

y algunas veces en la forma

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \quad (79)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}, \quad (80)$$

Note que en (79) y (80), z se usa en dos formas diferentes; en $\frac{\partial z}{\partial r}$ y $\frac{\partial z}{\partial s}$ como el correspondiente de (r, s) bajo \bar{F} y en $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ como la correspondiente de (x, y)

bajo F . Por esta razón se debe tener mucho cuidado al escribir la conclusión del teorema 10 en las formas (79) y (80).

Las generalizaciones del teorema 5 citadas en la Sec. 10.6 conducen a generalizaciones del teorema 10. Por ejemplo, supongamos que

$$u = F(x, y, z)$$

$$y \quad x = G(r, s), \quad y = H(r, s), \quad z = K(r, s)$$

$$y \text{ que } u = F[G(r, s), H(r, s), K(r, s)] = \bar{F}(r, s)$$

donde F, G, H y K son funciones que satisfacen condiciones que son extensiones obvias de las condiciones del teorema 10. Entonces para la función \bar{F} tenemos

$$\bar{F}_r(r, s) = F_x(x, y, z)G_r(r, s) + F_y(x, y, z)H_r(r, s) + F_z(x, y, z)K_r(r, s) \quad (81)$$

$$\bar{F}_s(r, s) = F_x(x, y, z)G_s(r, s) + F_y(x, y, z)H_s(r, s) + F_z(x, y, z)K_s(r, s). \quad (82)$$

Las ecuaciones (81) y (82) que expresan $\bar{F}_r(r, s)$ y $\bar{F}_s(r, s)$ en función de x, y, z, r y s , se escriben algunas veces como:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r}, \quad (83)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s}. \quad (84)$$

Note que en (83) y (84), u se usa en dos formas diferentes [vea la nota que sigue a las ecuaciones (79) y (80)].

Si

$$w = F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

y

$$x_i = G_i(r_1, r_2, \dots, r_m), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

entonces

$$w = F[G_1(r_1, r_2, \dots, r_m), \dots, G_n(r_1, r_2, \dots, r_m)] = \bar{F}(r_1, r_2, \dots, r_m),$$

entonces, bajo condiciones apropiadas (que son extensiones de las condiciones del teorema 10).

$$\bar{F}_{r_j}(r_1, r_2, \dots, r_m) = \sum_{i=1}^n F_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) D_j G_i(r_1, r_2, \dots, r_m) \quad (85)$$

donde $j = 1, 2, 3, \dots, m$. Debemos notar que (85) es un conjunto de m ecuaciones, una para cada una de las variables $r_j, j = 1, 2, \dots, m$, y el segundo miembro de cada una de estas igualdades es la suma de n términos, uno para cada una de las variables $x_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Ejemplo 2. Dado $F(x, y, z) = xy + yz - xz, x = G(r, s) = r + s, y = H(r, s) = r + s^2$ y $z = K(r, s) = r^2 + s$. Sea $\bar{F}(r, s) = F[G(r, s), H(r, s), K(r, s)]$, encuentre $\bar{F}_r(r, s)$ y $\bar{F}_s(r, s)$ en función de x, y, z, r y s .

Solución. Aquí

$$F_x(x, y, z) = y - z, \quad F_y(x, y, z) = x + z, \quad F_z(x, y, z) = y - x;$$

$$G_r(r, s) = 1, \quad H_r(r, s) = 1, \quad K_r(r, s) = 2r;$$

$$G_s(r, s) = 1, \quad H_s(r, s) = 2s, \quad K_s(r, s) = 1,$$

y las condiciones de continuidad se verifican para $(r, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Por tanto, al usar (81) y (82) tenemos

$$\bar{F}_r(r, s) = (y - z) + (x + z) + (y - x)(2r),$$

$$\bar{F}_s(r, s) = (y - z) + (x + z)(2s) + (y - x).$$

Ejemplo 3. Supongamos que $F(x, y) = \sin(x^2y) + xy, x = G(r, s, t) = r^2 + 2rst + t^2, y = H(r, s, t) = rs^2 + r^2t^2 + ts$. Sea $\bar{F}(r, s, t) = F[G(r, s, t), H(r, s, t)]$, encuentre $\bar{F}_r(r, s, t), \bar{F}_s(r, s, t)$ y $\bar{F}_t(r, s, t)$.

Solución. Aquí se tiene un caso que se adapta a la fórmula (85), donde $n = 2$ y $m = 3$; para estas condiciones el conjunto de ecuaciones (85) es

$$\bar{F}_r(r, s, t) = F_x(x, y)G_r(r, s, t) + F_y(x, y)H_r(r, s, t),$$

$$\bar{F}_s(r, s, t) = F_x(x, y)G_s(r, s, t) + F_y(x, y)H_s(r, s, t),$$

$$\bar{F}_t(r, s, t) = F_x(x, y)G_t(r, s, t) + F_y(x, y)H_t(r, s, t).$$

Para este ejemplo encontramos que:

$$\begin{aligned} F_x(x, y) &= 2xy \cos(x^2y) + y, & F_y(x, y) &= x^2 \cos(x^2y) + x, \\ G_r(r, s, t) &= 2r + 2st, & H_r(r, s, t) &= s^2 + 2rt^2, \\ G_s(r, s, t) &= 2rt, & H_s(r, s, t) &= 2rs + t, \\ G_t(r, s, t) &= 2rs + 2t, & H_t(r, s, t) &= 2r^2t + s. \end{aligned}$$

Por tanto tenemos

$$\begin{aligned} \bar{F}_r(r, s, t) &= (2xy \cos x^2y + y)(2r + 2st) + (x^2 \cos x^2y + x)(s^2 + 2rt^2), \\ \bar{F}_s(r, s, t) &= (2xy \cos x^2y + y)(2rt) + (x^2 \cos x^2y + x)(2rs + t), \\ \bar{F}_t(r, s, t) &= (2xy \cos x^2y + y)(2rs + 2t) + (x^2 \cos x^2y + x)(2r^2t + s). \end{aligned}$$

Frecuentemente se presentan situaciones semejantes a las siguientes. Supongamos que

$$u = F(x, y, z) \quad \text{y} \quad z = K(x, y)$$

y consideremos la función

$$\bar{F} = \{(x, y; u) \mid u = \bar{F}(x, y) = F[x, y, K(x, y)]\}.$$

Aquí x y y juegan el papel de r y s en la generalización del teorema 10 expresado por (81) y (82) con

$$x = G(x, y) = x, \quad y = H(x, y) = y, \quad z = K(x, y).$$

Aquí

$$G_x(x, y) = 1, \quad G_y(x, y) = 0, \quad H_x(x, y) = 0, \quad H_y(x, y) = 1$$

y al usar (81) y (82) tenemos

$$\bar{F}_x(x, y) = F_x(x, y, z) + F_z(x, y, z)K_x(x, y), \quad (86)$$

$$\bar{F}_y(x, y) = F_y(x, y, z) + F_z(x, y, z)K_y(x, y). \quad (87)$$

En este caso si $u = F(x, y, z)$ habrá confusión al usar el simbolismo de las fórmulas (83) y (84). Si se usara este simbolismo, la igualdad (86) sería

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x},$$

y en esta igualdad el símbolo $\frac{\partial u}{\partial x}$ tiene dos significados. En el segundo miembro de la

igualdad $\frac{\partial u}{\partial x} = F_x(x, y, z)$ significa la derivada parcial de la correspondiente $u = F(x, y, z)$ de (x, y, z) bajo la función F donde las tres variables x, y, z

son independientes. En el primer miembro de la igualdad $\frac{\partial u}{\partial x} = F_x(x, y)$ significa la derivada parcial de la correspondiente $u = F(x, y)$ de (x, y) bajo la función F donde x y y son las variables independientes. Aquí $F(x, y)$ se obtiene sustituyendo $K(x, y)$ por z en $F(x, y, z)$ por z , en $\bar{F}(x, y, z)$.

Ejemplo 4. Sea $F(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 12$ y $z = K(x, y) = x^2 + y^2$. Sea $\bar{F}(x, y) = F[x, y, K(x, y)]$, exprese $\bar{F}_x(x, y)$ y $\bar{F}_y(x, y)$ en función de x y y :

(a) Usando las igualdades (86) y (87)

(b) encontrado $\bar{F}(x, y)$ en función de x y y , derivando después esta expresión con respecto a x y con respecto a y .

Solución. (a) Aquí $F_x(x, y, z) = 4x$, $F_y(x, y, z) = 6y$, $F_z(x, y, z) = 8z$, $K_x(x, y) = 2x$, $K_y(x, y) = 2y$, y usando (86) y (87) obtenemos

$$\bar{F}_x(x, y) = 4x + 8z(2x) = 4x + 16x(x^2 + y^2),$$

$$\bar{F}_y(x, y) = 6y + 8z(2y) = 6y + 16y(x^2 + y^2).$$

(b) Al sustituir $z = x^2 + y^2$ en la fórmula para $F(x, y, z)$ obtenemos

$$\bar{F}(x, y) = F(x, y, x^2 + y^2) = 2x^2 + 3y^2 + 4(x^2 + y^2)^2 - 12,$$

$$\bar{F}(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 4x^4 + 8x^2y^2 + 4y^4 - 12.$$

Por tanto

$$\bar{F}_x(x, y) = 4x + 16x^3 + 16xy^2 = 4x + 16x(x^2 + y^2),$$

$$\bar{F}_y(x, y) = 6y + 16x^2y + 16y^3 = 6y + 16y(x^2 + y^2).$$

En la sección anterior hemos demostrado que la fórmula

$$dz = F_x(x, y) dx + F_y(x, y) dy \quad (88)$$

para la diferencial de $z = F(x, y)$ se verifica cuando x y y son variables independientes o son las correspondientes de una variable independiente t bajo las funciones G y H respectivamente. Esta fórmula también se verifica si x y y son las correspondientes de (r, s) bajo las funciones G y H , respectivamente (donde todas las derivadas parciales contenidas son continuas en una vecindad escogida), se le pide al estudiante demostrarlo en el ejercicio 12 de esta sección. Se obtienen resultados semejantes para situaciones en las cuales, algunas o todas las funciones F, G y H son funciones de más de dos variables independientes.

Ejemplo 5. Si $z = F(x, y) = e^{xy}$, $x = G(r, s) = \sqrt{r^2 + s^2}$, $y = H(r, s) = \arctan(s/r)$, encuentre dz en función de x, y, r, s, dr , y ds , siendo r y s las variables independientes.

Solución. Al usar (88) tenemos

$$dz = ye^{xy} dx + xe^{xy} dy$$

donde

$$dx = \frac{r}{(r^2 + s^2)^{1/2}} dr + \frac{s}{(r^2 + s^2)^{1/2}} ds$$

$$dy = \frac{-s}{r^2 + s^2} dr + \frac{r}{r^2 + s^2} ds.$$

Por tanto,

$$dz = e^{xy} \left(\frac{yr}{\sqrt{r^2 + s^2}} - \frac{xs}{r^2 + s^2} \right) dr + e^{xy} \left(\frac{ys}{\sqrt{r^2 + s^2}} + \frac{xr}{r^2 + s^2} \right) ds.$$

También, pudimos determinar

$$F[G(r, s), H(r, s)] = \bar{F}(r, s) = e^{\sqrt{r^2 + s^2} \arctan(s/r)},$$

y después usar

$$dz = \bar{F}_r(r, s) dr + \bar{F}_s(r, s) ds$$

para encontrar dz . Para este caso el método anterior es el más conveniente.

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 4 se da $F(x, y)$, $x = G(r, s)$, $y = H(r, s)$. Sea $\bar{F}(r, s) = F[G(r, s), H(r, s)]$, encuentre $\bar{F}_r(r, s)$ y $\bar{F}_s(r, s)$ usando las fórmulas (73) y (74).

1. $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$; $x = r^2 + s$, $y = r + s^2$.
2. $F(x, y) = e^{xy}$; $x = \sqrt{r^2 + s^2}$, $y = \arctan(s/r)$.
3. $F(x, y) = xe^y + ye^x$; $x = rs$, $y = r/s$.
4. $F(x, y) = x \ln y + y \ln x$; $x = r^2$, $y = s^r$.

En cada uno de los ejercicios del 5 al 8 se da $F(x, y, z)$, $x = G(r, s)$ y $y = H(r, s)$ y $z = K(r, s)$. Sea $\bar{F}(r, s) = F[G(r, s), H(r, s), K(r, s)]$, encuentre $\bar{F}_r(r, s)$ y $\bar{F}_s(r, s)$ usando las fórmulas (81) y (82).

5. $F(x, y, z) = x^2 + y^2z + z^3$; $x = r^2 + s$, $y = rs$, $z = r^2$.
6. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x = re^s$, $y = re^{-s}$, $z = r/s$.
7. $F(x, y, z) = xy + yz - zx$; $x = r + s$, $y = rs$, $z = s$.
8. $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $x = r \sin s$, $y = r \cos s$, $z = rs$.
9. Escriba con detalle las ecuaciones (85) cuando $n = 2$ y $m = 3$.

10. Si $z = F(x, y)$ y $x = r + s$, $y = r - s$, encuentre expresiones para $\frac{\partial z}{\partial r}$ y $\frac{\partial z}{\partial s}$.

11. Sea $F(x, y, u, v) = 2x^2u + 3yuv + u^2x^2 + vx$, $u = G_1(x, y) = \sin x + y^2$, $v = G_2(x, y) = x^2y^2 + \ln x$. Sea $\bar{F}(x, y) = F[x, y, G_1(x, y), G_2(x, y)]$, exprese $\bar{F}_x(x, y)$ y $\bar{F}_y(x, y)$ en función de x, y, u y v .

12. Ya hemos indicado que la fórmula $dz = F_x(x, y) dx + F_y(x, y) dy$ se verifica si $x = G(r, s)$ y $y = H(r, s)$ donde r y s son variables independientes. Demuestre esta proposición.

10.11 Derivación implícita. Si F es una función de dos variables independientes la ecuación $F(x, y) = 0$ puede o no determinar una función $G = \{(x, y) | y = G(x)\}$ (vea Sec. 3.12). Esto es, puede existir una función G de una variable independiente y un conjunto I tal que

$$F[x, G(x)] = 0, \quad x \in I.$$

Supongamos que la ecuación $F(x, y) = 0$ determina la función G en un in-

tervalo I , y que F_x y F_y son continuas en el conjunto $S = \{(x, y) | y = G(x), x \in I\}$ y que G es derivable en I . Entonces si $F(x) = F[x, G(x)]$, tenemos

$$\bar{F}(x) = 0 \quad \text{y} \quad D_x \bar{F}(x) = 0, \quad x \in I$$

y por la fórmula (53) de la Sec. 10.7

$$D_x \bar{F}(x) = F_x(x, y) + F_y(x, y) D_x G(x), \quad (x, y) \in S.$$

Por tanto

$$F_x(x, y) + F_y(x, y) D_x G(x) = 0,$$

y si $F_y(x, y) \neq 0$ se deduce que

$$D_x G(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

Con lo anterior se ha demostrado el siguiente teorema.

Teorema 11. Sea $F = \{(x, y; z) | z = F(x, y)\}$ una función de dos variables independientes con la propiedad de que la ecuación $F(x, y) = 0$ determina una función* $G = \{(x, y) | y = G(x), x \in I\}$ que es diferenciable en I y para la cual $F[x, G(x)] = 0$, $x \in I$. Si F_x y F_y son continuas en $S = \{(x, y) | y = G(x), x \in I\}$, entonces

$$D_x y = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} \quad (89)$$

Para toda $x \in I$ y $(x, y) \in S$ donde $F_y(x, y) \neq 0$.

Note que el método para encontrar $D_x y$ dado por este teorema, da el mismo resultado que el método de derivación implícita usado en la Sec. 3.12.

Ejemplo 1. Si G es una función derivable con la propiedad de que $y = G(x)$ satisface la ecuación

$$x^2 + xy + y^3 = 0,$$

encuentre $D_x y$ usando (89).

Solución. Sea $F(x, y) = x^2 + xy + y^3$. Entonces $F_x(x, y) = 2x + y$ y $F_y(x, y) = x + 3y^2$.

Al substituir en (89) obtenemos

$$D_x y = -\frac{2x + y}{x + 3y^2} \text{ para toda } (x, y) \text{ tal que } x + 3y^2 \neq 0.$$

Si F es una función con tres variables independientes, la ecuación $F(x, y, z) = 0$ puede determinar una función $G = \{(x, y; z) | z = G(x, y)\}$. Esto es, puede existir una función G con dos variables independientes y una región R tal que

$$F[x, y, G(x, y)] = 0, \quad (x, y) \in R.$$

* Un conjunto de condiciones que aseguran la existencia de la función G es que para alguna (x_1, y_1) en el dominio de F , $F(x_1, y_1) = 0$, $F_y(x_1, y_1) \neq 0$ con F_x, F_y continuas en una vecindad de (x_1, y_1) .

Supongamos que estamos en este caso y además que $G_x(x, y)$ y $G_y(x, y)$ existen en R y que F_x, F_y, F_z son continuas en $S = \{(x, y, z) \mid z = G(x, y), (x, y) \in R\}$. Sea $\bar{F}(x, y) = F[x, y, G(x, y)]$, entonces

$$\bar{F}(x, y) = 0, \quad \bar{F}_x(x, y) = 0, \quad \bar{F}_y(x, y) = 0, \quad (x, y) \in R.$$

Por las fórmulas (81) y (82) de la Sec. 10.10

$$\bar{F}_x(x, y) = F_x(x, y, z) + F_z(x, y, z)G_x(x, y),$$

$$\bar{F}_y(x, y) = F_y(x, y, z) + F_z(x, y, z)G_y(x, y),$$

y si $F_z(x, y, z) \neq 0$ se deduce que

$$G_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \quad G_y(x, y) = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}$$

Hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 12. Sea $F = \{(x, y, z; u) \mid u = F(x, y, z)\}$ una función de tres variables independientes con la propiedad de que la ecuación $F(x, y, z) = 0$ determina una función $G = \{(x, y; z) \mid z = G(x, y), (x, y) \in R\}$ para la cual $G_x(x, y)$, $G_y(x, y)$ existen y $F[x, y, G(x, y)] = 0$ en R . Si F_x, F_y y F_z son continuas en $S = \{(x, y, z) \mid z = G(x, y), (x, y) \in R\}$, entonces

$$G_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \quad G_y(x, y) = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}. \quad (90)$$

Para toda pareja $(x, y) \in R$ y para todo $(x, y, z) \in S$ y con $F_z(x, y, z) \neq 0$.

Ejemplo 2. La ecuación

$$F(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 36 = 0$$

determina una función G para la cual $F[x, y, G(x, y)] = 0$. Encuentre $G_x(x, y)$ y $G_y(x, y)$.

Solución. Aquí

$$F_x(x, y, z) = 2x, \quad F_y(x, y, z) = 8y, \quad F_z(x, y, z) = 18z.$$

al sustituir en (90) obtendremos

$$G_x(x, y) = -\frac{2x}{18z} = -\frac{x}{9z}, \quad G_y(x, y) = -\frac{8y}{18z} = -\frac{4y}{9z}, \quad \text{para } z \neq 0.$$

Ejemplo 3. Si $u = F(x, y, z) = 6xy - 12y^2z^2$ y si $H(x, y, z) = 4xz^2 - y^2x + z^4x^2 = 0$ determina una función $G = \{(x, y; z) \mid z = G(x, y)\}$, podemos escribir

$$u = \bar{F}(x, y) = F[x, y, G(x, y)].$$

Encuentre $\bar{F}_x(x, y)$

Solución. Sabemos por (86) que

$$\begin{aligned} \bar{F}_x(x, y) &= F_x(x, y, z) + F_z(x, y, z)G_x(x, y) \\ &= 6y + (-24y^2z)G_x(x, y). \end{aligned}$$

Podemos encontrar $G_x(x, y)$ al hacer uso de (90):

$$G_x(x, y) = -\frac{H_x(x, y, z)}{H_z(x, y, z)} = -\frac{4z^2 - y^2 + 2z^4x}{8xz + 4z^3x^2}.$$

Por tanto

$$\bar{F}(x, y) = 6y + 24y^2z \left(\frac{4z^2 - y^2 + 2z^4x}{8xz + 4z^3x^2} \right).$$

El teorema 12 se puede aplicar a los problemas de encontrar una ecuación del plano tangente a la superficie con ecuación $F(x, y, z) = 0$ en el punto (x_1, y_1, z_1) . Si la función F tiene la propiedad de que en una vecindad N de (x_1, y_1, z_1) la ecuación $F(x, y, z) = 0$ determina una función G de dos variables independientes para la cual $F[x, y, G(x, y)] = 0$, entonces las ecuaciones

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{y} \quad z = G(x, y)$$

tienen la misma gráfica en la vecindad N de (x_1, y_1, z_1) . Por la Sec. 10.4 sabemos que una ecuación del plano tangente a la gráfica de $z = G(x, y)$ en (x_1, y_1, z_1) es

$$G_x(x_1, y_1)(x - x_1) + G_y(x_1, y_1)(y - y_1) - (z - z_1) = 0.$$

Si en esta ecuación usamos los valores $G_x(x_1, y_1)$ y $G_y(x_1, y_1)$ dados en el teorema 12, encontramos que

$$F_x(x_1, y_1, z_1)(x - x_1) + F_y(x_1, y_1, z_1)(y - y_1) + F_z(x_1, y_1, z_1)(z - z_1) = 0 \quad (91)$$

es una ecuación del plano tangente a la gráfica de $F(x, y, z) = 0$ en (x_1, y_1, z_1) . De este resultado se deduce que

$$F_x(x_1, y_1, z_1), F_y(x_1, y_1, z_1), F_z(x_1, y_1, z_1)$$

es un conjunto de números directores de la normal a la gráfica $F(x, y, z) = 0$ en (x_1, y_1, z_1) . Así la normal tiene la representación paramétrica

$$x = x_1 + F_x(x_1, y_1, z_1)t, \quad y = y_1 + F_y(x_1, y_1, z_1)t, \quad z = z_1 + F_z(x_1, y_1, z_1)t, \quad (92)$$

y si $F_x(x_1, y_1, z_1) \neq 0$, $F_y(x_1, y_1, z_1) \neq 0$, y $F_z(x_1, y_1, z_1) \neq 0$, la normal tendrá la representación simétrica.

$$\frac{x - x_1}{F_x(x_1, y_1, z_1)} = \frac{y - y_1}{F_y(x_1, y_1, z_1)} = \frac{z - z_1}{F_z(x_1, y_1, z_1)}. \quad (93)$$

Ejemplo 4. Encuentre una ecuación del plano tangente y una representación paramétrica de la normal a la gráfica de $F(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 5z^2 - 16 = 0$ en $P(2, 1, 1)$.

Solución. Aquí

$$F_x(x, y, z) = 4x, \quad F_y(x, y, z) = 6y, \quad F_z(x, y, z) = 10z,$$

así que

$$F_x(2, 1, 1) = 8, \quad F_y(2, 1, 1) = 6, \quad F_z(2, 1, 1) = 10.$$

Al usar (91) encontramos

$$4(x-2) + 3(y-1) + 5(z-1) = 0$$

que es una ecuación de plano tangente. Vemos también que

$$x = 2 + 4t, \quad y = 1 + 3t, \quad z = 1 + 5t$$

es una representación paramétrica de la normal.

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 7 suponga que se determina por la ecuación dada una función derivable $G = \{(x, y) \mid y = G(x)\}$, encuentre $D_x y$ usando la fórmula (89).

1. $9x^2 + 4y^2 = 36$.

3. $y \sin x - x \cos y = 0$.

5. $2 \sin^2 x + 3 \sin^2 y = 0$.

7. $\frac{y}{x} - \arctan \frac{x}{y} = 0$.

2. $x^3 - x^2y + xy^2 + y^3 = 0$.

4. $2x + 3y + 4e^{xy} = 0$.

6. $xe^y - y + 1 = 0$.

En cada uno de los ejercicios del 8 al 15, suponga que se determina por la ecuación dada una función $G = \{(x, y, z) \mid z = G(x, y)\}$ y que, $G_x(x, y)$ y $G_y(x, y)$ existen en alguna región R , encuentre $G_x(x, y)$ y $G_y(x, y)$.

8. $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 24 = 0$.

9. $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy + 2gxz + 2fyz = 0$.

10. $z = e^{x+2y+z}$.

12. $xz - \cos yz = a$.

14. $xy + yz + zx = 1$.

16. Si $u = F(x, y, z) = 3x^2yz + y^2z^2 - 16xz$ y si la ecuación $xyz^2 - 2x \sin z = 0$ determina una función $G = \{(x, y, z) \mid z = G(x, y)\}$, considere $u = \bar{F}(x, y) = F[x, y, G(x, y)]$ y encuentre $\bar{F}_x(x, y)$ y $\bar{F}_y(x, y)$.

17. Si $z = y \sin x + x \sin y$ y si $x^2y + xy^2 - 5y + 2x = 0$, entonces existe una función \bar{F} de una variable independiente para la cual $z = \bar{F}(x)$ y una función \bar{G} de una variable independiente para la cual $z = \bar{G}(y)$. Encuentre $D_x \bar{F}(x)$, $D_y \bar{G}(y)$.

En cada uno de los ejercicios del 18 al 25 encuentre una ecuación del plano tangente y una representación paramétrica de la normal a la gráfica de la ecuación dada en el punto $P(x_1, y_1, z_1)$.

18. $x^2 + y^2 + z^2 = 17$; $P(3, -2, 2)$.

19. $4x^2 - y^2 + z^2 = 4$; $P(-1, 3, 3)$.

20. $2x^2 + y^2 - z^2 = 0$; $P(2, 1, 3)$.

21. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} = 1$; $P(0, 0, 3)$.

22. $(x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 36$; $P(3, 4, 5)$.

23. $z^2 + (y-3)^2 = x$; $P(8, 5, 2)$.

24. $2x^2 - 3y^2 + 2yz = 3z - 1$; $P(3, -2, 1)$.

25. $2x^2 + 3y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z + 20 = 0$; $P(1, -1, 3)$.

26. Si $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ demuestre que $dz = -\frac{x dx + y dy}{z}$.

27. Demuestre que $x_1x + y_1y + z_1z = a^2$ es una ecuación del plano tangente a la gráfica de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ en (x_1, y_1, z_1) .

28. Demuestre que $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} + \frac{z_1z}{c^2} = 1$ es una ecuación del plano tangente a la gráfica de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ en (x_1, y_1, z_1) .

29. Demuestre que $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} - \frac{z_1z}{c^2} = 1$ es una ecuación del plano tangente a la gráfica de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ en (x_1, y_1, z_1) .

30. Encuentre el punto de tangencia entre el plano con ecuación $4x + 2y + z = 21$ y la gráfica de $x^2 + y^2 + z^2 = 21$.

En los ejercicios 31 y 32 demuestre que las gráficas de las ecuaciones dadas son tangentes entre sí en el punto $P(x_1, y_1, z_1)$.

Vea el ejercicio 17, Sec. 10.4.

31. $x^2 + y^2 + z^2 = 2, yz = 1$; $P(0, 1, 1)$.

32. $x^2 + y^2 + z^2 = 3, xyz = 1$; $P(1, 1, 1)$.

En los ejercicios 33 y 34 demuestre que las gráficas de las ecuaciones dadas son ortogonales entre sí en el punto dado.

Vea el ejercicio 18, Sec. 10.4.

33. $3x^2 + 2y^2 - 2z = 1, x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 2 = 0$; $P(1, 1, 2)$.

34. $x^2 - y^2 + z^2 + 2 = 0, x^2 + y^2 + 3z^2 = 8$; $P(-1, 2, 1)$.

10.12 Derivadas parciales de orden superior. Considere la función

$$F = \{(x, y, z) \mid z = F(x, y), (x, y) \in D\}$$

y sus derivadas parciales

$$F_x = \{(x, y, z) \mid z = D_x F(x, y), (x, y) \in D_1\}$$

$$F_y = \{(x, y, z) \mid z = D_y F(x, y), (x, y) \in D_2\}.$$

Sea h un número diferente de cero tal que $(x+h, y) \in D_1$. Si existe una función F_{xx} de dos variables independientes con la propiedad de que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_x(x+h, y) - F_x(x, y)}{h} = F_{xx}(x, y). \quad (94)$$

para algunos pares $(x, y) \in D_1$, entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_{xx}(x+h, y) - F_{xx}(x, y)}{h} \quad (95)$$

se llama la segunda derivada parcial de $F(x, y)$ con respecto a x . Observe que

$$F_{xx}(x, y) = D_x F_x(x, y).$$

La función

$$F_{xx} = \{(x, y, z) \mid z = D_x F_x(x, y)\},$$

tal que

$$F_{xx}(x, y) = D_x F_x(x, y), \quad (96)$$

se llama la **segunda derivada parcial de F con respecto a x** . El dominio de F_{xx} consta de los pares del dominio de F_x para las cuales $D_x F_x(x, y)$ existe.

En forma semejante, definimos la **segunda derivada parcial de $F(x, y)$ con respecto a y** , que se representa por $F_{yy}(x, y)$:

$$F_{yy}(x, y) = D_y F_y(x, y).$$

Además, la **segunda derivada parcial de $F(x, y)$, primero con respecto a x y después con respecto a y** , se representa por $F_{yx}(x, y)$, y está dada por

$$F_{yx}(x, y) = D_y F_x(x, y),$$

y la **segunda derivada parcial de $F(x, y)$, primero con respecto a y y después con respecto a x** , se representa por $F_{xy}(x, y)$ y está dada por

$$F_{xy}(x, y) = D_x F_y(x, y).$$

Ejemplo 1. Si $F(x, y) = x^2y^3 - 3xy^2 + 6y^4$, encuentre $F_{xx}(x, y)$, $F_{yy}(x, y)$, $F_{yx}(x, y)$ y $F_{xy}(x, y)$.

Solución. $F_x(x, y) = 2xy^3 - 3y^2$ y $F_y(x, y) = 3x^2y^2 - 6xy + 24y^3$. Por tanto,

$$F_{xx}(x, y) = D_x F_x(x, y) = D_x(2xy^3 - 3y^2) = 2y^3;$$

$$F_{yy}(x, y) = D_y F_y(x, y) = D_y(3x^2y^2 - 6xy + 24y^3) = 6x^2y - 6x + 72y^2;$$

$$F_{yx}(x, y) = D_y F_x(x, y) = D_y(2xy^3 - 3y^2) = 6xy^2 - 6y;$$

$$F_{xy}(x, y) = D_x F_y(x, y) = D_x(3x^2y^2 - 6xy + 24y^3) = 6xy^2 - 6y.$$

En este ejemplo, como en la mayoría de los casos que consideraremos, $F_{yx}(x, y) = F_{xy}(x, y)$; sin embargo, esto no siempre se verifica. Las condiciones bajo las cuales $F_{yx}(x, y) = F_{xy}(x, y)$ se discutirán después.

La derivada con respecto a una variable independiente de una segunda derivada parcial

$$F_{xx}(x, y), \quad F_{yy}(x, y), \quad F_{yx}(x, y), \quad F_{xy}(x, y)$$

se llama **tercera derivada parcial**. Hay ocho posibles terceras derivadas parciales de $F(x, y)$. Usualmente $F_{xxy}(x, y) = F_{xyx}(x, y) = F_{yxx}(x, y)$ y $F_{xyy}(x, y) = F_{yyx}(x, y)$; cuando esto se verifica hay solamente 4 terceras derivadas parciales distintas de $F(x, y)$. La derivada de una tercera derivada es una cuarta derivada parcial, y así sucesivamente hasta la n -ésima derivada.

Algunas veces es conveniente usar la palabra **orden** en relación con derivadas parciales. Las derivadas parciales en la Sec. 10.2 se llaman **primeras derivadas parciales**, o derivadas parciales de **primer orden**. Las segundas derivadas parciales se

llaman derivadas parciales de **segundo orden**, las terceras derivadas parciales se llaman derivadas parciales de **tercer orden**, y así sucesivamente, las n -ésimas derivadas parciales se llaman derivadas parciales de **orden n** .

Para una función

$$F = \{(x, y, z, u) \mid u = F(x, y, z)\},$$

$F(x, y, z)$ tiene nueve posibles derivadas parciales de segundo orden (de las cuales generalmente seis son distintas) y tiene también veintisiete posibles derivadas parciales de tercer orden (de las cuales generalmente 10 son distintas).

Ejemplo 2. Encuentre las derivadas parciales de tercer orden de $F(x, y) = ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4$.

Solución.

$$F_x(x, y) = 4ax^3 + 3bx^2y + 2cxy^2 + dy^3,$$

$$F_y(x, y) = bx^3 + 2cx^2y + 3dxy^2 + 4ey^3,$$

$$F_{xx}(x, y) = 12ax^2 + 6bxy + 2cy^2, \quad F_{yy}(x, y) = 2cx^2 + 6dxy + 12ey^2,$$

$$F_{yx}(x, y) = 3bx^2 + 4cxy + 3dy^2 = F_{xy}(x, y),$$

$$F_{xxz}(x, y) = 24ax + 6by, \quad F_{yyy}(x, y) = 6dx + 24ey,$$

$$F_{xyx}(x, y) = F_{yxz}(x, y) = F_{yxx}(x, y) = 6bx + 4cy,$$

$$F_{xyy}(x, y) = F_{yxy}(x, y) = F_{yyx}(x, y) = 4cx + 6dy.$$

Recordemos que para $z = F(x, y)$ algunas veces usamos los símbolos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = F_x(x, y) \quad y \quad \frac{\partial z}{\partial y} = F_y(x, y).$$

Podemos extender este simbolismo a las derivadas parciales de orden superior, para las derivadas parciales de segundo orden de $F(x, y)$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = F_{xx}(x, y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = F_{yy}(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = F_{yx}(x, y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = F_{xy}(x, y).$$

En forma semejante, representaremos las derivadas parciales de tercer orden de $u = F(x, y, z)$ por

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = F_{xxx}(x, y, z), \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = F_{yxx}(x, y, z),$$

y así sucesivamente.

Ejemplo 3. Si $z = 3x^2y - x \sin xy$, encuentre $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ y verifique que $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Solución. $\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - \sin xy$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - x \cos xy$. Por tanto,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = 6y + xy^2 \sin xy - 2y \cos xy,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = x^2 \sin xy,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = 6x + x^2 y \sin xy - 2x \cos xy = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Ejemplo 4. Si $u = e^x \sin y + e^y \sin z$, encuentre las derivadas parciales de segundo orden de u .

Solución.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= e^x \sin y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y + e^y \sin z, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = e^y \cos z, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= e^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x \sin y + e^y \sin z, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -e^y \sin z, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} &= e^x \cos y = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = e^y \cos z = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} &= 0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}. \end{aligned}$$

Hemos observado que en la mayoría de los casos consideramos, $F_{yx}(x, y) = F_{xy}(x, y)$, y hemos comentado que esto es verdadero solamente bajo ciertas condiciones. El siguiente teorema establece estas condiciones.

Teorema 13. Si $F = \{(x, y; z) \mid z = F(x, y)\}$ es una función con la propiedad de que F, F_x, F_y, F_{yx} y F_{xy} son continuas en una vecindad N de (a, b) , entonces

$$F_{yx}(a, b) = F_{xy}(a, b). \quad (97)$$

Demostración. De la fórmula (4) de la Sec. 10.2 tenemos

$$F_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h, b) - F(a, b)}{h},$$

y de la definición de $F_{yx}(x, y)$ tenemos

$$F_{yx}(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{F_x(a, b+k) - F_x(a, b)}{k}.$$

Por tanto

$$F_{yx}(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h, b+k) - F(a, b+k)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h, b) - F(a, b)}{h} \right]$$

Si ambos límites del segundo miembro de esta igualdad existen, entonces

$$\begin{aligned} F_{yx}(a, b) &= \lim_{k \rightarrow 0} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{F(a+h, b+k) - F(a, b+k) - [F(a+h, b) - F(a, b)]}{h} \right\} \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h, b+k) - F(a, b+k) - [F(a+h, b) - F(a, b)]}{hk} \right]. \end{aligned}$$

Si $U(y) = F(a+h, y) - F(a, y)$, entonces $F(a+h, b+k) - F(a, b+k) = U(b+k)$ y $F(a+h, b) - F(a, b) = U(b)$. De acuerdo con esto tenemos

$$F_{yx}(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(b+k) - U(b)}{hk} \right].$$

Bajo la hipótesis de que F y F_y son continuas en N , por el teorema del valor medio para derivadas tenemos

$$U(b+k) - U(b) = kU'(y_1), \quad y_1 \in (b, b+k).$$

Pero
y por tanto

$$U'(y_1) = F_y(a+h, y_1) - F_y(a, y_1).$$

$$F_{yx}(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_y(a+h, y_1) - F_y(a, y_1)}{h} \right].$$

Bajo la hipótesis de que F_y y F_{xy} son continuas en N , tenemos también

$$F_y(a+h, y_1) - F_y(a, y_1) = hF_{xy}(x_1, y_1), \quad x_1 \in (a, a+h).$$

Finalmente, ya que F_{xy} es continua en N , tenemos

$$\begin{aligned} F_{yx}(a, b) &= \lim_{k \rightarrow 0} \left[\lim_{h \rightarrow 0} F_{xy}(x_1, y_1) \right], \quad a < x_1 < a+h; \quad b < y_1 < b+k \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} [F_{xy}(a, y_1)] \\ &= F_{xy}(a, b). \end{aligned}$$

En la demostración dada hicimos uso de la hipótesis de que F, F_y y F_{xy} son continuas en N para probar que $F_{yx}(a, b) = F_{xy}(a, b)$. Con una demostración similar en la cual usaríamos la hipótesis de que F, F_x y F_{xy} son continuas en N , quedaría también demostrado el teorema.

Del teorema 13 se deduce que si F es una función cuyas segundas derivadas parciales son continuas en una región R , entonces $F_{yx}(x, y) = F_{xy}(x, y)$ si (x, y)

es un punto interior de R . En forma más general (con hipótesis semejantes con respecto a la continuidad) las derivadas parciales de cualquier orden son independientes del orden que se sigue para obtenerlas. Entonces

$$F_{xyz}(x, y) = F_{yzx}(x, y) = F_{xzy}(x, y),$$

$$F_{xyyz}(x, y) = F_{yyxz}(x, y) = F_{yzyx}(x, y).$$

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 12 encuentre todas las derivadas parciales de segundo orden.

1. $F(x, y) = x^4y^2 - xy^3$.

2. $F(x, y) = e^{2x} \sin y$.

3. $F(x, y) = \frac{x^4}{y} - \frac{y^2}{x}$.

4. $F(x, y) = \sin(2x + 3y)$.

5. $z = xy^2 + 2y^3 + 4$.

6. $z = x^3y^2 + y^5$.

7. $z = xy^2 - 2x^2y^4$.

8. $z = \arcsen \frac{y}{x}$.

9. $z = x \sin y$.

10. $z = e^{xy}$.

11. $u = xy + yz + zx$.

12. $u = e^x \sin y + e^y \sin z$.

13. Si $F(x, y, z) = 5x^2yz + 12y^2z^2 - 3axz^2 + 2a^2xy$, encuentre $F_{xyz}(x, y, z)$.

14. Si $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, demuestre que $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Para la función $F = \{(x, y, z) \mid z = F(x, y)\}$ de dos variables independientes x y y , la ecuación de Laplace es

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

y para la función $F = \{(x, y, z, u) \mid u = F(x, y, z)\}$ de tres variables independientes x , y y z , la ecuación de Laplace es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

En el ejercicio 14 demostramos que para la función $F = \{(x, y, z) \mid z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$ la ecuación de Laplace se satisface. En general cualquier función F puede o no satisfacer la ecuación de Laplace.

En cada uno de los ejercicios del 15 al 18 demuestre que la función dada satisface la ecuación de Laplace.

15. $F = \{(x, y, z) \mid z = e^{-x} \sin y\}$.

16. $F = \{(x, y, z) \mid z = \arctan(y/x)\}$.

17. $F = \{(x, y, z, u) \mid u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}\}$.

18. $F = \{(x, y, z) \mid z = e^x \sin y + e^y \sin x\}$.

19. Si $F = \{(x, y, z) \mid z = e^{ax+bz}\}$, donde a y b son números reales, demuestre que satisface la ecuación de Laplace si y solo si $a^2 + b^2 = 0$.

En cada uno de los ejercicios del 20 al 23 encuentre $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ y verifique que son iguales.

20. $z = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$.

21. $z = e^{(x+y)/(x-y)}$.

22. $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

23. $z = x^y$.

24. Si $z = (3x^2 - 4y^2)^3$, verifique que

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}.$$

10.13 Fórmula de Taylor con residuo para $F(x, y)$. En la Sec. 8.9 se vio que la fórmula de Taylor con residuo para $F(x)$ es

$$F(x) = F(a) + \frac{F'(a)}{1!} (x-a) + \frac{F''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots$$

$$+ \frac{F^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + R_{n+1}(x),$$

donde

$$R_{n+1}(x) = \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad \text{para } x \neq a$$

y

$$R_{n+1}(x) = 0 \quad \text{para } x = a$$

y además $a < \xi < x$ y $x \in [a, b]$.

Si $F = \{(x, y, z) \mid z = F(x, y)\}$ es una función de dos variables independientes, estableceremos una fórmula para $F(x, y)$ semejante a la fórmula de Taylor para $F(x)$.

Consideremos la función

$$F = \{(x, y, z) \mid z = F(x, y), (x, y) \in R\},$$

y sea (a, b) un punto interior de R . Supongamos que F es continua en una vecindad cerrada N de (a, b) , donde $N \subseteq R$. Supóngase también que todas las derivadas parciales hasta la de orden n de F son continuas en N , y que todas las derivadas parciales de orden $n+1$ de $F(x, y)$ existen en N .

Sean h y k números diferentes de cero tales que el punto $P(x, y)$ con coordenadas

$$x = a + ht, \quad y = b + kt, \quad t \in [0, 1] \quad (98)$$

está en N ; esto es $(a + ht, b + kt) \in N$ para $t \in [0, 1]$.

Sea \bar{F} una función tal que

$$\bar{F}(t) = F(a + ht, b + kt), \quad t \in [0, 1].$$

Por (50) tenemos

$$\bar{F}'(t) = F_x(x, y) D_1x + F_y(x, y) D_1y, \quad (99)$$

y por (98)

$$D_1x = h, \quad D_1y = k, \quad (100)$$

Por tanto

$$\bar{F}'(t) = F_x(x, y)h + F_y(x, y)k. \quad (101)$$

En forma similar

$$\bar{F}'(t) = [F_{xx}(x, y)h + F_{xy}(x, y)k] \mathbf{D}_1 x + [F_{yx}(x, y)h + F_{yy}(x, y)k] \mathbf{D}_1 y.$$

Por el teorema 13 y las hipótesis que hemos establecido referentes a la continuidad de las derivadas parciales de F , se deduce que

$$F_{yx}(x, y) = F_{xy}(x, y).$$

De la igualdad (100), y la expresión dada para $\bar{F}''(t)$, se obtiene

$$\bar{F}''(t) = F_{xx}(x, y)h^2 + 2F_{xy}(x, y)hk + F_{yy}(x, y)k^2. \quad (102)$$

De igual manera podemos demostrar que

$$\bar{F}'''(t) = F_{xxx}(x, y)h^3 + 3F_{xxy}(x, y)h^2k + 3F_{xyy}(x, y)hk^2 + F_{yyy}(x, y)k^3, \quad (103)$$

y así sucesivamente para derivadas de orden superior de $\bar{F}(t)$.

De las fórmulas dadas para $\bar{F}'(t)$, $\bar{F}''(t)$, $\bar{F}'''(t)$, de las fórmulas semejantes para derivadas superiores de $\bar{F}(t)$, y de las hipótesis referentes a la existencia y continuidad de las derivadas parciales de F en N , se deduce que \bar{F}' , \bar{F}'' , ..., $\bar{F}^{(n)}$ son continuas para $t \in [0; 1]$ y que $\bar{F}^{(n+1)}(t)$ existe en $[0; 1]$. Por tanto, podemos desarrollar $\bar{F}(t)$ en potencias de t por la fórmula de Maclaurin (Sec. 8.9), y obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{F}(t) = & \bar{F}(0) + \frac{\bar{F}'(0)}{1!}t + \frac{\bar{F}''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{\bar{F}^{(n)}(0)}{n!}t^n \\ & + \frac{\bar{F}^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!}t^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1, \end{aligned} \quad (104)$$

donde $t \in [0; 1]$. Observe que si $0 < \theta < 1$ y $0 \leq t \leq 1$, entonces $0 < \theta t < 1$, por tanto podemos escribir el término del residuo como se ha hecho; θt juega el papel de z en la fórmula (68) de la Sec. 8.9.

Si ponemos $t = 0$ en (98), obtenemos $x = a$ y $y = b$, entonces

$$\bar{F}(0) = F(a, b). \quad (105)$$

Usando el hecho de que $x = a$, $y = b$ cuando $t = 0$, obtenemos de (101), (102) y (103) respectivamente.

$$\bar{F}'(0) = F_x(a, b)h + F_y(a, b)k, \quad (106)$$

$$\bar{F}''(0) = F_{xx}(a, b)h^2 + 2F_{xy}(a, b)hk + F_{yy}(a, b)k^2, \quad (107)$$

$$\bar{F}'''(0) = F_{xxx}(a, b)h^3 + 3F_{xxy}(a, b)h^2k + 3F_{xyy}(a, b)hk^2 + F_{yyy}(a, b)k^3. \quad (108)$$

Para obtener expresiones compactas para $\bar{F}'(0)$, $\bar{F}''(0)$, $\bar{F}'''(0)$, ..., $\bar{F}^{(n)}(0)$ y $\bar{F}^{(n+1)}(\theta t)$, introducimos el siguiente simbolismo.

Escribimos:

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) F(a, b) \quad \text{para} \quad hF_x(a, b) + kF_y(a, b),$$

con esto (106) se transforma en

$$\bar{F}'(0) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) F(a, b). \quad (109)$$

En forma similar escribimos

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 F(a, b) \quad \text{en lugar de} \quad h^2 F_{xx}(a, b) + 2hk F_{xy}(a, b) + k^2 F_{yy}(a, b),$$

con esto (107) se transforma en

$$\bar{F}''(0) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 F(a, b). \quad (110)$$

De igual manera obtenemos

$$\bar{F}'''(0) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 F(a, b). \quad (111)$$

Se puede establecer por inducción que

$$\bar{F}^{(n)}(t) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^n F(x, y),$$

y así en general

$$\bar{F}^{(n)}(0) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^n F(a, b) \quad (112)$$

y

$$\begin{aligned} \bar{F}^{(n+1)}(\theta t) &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} F(x, y) \Big|_{\substack{x=a+\theta th \\ y=b+\theta tk}} \\ &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} F(a + \theta th, b + \theta tk); \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned} \quad (113)$$

Sustituyendo los resultados de las ecuaciones (105) a (113) en la ecuación (104), y usando $\bar{F}(t) = F(a + ht, b + kt)$, obtenemos

$$\begin{aligned} F(a + ht, b + kt) = & F(a, b) + t \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) F(a, b) + \frac{t^2}{2!} \\ & \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 F(a, b) \\ & + \frac{t^3}{3!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 F(a, b) + \dots + \frac{t^n}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^n F(a, b) \\ & + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} F(a + \theta th, b + \theta tk), \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned} \quad (114)$$

La igualdad (114) se verifica para $t \in [0; 1]$. Poniendo $t = 1$ en (114) obtenemos una fórmula para $F(a + h, b + k)$. De (98) tenemos que si $t = 1$, entonces

$$x = a + h, \quad y = b + k,$$

y

$$h = x - a, \quad k = y - b.$$

Entonces la fórmula que expresa $F(a + h, b + k)$ se transforma en $F(x, y)$ donde $(x, y) \in N$, y esta fórmula se puede escribir como $F(x, y) = F(a, b)$

$$\begin{aligned} & + \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right] F(a, b) \\ & + \frac{1}{2!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 F(a, b) \\ & + \frac{1}{3!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^3 F(a, b) + \dots \\ & + \frac{1}{n!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^n F(a, b) \\ & + \frac{1}{(n+1)!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{n+1} F[a + \theta(x-a), \\ & \quad b + \theta(y-b)], \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned} \quad (115)$$

La igualdad (115) se llama la **Fórmula de Taylor con residuo para $F(x, y)$** . Si $n = 2$, la forma simbólica (115) de la fórmula de Taylor con residuo para $F(x, y)$ es

$$\begin{aligned} F(x, y) = & F(a, b) + [(x-a)F_x(a, b) + (y-b)F_y(a, b)] \\ & + \frac{1}{2!} [(x-a)^2 F_{xx}(a, b) + 2(x-a)(y-b)F_{xy}(a, b) \\ & + (y-b)^2 F_{yy}(a, b)] + R_3(x, y), \end{aligned} \quad (116)$$

donde

$$\begin{aligned} R_3(x, y) = & \frac{1}{3!} [(x-a)^3 F_{xxx}(c, d) + 3(x-a)^2(y-b)F_{xxy}(c, d) \\ & + 3(x-a)(y-b)^2 F_{xyy}(c, d) + (y-b)^3 F_{yyy}(c, d)], \end{aligned} \quad (117)$$

$$a < c < x, \quad b < d < y.$$

Es conveniente escribir (115) en la forma

$$F(x, y) = P_n(x, y) + R_{n+1}(x, y),$$

donde $P_n(x, y)$ es un polinomio de grado n en x y y y $R_{n+1}(x, y)$ es la diferencia entre $F(x, y)$ y este polinomio.

Ejemplo. Escriba la fórmula de Taylor para $F(x, y) = e^x \cos y$, use $a = 0$, $b = 0$ y $n = 2$.

Solución. Aquí

$$\begin{aligned} F(x, y) &= e^x \cos y, & F(0, 0) &= e^0 \cos 0 = 1; \\ F_x(x, y) &= e^x \cos y, & F_x(0, 0) &= 1; \\ F_y(x, y) &= -e^x \sin y, & F_y(0, 0) &= 0; \\ F_{xx}(x, y) &= e^x \cos y, & F_{xx}(0, 0) &= 1; \\ F_{xy}(x, y) &= -e^x \sin y, & F_{xy}(0, 0) &= 0; \\ F_{yy}(x, y) &= -e^x \cos y, & F_{yy}(0, 0) &= -1; \\ F_{xxx}(x, y) &= e^x \cos y, & F_{xxx}(0, 0) &= e^{0x} \cos 0y; \\ F_{xxy}(x, y) &= -e^x \sin y, & F_{xxy}(0, 0) &= -e^{0x} \sin 0y; \\ F_{xyy}(x, y) &= -e^x \cos y, & F_{xyy}(0, 0) &= -e^{0x} \cos 0y; \\ F_{yyy}(x, y) &= e^x \sin y, & F_{yyy}(0, 0) &= e^{0x} \sin 0y. \end{aligned}$$

En consecuencia al usar (116) con $a = 0$ y $b = 0$

$$\begin{aligned} e^x \cos y &= 1 + x + \frac{1}{2!} (x^2 - y^2) \\ & + \frac{1}{3!} (x^3 e^{0x} \cos 0y - 3x^2 y e^{0x} \sin 0y - 3xy^2 e^{0x} \cos 0y \\ & + y^3 e^{0x} \sin 0y), \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

EJERCICIOS

1. Escriba la fórmula de Taylor para $F(x, y) = \sin x \sin y$, $a = 0$, $b = 0$, y $n = 2$.
2. Escriba la fórmula de Taylor para $F(x, y) = e^x \sin y$, $a = 0$, $b = 0$, y $n = 2$.
3. Escriba el polinomio $P_n(x, y)$ de la fórmula de Taylor (115) para $F(x, y) = \sin xy + \sin x$, $a = \pi/2$, $b = 0$, $n = 2$.
4. Escriba el polinomio $P_n(x, y)$ de la fórmula de Taylor (115) para $F(x, y) = e^{xy}$, $a = 0$, $b = 0$, y $n = 3$.

10.14 Valores máximos y mínimos de $F(x, y)$. Consideremos la función

$$F = \{(x, y; z) \mid z = F(x, y), (x, y) \in D\},$$

donde D es una región o unión de regiones.

$F(a, b)$ es un **valor máximo relativo** de $F(x, y)$ si existe una vecindad N de (a, b) donde

$$F(a, b) \geq F(x, y) \quad (118)$$

para $(x, y) \in N \cap D$. Si la desigualdad (118) se verifica para todo $(x, y) \in D$, entonces $F(a, b)$ es el **valor máximo** de $F(x, y)$; es el máximo valor en el rango de F .

$F(a, b)$ es un **valor mínimo relativo** de $F(x, y)$ si existe una vecindad N de (a, b) donde

$$F(a, b) \leq F(x, y) \quad (119)$$

para $(x, y) \in N \cap D$. Si la desigualdad (119) se verifica para todo $(x, y) \in D$.

entonces $F(a, b)$ es el valor mínimo de $F(x, y)$: es el valor mínimo en el rango de F .

Si $F(x, y)$ tiene un valor máximo relativo en (a, b) , entonces la superficie con ecuación $z = F(x, y)$ tiene un **punto relativo máximo** en (a, b, c) donde $c = F(a, b)$. En forma similar si $F(x, y)$ tiene un valor mínimo relativo en (a, b) , entonces la superficie con ecuación $z = F(x, y)$ tiene un **punto mínimo relativo** en (a, b, c) .

Los **valores extremos** de $F(x, y)$ son los valores máximos y mínimos relativos de $F(x, y)$.

Teorema 14. Si (a, b) es un punto interior del dominio de la función $F = \{(x, y; z) \mid z = F(x, y)\}$, si F_x y F_y son continuas en (a, b) y si $F(a, b)$ es un valor extremo de $F(x, y)$, entonces

$$F_x(a, b) = 0, \quad F_y(a, b) = 0. \quad (120)$$

Demostración. La hipótesis de $F(x, y)$ tiene un valor extremo en (a, b) implica que $F(x, b)$ tiene un valor extremo en a , y por lo tanto $F_x(a, b) = 0$ (Vea Sec. 4.2, en particular teorema 5). En forma semejante, si $F(x, y)$ tiene un valor extremo en (a, b) implica que $F(a, y)$ tiene un valor extremo en b , y por lo tanto $F_y(a, b) = 0$.

Así el teorema queda demostrado ■

El teorema 14 puede interpretarse geoméricamente al establecer que si la superficie con ecuación $z = F(x, y)$, tiene un punto máximo relativo o mínimo relativo en $P(a, b, c)$ y si la superficie tiene un plano tangente en este punto, entonces este plano tangente es paralelo al plano xy .

Si F_x y F_y son continuas en (a, b) las igualdades (120) constituyen una **condición necesaria** para que $F(a, b)$ sea un valor extremo de $F(x, y)$ para (a, b) punto interior de D . Si (a, b) es un punto interior de D , si F_x y F_y son continuas en (a, b) y si $F(a, b)$ es un valor extremo de $F(x, y)$, entonces

$$(a, b) \in \{(x, y) \mid F_x(x, y) = 0 \text{ y } F_y(x, y) = 0\}.$$

El conjunto $\{(x, y) \mid F_x(x, y) = 0 \text{ y } F_y(x, y) = 0\}$ se llama conjunto de **pares críticos** de $F(x, y)$.

Sin embargo, necesitamos criterios adicionales para determinar cuando una pareja crítica produce un valor máximo relativo, un valor mínimo relativo o ninguno de estos valores. El teorema 15 proporciona tal criterio.

Por ejemplo, consideremos las siguientes situaciones:

$$(i) \ z = F(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad F_x(x, y) = -\frac{x}{z}, \quad F_y(x, y) = -\frac{y}{z}, \quad z \neq 0.$$

$$(ii) \ z = F(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad F_x(x, y) = x, \quad F_y(x, y) = y.$$

$$(iii) \ z = F(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2), \quad F_x(x, y) = x, \quad F_y(x, y) = -y.$$

Observe que para cada una de estos casos $(0, 0)$ es una solución de la pareja de ecuaciones $F_x(x, y) = 0, F_y(x, y) = 0$. Por tanto para cada una de estas situaciones $(0, 0)$ es un par crítico para $F(x, y)$.

En (i), $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ es una ecuación de un hemisferio con un punto máximo relativo en $(0, 0, a)$. En (ii), $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ es una ecuación de un paraboloide circular con un punto mínimo relativo en $(0, 0, 0)$. En (iii) $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ es una ecuación de un paraboloide hiperbólico sin punto máximo relativo ni punto mínimo relativo en $(0, 0, 0)$.

Teorema 15. Sea $F = \{(x, y; z) \mid z = F(x, y), (x, y) \in D\}$ y (a, b) un punto interior de D . Suponga que F , y todas las derivadas parciales de orden uno y dos de F , son continuas en una vecindad cerrada N de (a, b) donde $N \subseteq D$, suponga además que todas las derivadas parciales de tercer orden de $F(x, y)$ existen en N . Suponga además que

$$F_x(a, b) = 0, \quad F_y(a, b) = 0,$$

y sea

$$K(x, y) = [F_{xy}(x, y)]^2 - F_{xx}(x, y)F_{yy}(x, y).$$

Entonces:

(i) $F(a, b)$ es un valor máximo relativo de $F(x, y)$ si $K(a, b) < 0$ y $F_{xx}(a, b) < 0$.

(ii) $F(a, b)$ es un valor mínimo relativo de $F(x, y)$ si $K(a, b) < 0$ y $F_{xx}(a, b) > 0$.

(iii) $F(a, b)$ no es un valor extremo de $F(x, y)$ si $K(a, b) > 0$.

Demostración. Usamos la fórmula (116) con

$$x = a + h, \quad y = b + k,$$

y en consecuencia

$$x - a = h, \quad y - b = k,$$

donde h y k son números diferentes de cero tales que $(a + h, b + k) \in N$. Para simplificar hacemos

$$A = F_{xx}(a, b), \quad B = F_{xy}(a, b), \quad C = F_{yy}(a, b),$$

por lo que

$$K(a, b) = B^2 - AC.$$

Como $F_x(a, b) = 0$ y $F_y(a, b) = 0$, obtenemos por (116) que

$$F(a + h, b + k) - F(a, b) = \frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) + \frac{1}{6}R,$$

donde

$$R = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 F(a + \theta h, b + \theta k), \quad 0 < \theta < 1.$$

Es posible demostrar que existe un número positivo d con la propiedad de que cuando $|h| < d$ y $|k| < d$, entonces

$$\frac{1}{2}|Ah^2 + 2Bhk + Ck^2| > \frac{1}{6}|R|,$$

y por lo tanto con las restricciones anteriores para h y k .

Signo de $[F(a + h, b + k) - F(a, b)] = \text{signo de } [Ah^2 + 2Bhk + Ck^2]$.

Por la teoría de las formas cuadráticas sabemos que el signo de

$$Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 \quad (121)$$

permanece constante [esto es, la expresión $Ah^2 + 2Bhk + Ch^2$ es positiva para $(h, k) \in Re \times Re$, o es negativa para $(h, k) \in Re \times Re$] si $B^2 - AC < 0$, esto es si $AC > B^2$, lo cual implica que A y C tengan el mismo signo. Además, este signo, o sea el de A , es el signo constante de la expresión (121). De esto podemos deducir que:

Signo de $[F(a+h, b+k) - F(a, b)] = \text{Signo de } A = \text{Signo de } F_{xx}(a, b)$.

Con lo cual quedan demostrados (i) y (ii).

Si $B^2 - AC > 0$, el signo de $Ah^2 + 2Bhk + Ch^2$ no permanece constante para $(h, k) \in Re \times Re$. Por tanto, si $K(a, b) = B^2 - AC > 0$, entonces $F(a, b)$ no es un valor extremo de $F(x, y)$.

Ejemplo 1. Encuentre los valores extremos de $F(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 6x + 1$.

Solución.

$$F_x(x, y) = 2x + y + 6, \quad F_y(x, y) = x + 2y.$$

Observe que F_x y F_y son continuas en $Re \times Re$. Los pares críticos de $F(x, y)$ son las soluciones del sistema de ecuaciones

$$2x + y + 6 = 0, \quad x + 2y = 0.$$

El único par crítico es $(-4, 2)$.

Además

$$F_{xx}(x, y) = 2, \quad F_{xy}(x, y) = 1, \quad F_{yy}(x, y) = 2.$$

Es obvio que todas las derivadas parciales de segundo orden son continuas y todas las derivadas de tercer orden existen, por tanto podemos aplicar el teorema 15.

$$F_{xx}(-4, 2) = 2, \quad F_{xy}(-4, 2) = 1, \quad F_{yy}(-4, 2) = 2.$$

De donde

$$K(-4, 2) = [F_{xy}(-4, 2)]^2 - F_{xx}(-4, 2)F_{yy}(-4, 2) = -3 < 0.$$

Como $F_{xx}(-4, 2) > 0$, por el teorema 15(ii) se deduce que $F(-4, 2)$ es un valor mínimo relativo de $F(x, y)$. Este valor mínimo relativo es -11 , porque $F(-4, 2) = -11$.

Ejemplo 2. Encuentre los valores extremos de $F(x, y) = x^2 + y^2 - \frac{1}{3}x^4$.

Solución.

$$F_x(x, y) = 2x - \frac{4}{3}x^3, \quad F_y(x, y) = 2y.$$

Está claro que F_x y F_y son continuas en $Re \times Re$. Los pares críticos de $F(x, y)$ son las soluciones del sistema

$$2x - \frac{4}{3}x^3 = 0, \quad 2y = 0.$$

Al resolverlo encontramos tres pares críticos, $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.

$$F_{xx}(x, y) = 2 - \frac{4}{3}x^2, \quad F_{xy}(x, y) = 0, \quad F_{yy}(x, y) = 2.$$

La siguiente tabla es útil para probar los pares críticos.

x	y	z	A	B	C	$K(a, b) = B^2 - AC$
0	0	0	2	0	2	-4
1	0	$\frac{1}{2}$	-4	0	2	8
-1	0	$\frac{1}{2}$	-4	0	2	8

De la información en la primera línea de la tabla y usando el teorema 15(ii), se concluye que $F(0, 0) = 0$ es un valor mínimo relativo de $F(x, y)$. De la información en la segunda y tercera líneas de la tabla y usando el teorema 15(iii) se concluye que $F(1, 0)$ no es un valor mínimo ó máximo relativo y que $F(-1, 0)$ tampoco es un valor mínimo ó máximo relativo.

Ejemplo 3. Encuentre las dimensiones del paralelepípedo rectangular de volumen máximo que tiene tres de sus caras en los planos coordenados y un vértice en el plano con ecuación $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, donde $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Encuentre también dicho volumen máximo. Vea Fig. 10.18.

Solución. Sean x , y y z las dimensiones del paralelepípedo, y sea v su volumen. Entonces,

$$v = xyz \quad \text{donde} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

o

$$v = cxy \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right), \quad 0 < x < a; \quad 0 < y < b; \quad 0 < z < c.$$

Hacemos

$$F(x, y) = cxy \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right).$$

Entonces

$$F_x(x, y) = cy \left(1 - \frac{2x}{a} - \frac{y}{b}\right), \quad F_y(x, y) = cx \left(1 - \frac{2y}{b} - \frac{x}{a}\right),$$

$$F_{xx}(x, y) = -\frac{2c}{a}y, \quad F_{xy}(x, y) = c \left(1 - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b}\right), \quad F_{yy}(x, y) = -\frac{2c}{b}x.$$

La única solución posible del sistema $F_x(x, y) = 0$, $F_y(x, y) = 0$ es $x = \frac{1}{3}a$, $y = \frac{1}{3}b$, y con estos valores $z = \frac{1}{3}c$.

$$F_{xx}\left(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}b\right) = -\frac{2bc}{3a}, \quad F_{xy}\left(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}b\right) = -\frac{c}{3}, \quad F_{yy}\left(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}b\right) = -\frac{2ac}{3b},$$

y

$$K\left(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}b\right) = \frac{c^2}{9} - \frac{4c^2}{9} < 0.$$

Como $F_{xx}(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}b) < 0$, se deduce por el teorema 15(i) que $F(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}b)$ es valor máximo relativo de $F(x, y)$. Por la forma de la figura es fácil verificar geométricamente los resultados obtenidos analíticamente. Concluiremos entonces que el volumen v es máximo para $x = \frac{1}{3}a$, $y = \frac{1}{3}b$, $z = \frac{1}{3}c$, y que este valor máximo de v es $\frac{1}{27}abc$.

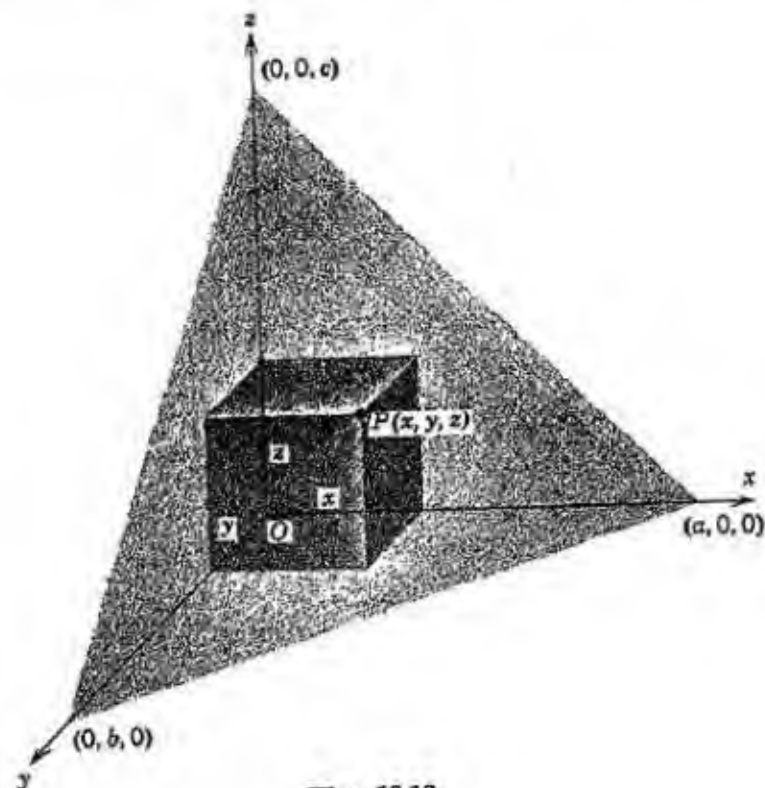


Fig. 10.18

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 6 investigue los valores extremos de $F(x, y)$.

- $F(x, y) = 34x^2 - 24xy + 41y^2$.
- $F(x, y) = x^2y - 4x^2 - y^2$.
- $F(x, y) = x^2 + 5y^2 - 6x - 10y + 15$.
- $F(x, y) = 4x + 6y - 2x^2 - 3y^2 - 3$.
- $F(x, y) = 3axy - x^3 - y^3$, $a > 0$.
- $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3x$.

7. Encuentre tres números positivos cuya suma es el número positivo a y cuyo producto sea máximo.

8. Encuentre el punto $P(a, b, c)$ en la gráfica de $z = \frac{1}{3}y^3 - x^2 - xy + 3x$ que tenga la máxima coordenada z .

9. Investigue los puntos máximos y mínimos relativos de la gráfica de $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 2cz$, $c > 0$. ¿Qué clase de superficie es? Grafíquela.

10. Investigue los puntos máximos y mínimos relativos de la gráfica de $z = x^2 + y^2 - x^2 - y^2 + 1$.

11. Encuentre el producto máximo de cuatro números reales positivos cuya suma sea 8.

12. Encuentre el máximo valor de $u = xyz$, si x , y y z son números reales positivos tales que $4x + 2y + z = 12$.

EJERCICIOS ADICIONALES AL CAPITULO 10

En cada uno de los ejercicios del 1 al 4 describa y grafique el dominio D de la función F para la cual la correspondiente de (x, y) ó (x, y, z) se especifica. Diga si el dominio es una región, región abierta o región cerrada.

- $F(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.
- $F(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$.
- $F(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$.
- $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4} + \ln(9 - x^2 - y^2 - z^2)$.
- Si $F(x, y) = x^3 + 3xy + y^2$, encuentre $F_x(x, y)$ y $F_y(x, y)$ y especifique las funciones F_x y F_y . Encuentre los valores de $F(x, y)$, $F_x(x, y)$ y $F_y(x, y)$ en $(1, 2)$.
- Si $F(x, y, z) = 2x^2 - 3xy + y^2 - 4z^2$, encuentre $F_x(x, y, z)$, $F_y(x, y, z)$ y $F_z(x, y, z)$.

7. Si $z = \frac{ax + by}{cx + by}$, encuentre $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

8. Si $z = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$, encuentre $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9. Encuentre una ecuación del plano tangente y una representación paramétrica de la normal a la gráfica de $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 3x - 12 = 0$ en $P(2, -1, 2)$.

10. Para $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$, encuentre $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$.

En los ejercicios 11 y 12 encuentre una función F (si existe) que satisfaga las condiciones dadas.

11. $F_x(x, y) = 2x - \sin y$, $F_y(x, y) = -x \cos y$.

12. $F_x(x, y) = \sin \frac{y}{x} - \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}$; $F_y(x, y) = \cos \frac{y}{x}$.

13. Encuentre una ecuación del plano tangente y una representación paramétrica de la normal a la gráfica de $5z = x^2 + 4y^2$ en el punto $P(3, -2, 5)$.

14. Encuentre una ecuación del plano tangente y una representación paramétrica de la normal a la gráfica de $z = e^{-x} \sin y$, (a) en el punto donde $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$; (b) en el punto donde $x = 0$, $y = 0$.

15. Si $F(x, y) = \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^2)^3}$, encuentre (a) $\lim_{x \rightarrow 0} F(x, mx)$; (b) $\lim_{x \rightarrow 0} F(x, \sqrt{x})$. ¿Existe $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} F(x, y)$?

16. Seleccione dos curvas con ecuaciones respectivas $y = G_1(x)$ y $y = G_2(x)$ que pasen por el origen y use el método del ejercicio 15 para demostrar que para

$$F(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}; \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} F(x, y) \text{ no existe.}$$

17. Si $z = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$, demuestre que $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$.
18. (a) Para $z = x^2 + xy$, encuentre dz y Δz en función de $x, y, \Delta x, \Delta y$.
(b) Use los resultados de (a) para calcular dz y Δz si $x = 1, y = 2, \Delta x = 0.02, \Delta y = 0.01$.
19. Encuentre el punto del primer octante que pertenece a la curva con ecuaciones $z^2 = x^2 + y^2, x = 3$ en el cual la pendiente de la tangente a dicha curva es $\frac{3}{2}$.
20. Encuentre una ecuación del plano que pasa por el punto $(2, 1, -2)$ y es paralelo al plano tangente a la gráfica de $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ en $(2, -2, 2)$.
21. Encuentre una representación paramétrica de la tangente a la curva con ecuaciones $z = x^2 + 2y^2, x = 2$ en el punto $(2, 1, 6)$.
22. Encuentre la pendiente de la curva C que es la intersección de las gráficas de $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 24$ y $x = 2$ en el punto $(2, 3, \frac{1}{2}\sqrt{2})$. Grafique la parte de la superficie con ecuación $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 24$ que está en el primer octante e indique sobre esta gráfica la curva C y la línea tangente a C en $(2, 3, \frac{1}{2}\sqrt{2})$. Dé una representación paramétrica de esta tangente.
23. Si $z = F(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$, donde $x = 2t$, y $y = e^t$, encuentre $D_t z$.
24. Si $u = F(x, y, z)$ donde $x = 2t, y = t^2$ y $z = t^3$, encuentre $D_t u$.
25. Si $z = \arctan \frac{y}{x}$, donde $y = e^x$, encuentre $D_x z$.
26. Si $u = y \arctan \frac{z}{x}$, donde $y = 2x$ y $z = x^2$, encuentre $D_x u$.
27. Encuentre el valor del ángulo θ para el cual la derivada direccional de $z = x^2 + y^2$ en $M(3, 4)$ es máxima y encuentre dicho valor máximo.
28. Si $F(x, y, z) = \cos(x + y + z)$, $x = rs, y = r^2 + s^2, z = r^2 - s^2$, encuentre $\bar{F}_r(r, s)$ y $\bar{F}_s(r, s)$.
29. Suponga que una función $G = \{(x, y, z) \mid z = G(x, y)\}$ se expresa por la ecuación $z^2 + xz - y^2 = 2$, y encuentre $G_x(x, y)$ y $G_y(x, y)$.
30. Encuentre los números directores de la normal a la gráfica de $\sin xy + \sin yz + \sin zx = 1$ en el punto $(1, \frac{\pi}{2}, 0)$.
31. Un punto $P(x, y, z)$ se mueve sobre la curva C que es la intersección de la superficie con ecuación $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ y la superficie cilíndrica con representación paramétrica $x = t, y = t^2$. Encuentre la razón de cambio de z con respecto a t en el punto donde $t = 2$.
32. Si $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + xy}$, encuentre $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
33. Si $z = x^2 \sin(x^2 + y^2)$, verifique que $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.
34. Si $z = \sin(3x - y)$, encuentre $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
35. Demuestre que el polinomio $P_n(x, y)$ de la fórmula de Taylor (115) para $F(x, y) = e^x \sin y, a = 2, b = 1, y n = 2$ es

$$P_2(x, y) = e^2 \sin 1 + e^2 (\sin 1)(x - 2) + e^2 (\cos 1)(y - 1) + \frac{1}{2} e^2 (\sin 1)(x - 2)^2 + e^2 (\cos 1)(x - 2)(y - 1) + \frac{1}{2} e^2 (\sin 1)(y - 1)^2$$
36. Determine el polinomio $P_n(x, y)$ de la fórmula de Taylor (115) para $F(x, y) = \sin(2x - y), a = 0, b = 0, y n = 3$.
37. Determine los valores extremos de $F(x, y) = x^3 + y^4 - 32y + 2$.

Integrales múltiples

11.1 Integrales dobles. En el capítulo 5 definimos la integral (según Riemann) de una función F de una variable independiente de un intervalo cerrado $[a; b]$. Este concepto de integral se puede extender a una función F de dos variables independientes en una región cerrada de dos dimensiones R y a funciones de más de dos variables independientes en regiones cerradas de más dimensiones. Para definir una integral de una función de dos variables independientes necesitamos el concepto de región acotada y el concepto de red N en una región acotada. Una región en el espacio 2 es una **región acotada** si existe un rectángulo con la propiedad de que cada punto de la región es un punto del interior del rectángulo. Una región acotada puede ser abierta o cerrada o ni abierta ni cerrada. Por ejemplo, la gráfica de $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 25\}$ es una región abierta acotada; la región que consiste de los puntos en el interior y sobre una elipse es una región acotada cerrada. Una región puede ser cerrada sin ser acotada; por ejemplo la gráfica de $\{(x, y) \mid y \geq 3\}$ es una región cerrada pero no es acotada. Una curva simple cerrada C (definida en la Sec. 8.2) divide el plano en dos regiones, una región acotada R_1 , que es el interior de C y una región no acotada R_2 , el exterior de C . La curva C es la frontera de ambas regiones, y si los puntos de C pertenecen a una de las regiones, esta región es cerrada y la otra región es abierta.

Si R es una región acotada cuya frontera es una curva simple cerrada C y si C se compone de partes de las gráficas de un número finito de ecuaciones $E_1(x, y) = 0, E_2(x, y) = 0, \dots, E_n(x, y) = 0$, describiremos R como la región limitada por las gráficas de $E_1(x, y) = 0, E_2(x, y) = 0, \dots, E_n(x, y) = 0$. Por ejemplo, la región acotada de la Fig. 11.1(a) se describe como la región limitada por las gráficas de $y^2 = 4x, x - y + 1 = 0$, y $y = -4$; la región acotada de la Fig. 11.1(b) se describe como la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{16 - x^2}$ y $y = 2$.

El concepto de una red N en una región R tiene un papel semejante al concepto de una partición P de un intervalo $[a; b]$ usado en la definición de $\int_a^b F(x) dx$ (vea Secs. 5.3 y 5.4).

Supongamos que R es una región cerrada y acotada interior al rectángulo S , donde S es la gráfica de

$$\{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\},$$

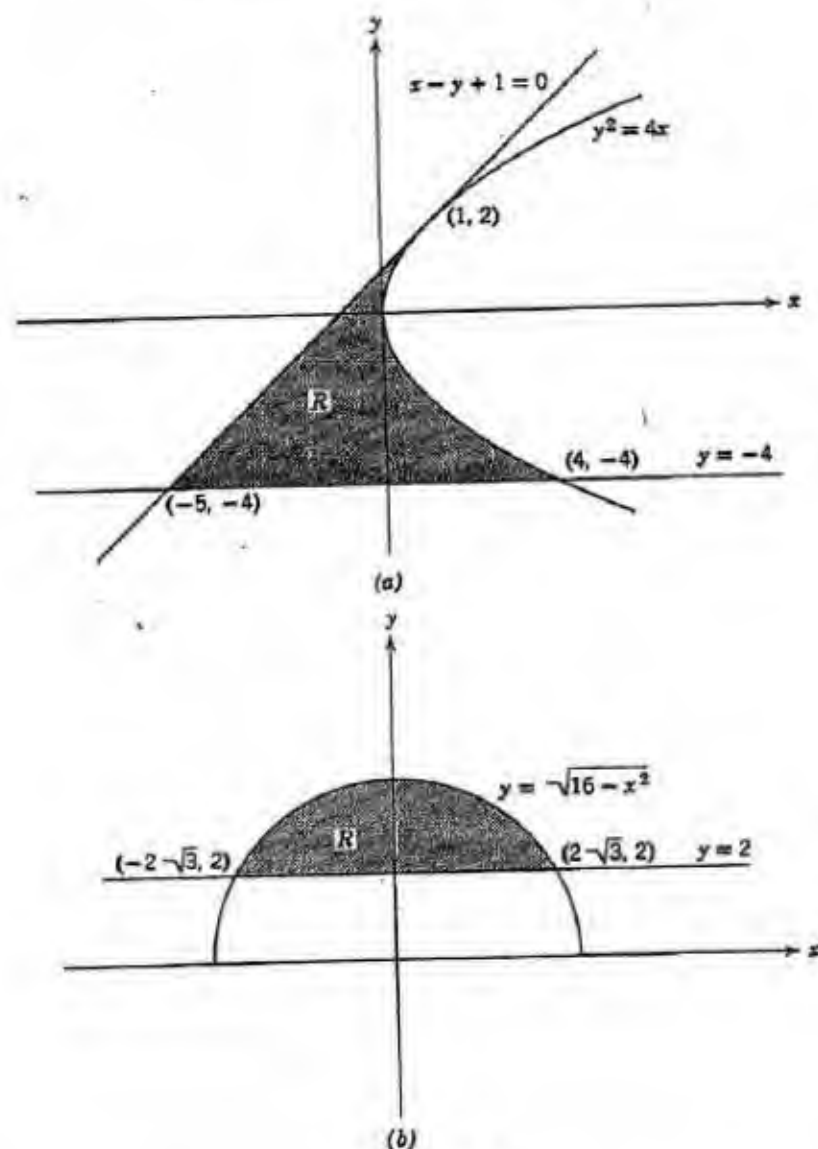


Fig. 11.1

como se indica en la Fig. 11.2. Sea P_n una partición de $[a; b]$ determinada por el conjunto $\{x_0', x_1', \dots, x_{n-1}', x_n'\}$, sea P_m una partición de $[c; d]$ determinada por el conjunto $\{y_0', y_1', \dots, y_{m-1}', y_m'\}$ y consideremos el conjunto de los rectángulos formados por líneas paralelas a los ejes coordenados, que pasan por los extremos de los subintervalos de cada una de estas particiones (Fig. 11.2). La colección de rectángulos (cerrados) cuyos puntos pertenecen a R se llama una

red N de la región R . Los rectángulos sombreados en la Fig. 11.2 forman una red en la región R . Si una red en R se compone de k rectángulos, representamos esta red por el símbolo N_k . La norma \mathcal{N}_N de una red N es la longitud de la diagonal más larga de los rectángulos de que consta la red. Si N_k es una red de k rectángulos en una región R , estos rectángulos (cerrados) se representarán por

$$R_1, R_2, \dots, R_i, \dots, R_k,$$

y sus áreas se representarán por

$$\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_i, \dots, \Delta A_k,$$

respectivamente. Un aumento T_k de la red N_k es un conjunto de k puntos, que hayan sido seleccionados escogiendo uno de cada rectángulo de la red; esto es

$$T_k = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_i, y_i), \dots, (x_k, y_k)\},$$

donde

$$(x_i, y_i) \in R_i.$$

Sea F una función de dos variables independientes cuyo dominio contiene a

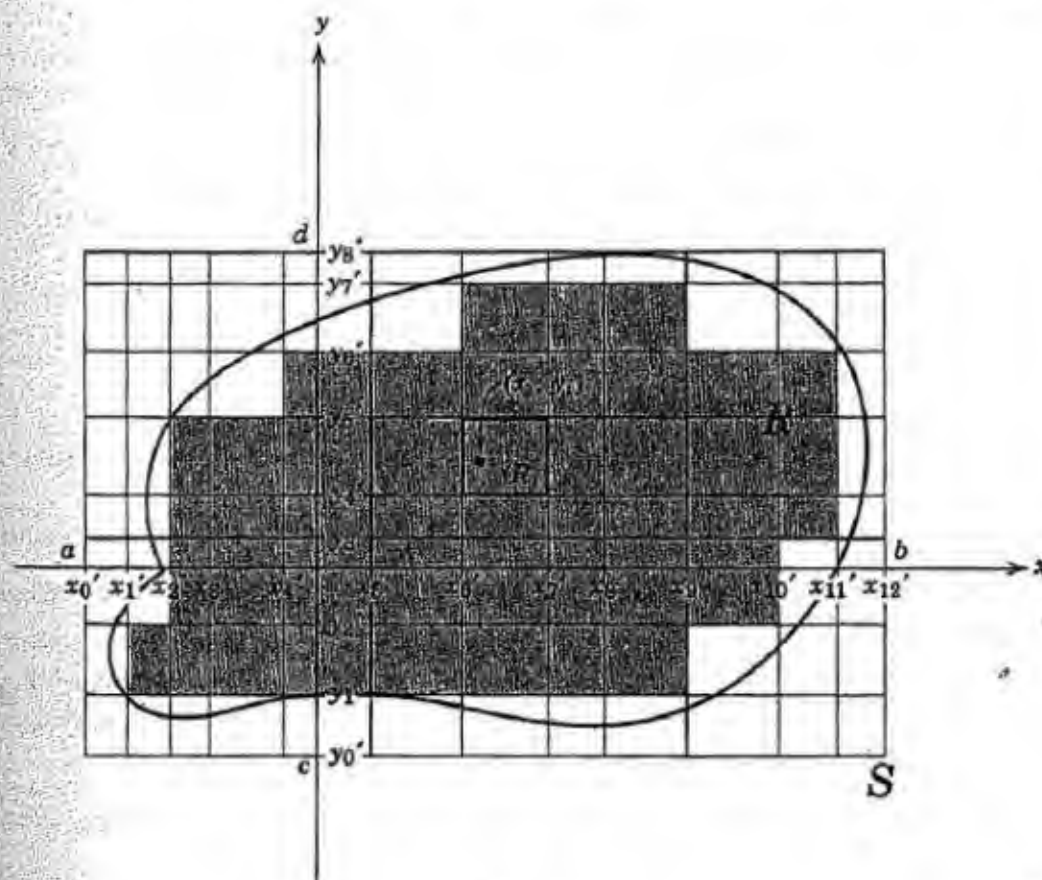


Fig. 11.2

la región cerrada acotada R , sea N_k una red de R , sea T_k un aumento de N_k , y formemos la suma

$$F(x_1, y_1) \Delta A_1 + F(x_2, y_2) \Delta A_2 + \cdots + F(x_i, y_i) \Delta A_i + \cdots + F(x_k, y_k) \Delta A_k = \sum_{i=1}^k F(x_i, y_i) \Delta A_i.$$

Si existe un número I con la propiedad de que para cada $\varepsilon > 0$ corresponde una $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^k F(x_i, y_i) \Delta A_i - I \right| < \varepsilon$$

para todas las redes N_k y aumentos T_k con norma \mathcal{N}_N menor que δ , entonces este (único) número I es la **integral doble** (según Riemann) de F en la región R . Cuando este número I existe decimos que F es (según Riemann) **integrable** en R y lo representamos por:

$$I = \iint_R F(x, y) dA.$$

La existencia de un número I con la propiedad mencionada en la definición de una integral doble depende no solamente de la naturaleza de la función F sino también de la región R . Hay varios teoremas que dan las condiciones de la región R y de la función F suficientes para la existencia de $\iint_R F(x, y) dA$. Uno de los más simples y útiles es el siguiente que enunciamos sin demostrarlo.*

Teorema 1. Si F es una función de dos variables independientes que es continua en una región cerrada acotada R y si la frontera de R es una curva cerrada simple y rectificable,† entonces $\iint_R F(x, y) dA$ existe.

Se debe enfatizar que las condiciones dadas en el teorema 1 son suficientes pero no necesarias para la existencia de la integral doble.

El cálculo del valor de una integral doble directamente de la definición (como se hizo para ejemplos particulares de $\int_a^b f(x) dx$ en la Sec. 5.4) es muy tedioso aún para la mayoría de las funciones y regiones, dicho cálculo es prácticamente imposible si se hace a mano. Afortunadamente hay un teorema para integrales dobles que corresponde al teorema 2 de la Sec. 5.5 para integrales de funciones de una variable independiente. Este teorema se dará en la Sec. 11.3.

* Para una demostración de este teorema vea *Real Variables* de Olmsted, Secs. 1303, 1305 y 1306.

† Vea la Sec. 8.6 para las condiciones suficientes para que la curva sea rectificable.

EJERCICIOS

En cada uno de los siguientes ejercicios dibuje una gráfica de la región R . Dé las coordenadas de los puntos de intersección de las ecuaciones que determinan la gráfica.

1. R es la región limitada por las gráficas de $y = x^2$ y $y^2 = x$.
2. R está limitada por las gráficas de $x + y = 2$ y $y = x^2$.
3. R está limitada por las gráficas de $y = 9 - x^2$ y $x - y + 3 = 0$.
4. R está limitada por las gráficas de $xy = 6$ y $x + y = 5$.
5. R está limitada por las gráficas de $x + y = 5$, $x = 0$ y $y = 0$.
6. R está limitada por las gráficas de $y = \sqrt{1 - x^2}$ y $y = 0$.
7. R está limitada por las gráficas de $x = \sqrt{16 - y^2}$ y $x = 2$.
8. R está limitada por las gráficas de $y = \sqrt{25 - x^2}$ y $y = 6 - \sqrt{16 - x^2}$.

11.2 Integrales iteradas de $F(x, y)$. En el cálculo y aplicaciones de las integrales dobles estaremos interesados en dos tipos de regiones.

Sea R una región acotada cuya frontera es una curva cerrada simple y rectificable. Si cada línea que pasa por un punto interior de R y perpendicular al

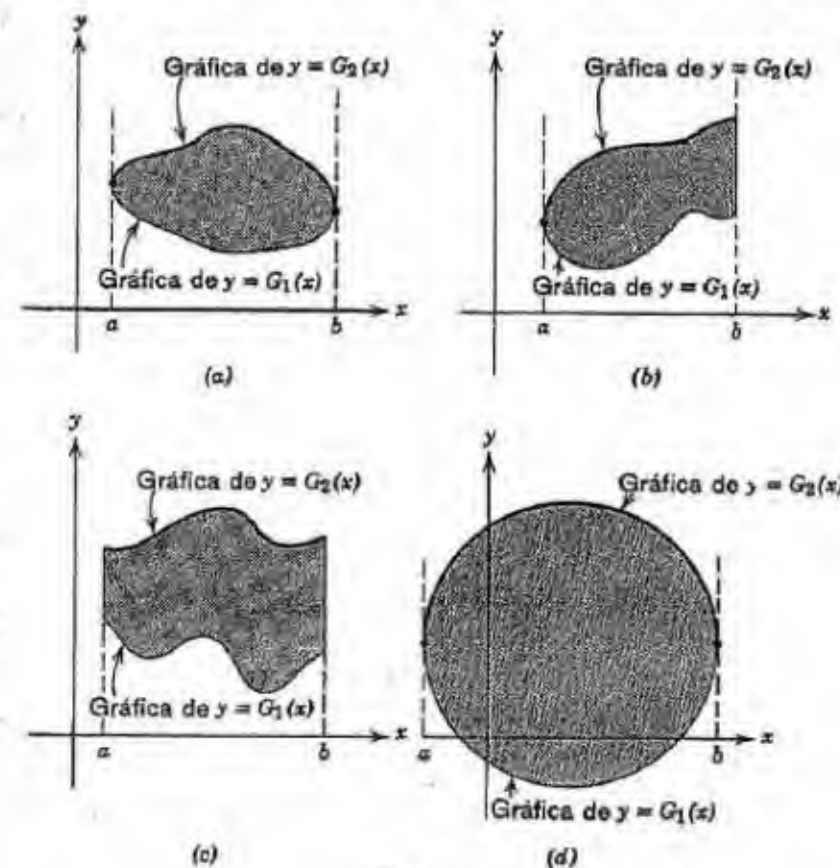


Fig. 11.3

eje x , intersecta a la frontera de R en sólo dos puntos, entonces R se llama **región del tipo T_1** . La figura 11.3 muestra varios ejemplos de regiones del tipo T_1 . Si cada línea que pasa por un punto interior de R y perpendicular al eje y intersecta a la frontera de R sólo en dos puntos, entonces R se llama **región del tipo T_2** . La figura 11.4 muestra varios ejemplos de regiones del tipo T_2 . Si R es a la vez del tipo T_1 y T_2 se llama **región del tipo $T_{1,2}$** . Las figuras 11.3(a) y (d), 11.4(a) y (d) son ejemplos de regiones del tipo $T_{1,2}$.

Sea $F = \{(x, y) \mid z = F(x, y), (x, y) \in R\}$ una función de dos variables independientes que es continua en R . Supongamos que R es una región del tipo T_1 y que $G_1 = \{(x, y) \mid y = G_1(x), x \in [a; b]\}$ y $G_2 = \{(x, y) \mid y = G_2(x), x \in [a; b]\}$ son funciones continuas de una variable independiente con la propiedad de que si $x_1 \in [a; b]$, y $G_1(x_1) \leq y_1 \leq G_2(x_1)$, entonces el punto $(x_1, y_1) \in R$. Bajo estas condiciones la función V (de una variable independiente) definida por:

$$V(y) = F(x_1, y)$$

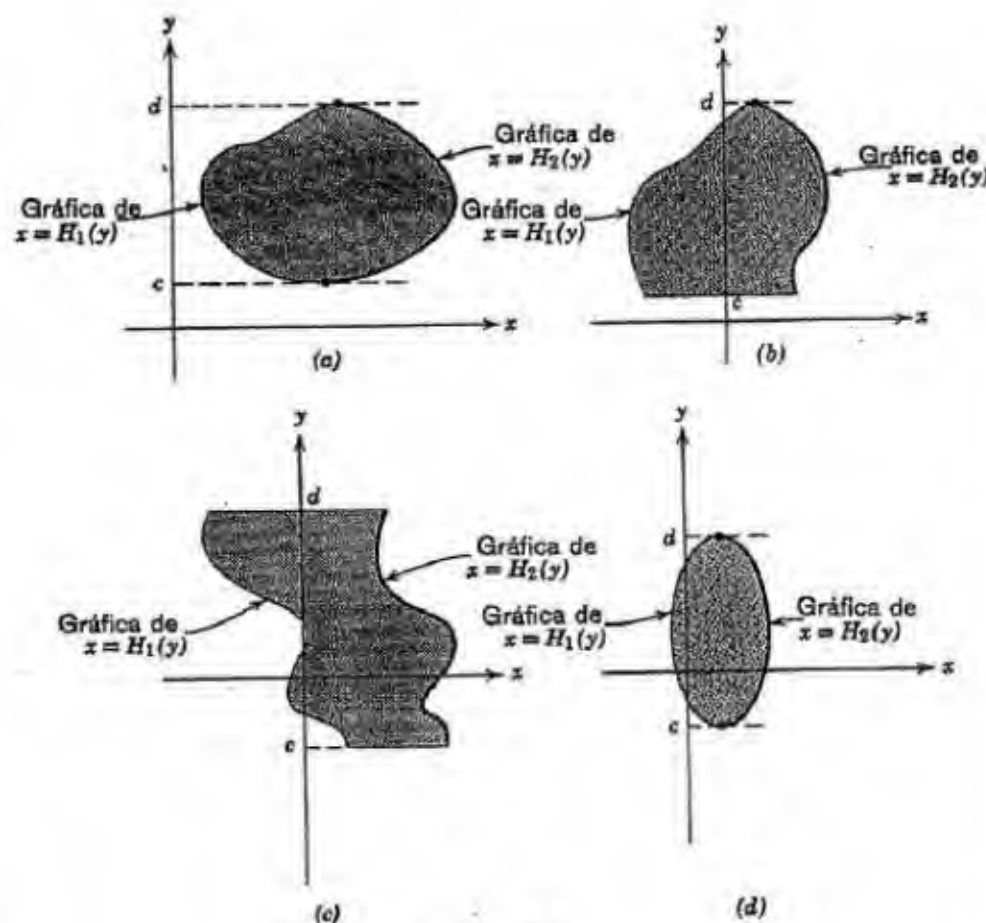


Fig. 11.4

es continua en el intervalo $[G_1(x_1); G_2(x_1)]$ y la integral definida

$$\int_{G_1(x_1)}^{G_2(x_1)} F(x_1, y) dy$$

existe para toda $x \in [a; b]$. Entonces existe una función K de una variable independiente para la cual

$$K(x) = \int_{G_1(x)}^{G_2(x)} F(x, y) dy, \quad x \in [a; b]. \quad (1)$$

En otras palabras, si U es una función de dos variables independientes para la cual

$$D_y U(x, y) = F(x, y)$$

entonces, para $x \in [a; b]$,

$$K(x) = \int_{G_1(x)}^{G_2(x)} F(x, y) dy = U(x, y) \Big|_{y=G_1(x)}^{y=G_2(x)} = U[x, G_2(x)] - U[x, G_1(x)]. \quad (2)$$

La integral de la igualdad (1) se lee, la integral de $F(x, y)$ con respecto a y en el intervalo $[G_1(x); G_2(x)]$. La igualdad (2) proporciona un medio para calcular esta integral.

Ejemplo 1. Calcule $\int_{2x-1}^{x^2} (xy - x^2) dy$.

Solución. Como deseamos integrar con respecto a y , necesitamos $U(x, y)$ tal que $D_y U(x, y) = xy - x^2$, y ocurre que $U(x, y) = \frac{1}{2}xy^2 - x^2y$ tiene esta propiedad. Por tanto

$$\begin{aligned} \int_{2x-1}^{x^2} (xy - x^2) dy &= \left[\frac{xy^2}{2} - x^2y \right]_{y=2x-1}^{y=x^2} = \left(\frac{x^3}{2} - x^4 \right) \\ &\quad - \left[\frac{x(2x-1)^2}{2} - x^2(2x-1) \right] = \frac{x^5}{2} - x^4 + x^2 - \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Aquí la función K de (1) está dada

$$K(x) = \frac{x^5}{2} - x^4 + x^2 - \frac{x}{2}.$$

Para la función F definida por (1) podemos considerar

$$\int_a^b K(x) dx = \int_a^b \left(\int_{G_1(x)}^{G_2(x)} F(x, y) dy \right) dx.$$

Esta integral se llama **integral iterada de $F(x, y)$** . Usaremos el símbolo

$\int_a^b \int_{G_1(x)}^{G_2(x)} F(x, y) dy dx$ para designar esta integral, esto es

$$\int_a^b \int_{G_1(x)}^{G_2(x)} F(x, y) dy dx = \int_a^b \left(\int_{G_1(x)}^{G_2(x)} F(x, y) dy \right) dx. \quad (3)$$

Note que en esta integral iterada de $F(x, y)$ los límites de integración de la integral interior son las correspondientes de x bajo las funciones de G_1 y G_2 respectivamente, y que los límites de integración de la integral exterior son constantes.

Ejemplo 2. Calcule $\int_0^1 \int_{2x-1}^{x^2} (xy - x^2) dy dx$.

Solución. Del ejemplo 1 tenemos

$$\int_{2x-1}^{x^2} (xy - x^2) dy = \frac{x^6}{2} - x^4 + x^2 - \frac{x}{2},$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{2x-1}^{x^2} (xy - x^2) dy &= \int_0^1 \left(\frac{x^6}{2} - x^4 + x^2 - \frac{x}{2} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^7}{12} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4} \right]_0^1 = -\frac{1}{30}. \end{aligned}$$

Debe resultar evidentemente que podemos definir otra integral iterada de $F(x, y)$ en la cual la primera integración se hace con respecto a x , y se escribe

$$\int_c^d \int_{H_1(y)}^{H_2(y)} F(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{H_1(y)}^{H_2(y)} F(x, y) dx \right) dy. \quad (4)$$

Aquí los límites de integración de la integral interior son las correspondientes de y bajo las funciones H_1 y H_2 . Estas funciones se suponen continuas en $[c; d]$ y si $y_1 \in [c; d]$ y $H_1(y_1) \leq x_1 \leq H_2(y_1)$ entonces el punto $(x_1, y_1) \in R$, donde R es una región del tipo T_2 .

Ejemplo 3. Calcule $\int_0^1 \int_{y^2}^y (xy - x^2) dx dy$.

Solución. Aquí.

$$\int_{y^2}^y (xy - x^2) dx = \left[\frac{x^2 y}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{x=y^2}^{x=y} = \frac{y^3}{6} - \frac{y^5}{2} + \frac{y^6}{3}$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{y^2}^y (xy - x^2) dx dy &= \int_0^1 \left(\frac{y^3}{6} - \frac{y^5}{2} + \frac{y^6}{3} \right) dy \\ &= \left[\frac{y^4}{24} - \frac{y^6}{12} + \frac{y^7}{21} \right]_0^1 = \frac{1}{168}. \end{aligned}$$

EJERCICIOS

Calcule cada una de las integrales iteradas.

- $\int_0^2 \int_0^{x^2} y dy dx$
- $\int_1^2 \int_y^{y^2} (x + 2y) dx dy$
- $\int_0^2 \int_{x-x^2}^{\sqrt{x^2-x^3}} y dy dx$
- $\int_0^1 \int_0^{x^2} e^{x/y} dy dx$

$$5. \int_0^1 \int_0^2 (x+2) dy dx.$$

$$7. \int_0^2 \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dy dx.$$

$$9. \int_1^2 \int_0^y \frac{1}{x^2+y^2} dx dy:$$

$$11. \int_0^\pi \int_0^{\cos \theta} r \sin \theta dr d\theta.$$

$$13. \int_1^{\ln 2} \int_0^{\ln y} e^{x+y} dx dy.$$

$$6. \int_{-1}^2 \int_0^{x+2} dy dx.$$

$$8. \int_{1/2}^{e/2} \int_0^{2x^2-x} \frac{1}{x^2-y^2} dy dx.$$

$$10. \int_0^\pi \int_0^{2(1+\cos \theta)} r^2 \sin \theta dr d\theta.$$

$$12. \int_0^\pi \int_0^x x \sin y dy dx.$$

$$14. \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} y dx dy.$$

11.3 El teorema fundamental para integrales dobles. Si la integral doble $\iint_R F(x, y) dA$ de F en R existe, y si la región R es del tipo T_1 o del tipo T_2 o la unión de un número finito de regiones del tipo T_1 ó T_2 , las integrales iteradas se pueden usar para calcular la integral doble.

Al recordar las definiciones de regiones del tipo T_1 y T_2 dadas en la Sec. 11.2, se debe tener claramente presente que si R es una región cerrada del tipo T_1 , entonces existen números reales a y b , y funciones continuas G_1 y G_2 con la propiedad de que R es la gráfica de

$$\{(x, y) \mid G_1(x) \leq y \leq G_2(x), a \leq x \leq b\}.$$

Esto es, si una línea perpendicular al eje x intersecta a R , la intersección será un intervalo cerrado o solo un punto. En este caso decimos que R está limitada inferiormente por la gráfica de $y = G_1(x)$, y superiormente por la gráfica de $y = G_2(x)$, a la izquierda por la gráfica $x = a$, y a la derecha por la gráfica de $x = b$ (Vea Fig. 11.3).

Debe quedar claro que si R es una región cerrada del tipo T_2 entonces existen números reales c y d , y funciones continuas H_1 y H_2 con la propiedad de que R es la gráfica de

$$\{(x, y) \mid H_1(y) \leq x \leq H_2(y), c \leq y \leq d\}.$$

Esto es, si una línea perpendicular al eje y intersecta a R , la intersección será un intervalo cerrado o solo un punto. En este caso decimos que R está limitada a la izquierda por la gráfica de $x = H_1(y)$, a la derecha por la gráfica de $x = H_2(y)$, inferiormente por la gráfica de $y = c$, y superiormente por la gráfica de $y = d$ (Vea Fig. 11.4).

Enumeramos sin dar la demostración el teorema básico usado en el cálculo de integrales dobles.*

Teorema 2. Sea $F = \{(x, y; z) \mid z = F(x, y), (x, y) \in R\}$ una función que es continua en la región cerrada y acotada R .

* Para la demostración de este teorema consulte *Real Variables* de Olmsted, Secs. 1308 y 1309.

(i) Si R es del tipo T_1 y es la gráfica de $\{(x, y) \mid G_1(x) \leq y \leq G_2(x), a \leq x \leq b\}$, donde G_1 y G_2 son continuas en $[a; b]$ entonces

$$\iint_R F(x, y) dA = \int_a^b \int_{G_1(x)}^{G_2(x)} F(x, y) dy dx. \quad (5)$$

(ii) Si R es una región del tipo T_2 que es la gráfica de $\{(x, y) \mid H_1(y) \leq x \leq H_2(y), c \leq y \leq d\}$ donde H_1 y H_2 son continuas en $[c; d]$ entonces

$$\iint_R F(x, y) dA = \int_c^d \int_{H_1(y)}^{H_2(y)} F(x, y) dx dy. \quad (6)$$

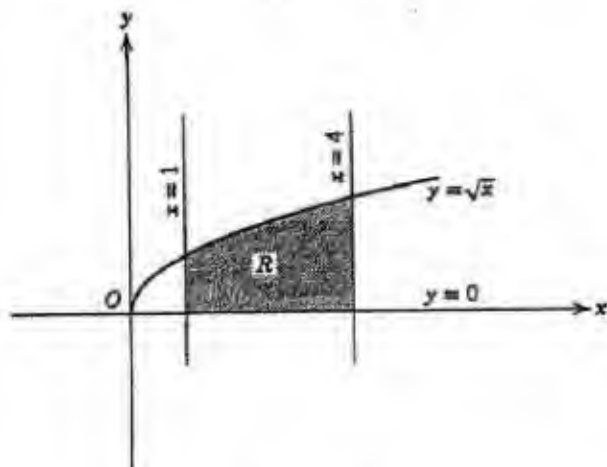


Fig. 11.5

Ejemplo 1. Calcule $\iint_R (2x - y) dA$ donde R es la región limitada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = 4$.

Solución. La Figura 11.5 muestra la región R . De la figura vemos que R es una región del tipo T_1 (de hecho, es una región $T_{1,2}$); por tanto podemos usar el teorema 2(i) para calcular la integral. Vemos que R está limitada inferiormente por la gráfica de $y = 0$, superiormente por la gráfica de $y = \sqrt{x}$, a la izquierda por la gráfica de $x = 1$, y a la derecha por la gráfica de $x = 4$; esto es, R es la gráfica de

$$\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{x}, 1 \leq x \leq 4\}.$$

Entonces, al usar la igualdad (5) en el teorema 2(i) tenemos

$$\iint_R (2x - y) dA = \int_1^4 \int_0^{\sqrt{x}} (2x - y) dy dx.$$

De donde

$$\int_0^{\sqrt{x}} (2x - y) dy = \left[2xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}} = 2x^{3/2} - \frac{1}{2}x.$$

Esto es

$$\iint_R (2x - y) dA = \int_1^4 \left(2x^{3/2} - \frac{1}{2}x \right) dx = \left[\frac{4}{5}x^{5/2} - \frac{1}{4}x^2 \right]_1^4 = \frac{421}{20}.$$

Al calcular una integral doble $\iint_R F(x, y) dA$ usando integrales iteradas, la determinación de los límites de integración es un paso clave. Para encontrar los límites de integración primero dibujamos una figura mostrando la región R en la cual la integración se va a efectuar. De esta figura podemos determinar qué tipo de región es R ; si R es del tipo T_1 , la primera integración puede ser con respecto a y ; si R es del tipo T_2 , la primera integración puede ser con respecto a x ; si R es del tipo $T_{1,2}$ podemos integrar primero con respecto a cualquiera de las variables x y y . Si la primera integración se hace con respecto a y , buscamos expresiones para dos funciones G_1 y G_2 y dos números a y b con la propiedad de que R esté limitada inferiormente por la gráfica de $y = G_1(x)$, superiormente por la gráfica de $y = G_2(x)$, a la izquierda por la gráfica de $x = a$ y a la derecha por la gráfica de $x = b$; esto es que R sea la gráfica de

$$\{(x, y) \mid G_1(x) \leq y \leq G_2(x), a \leq x \leq b\}.$$

Si la primera integración es con respecto a x buscamos expresiones para dos funciones H_1 y H_2 y dos números c y d con la propiedad de que R sea la región cuya frontera consiste de parte de las gráficas de $x = H_1(y)$, $x = H_2(y)$, $y = c$, y $y = d$; esto es R es la gráfica de

$$\{(x, y) \mid H_1(y) \leq x \leq H_2(y), c \leq y \leq d\}.$$

Al encontrar fórmulas para $G_1(x)$ y $G_2(x)$ (cuando la primera integración se hizo con respecto a y) es útil dibujar una línea L perpendicular al eje x y que pase por un punto interior de R cuya abscisa es $x_i \in (a; b)$ como se indica en la Fig. 11.6(a). Esta línea L interseca a la frontera de R en dos puntos $P(x_i, y_u)$ y $Q(x_i, y_l)$ cuyas coordenadas y_u y y_l se pueden expresar en función de x_i . Si para toda $x_i \in (a; b)$ se verifica una sola fórmula que exprese a y_u y una sola fórmula que exprese a y_l , entonces estas fórmulas serán las expresiones de $G_2(x_i)$ y $G_1(x_i)$ respectivamente, y serán los límites de integración $G_2(x)$ y $G_1(x)$ de la integral interior. Los límites de integración de la integral exterior serán la menor abscisa que pueda tener un punto en R y la máxima abscisa que pueda tener un punto de R .

Note que en algunas situaciones la fórmula que expresa a y_u (ó a y_l) no existe para toda $x_i \in (a; b)$; la Fig. 11.7 describe una situación de tal naturaleza.

Para encontrar fórmulas que expresen a $H_1(y)$ y $H_2(y)$ (cuando la primera integración es con respecto a x) procedemos en forma semejante. Dibujamos una línea L perpendicular al eje y y que pase por un punto interior de R cuya ordenada

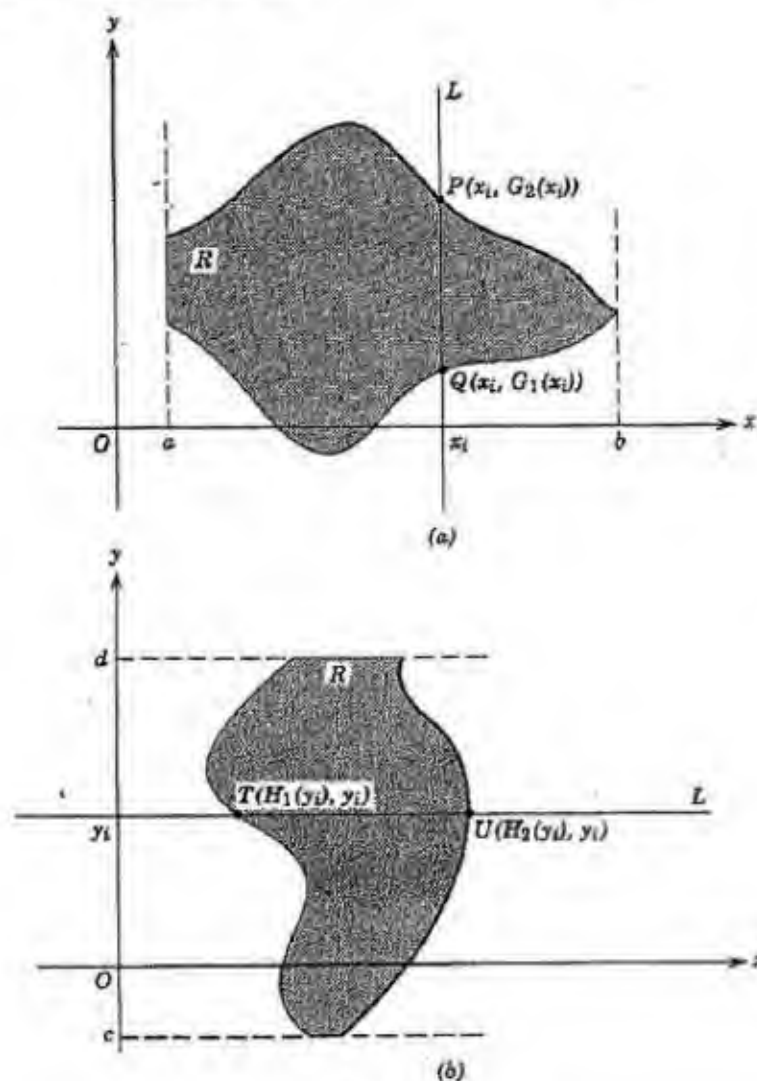


Fig. 11.6

es $y_i \in (c; d)$ como se indica en la Fig. 11.6(b). Entonces podemos determinar, en función de y_i , las abscisas de los puntos de intersección T y U de esta línea y la frontera de R .

Ejemplo 2. Calcule $I = \iint_R xy \, dA$ donde R es la región en el primer cuadrante limitada por las gráficas de $y^2 = x$, $y^2 = 4 - x$ y $y = 0$.

Solución. La región R para esta integral se muestra en la Fig. 11.7. Note que ésta es del tipo $T_{1,2}$. Considerándola como del tipo T_1 podemos usar la igualdad (5) para calcular I . Sin embargo, si dibujamos una recta L perpendicular al eje x y que pase por un punto interior de R con abscisa $x_i \in (0; 4)$, observamos que L intersectará a la frontera de R en dos puntos $P(x_i, y_u)$ y $Q(x_i, y_l)$ pero

no hay una sola fórmula para y_u que se verifique para toda $x_i \in (0; 4)$. En consecuencia la especificación de la función G_2 cuya gráfica es la frontera superior de R no es sencilla,

$$G_2(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \in [0; 2] \\ \sqrt{4-x}, & x \in [2; 4]. \end{cases}$$

En el ejemplo 5 volveremos a considerarla.

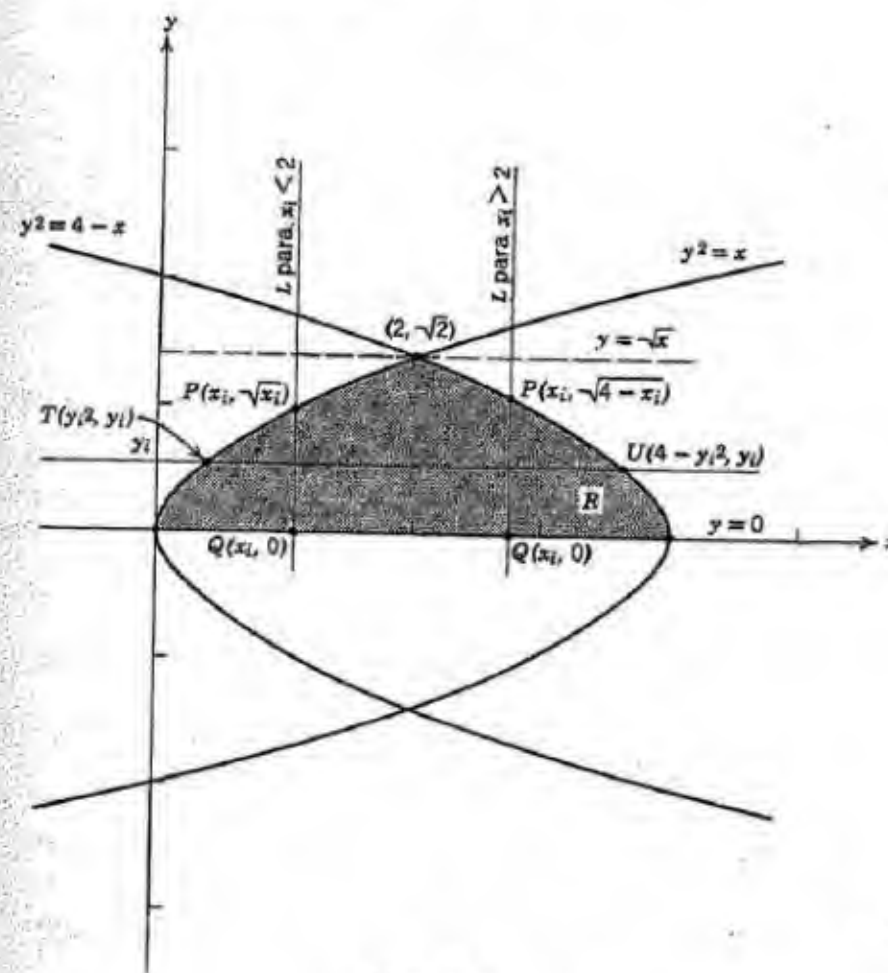


Fig. 11.7

Por el momento, consideremos a R como una región del tipo T_2 . Si trazamos una recta L perpendicular al eje y y que pase por un punto interior de R con ordenada $y_i \in (0; \sqrt{2})$ observaremos que L intersecta a la frontera de R en dos puntos $T(x_l, y_i)$ y $U(x_r, y_i)$ donde $x_l = y_i^2$ y $x_r = 4 - y_i^2$ para toda $y_i \in (0; \sqrt{2})$ por tanto R es la gráfica de

$$\{(x, y) \mid y^2 \leq x \leq 4 - y^2, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{2}\},$$

y usando la igualdad (6) tenemos que:

$$\begin{aligned}\iint_R xy \, dA &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2}^{4-y^2} xy \, dx \, dy = \int_0^{\sqrt{2}} \left[\frac{x^2 y}{2} \right]_{x=y^2}^{x=4-y^2} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} [(4-y^2)^2 y - (y^2)^2 y] dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} (16y - 8y^3) dy = 4.\end{aligned}$$

Si sabemos que una integral doble $\iint_R F(x, y) \, dA$ es igual a una integral iterada, podemos usar el teorema 2 para determinar la región R sobre la cual queda definida la integral. Por ejemplo, si

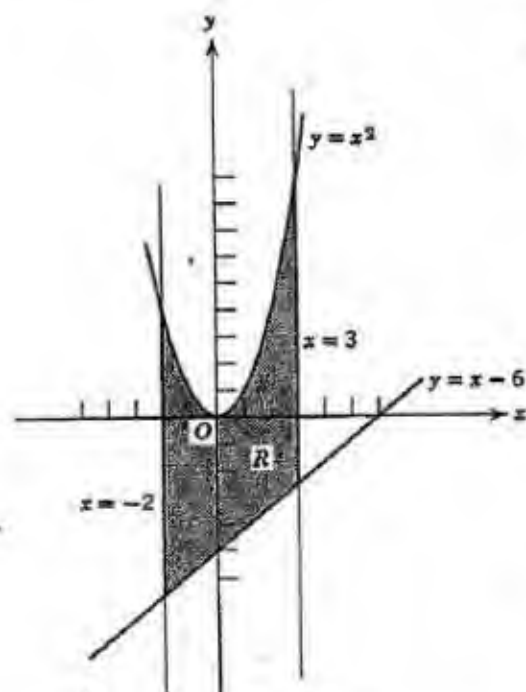


Fig. 11.8

$$\begin{aligned}\iint_R (6x - x^2 y) \, dA \\ = \int_{-2}^3 \int_{x-6}^{x^2} (6x - x^2 y) \, dy \, dx,\end{aligned}$$

se deduce del teorema 2 que R es la gráfica de $\{(x, y) \mid x-6 \leq y \leq x^2, -2 \leq x \leq 3\}$. La región R se muestra en la Fig. 11.8.

Si la región R es el tipo $T_{1,1}$ entonces $\iint_R F(x, y) \, dA$ se puede calcular usando cualquiera de las integrales iteradas

$$\begin{aligned}\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x, y) \, dy \, dx \\ \text{o} \\ \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} F(x, y) \, dx \, dy.\end{aligned}$$

Ejemplo 3. Si $\iint_R xy \, dA = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{36-9x^2}}^{\sqrt{36-9x^2}} xy \, dy \, dx$, determine la región R y exprese una integral iterada de la forma $\int_a^b \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} xy \, dx \, dy$ que dé el valor de la integral doble.

Solución. Al usar el teorema 2(i) vemos que R es la gráfica de

$$\{(x, y) \mid -\sqrt{36-9x^2} \leq y \leq \sqrt{36-9x^2}, -2 \leq x \leq 2\};$$

esto es, R es la región cuya frontera es la elipse con ecuación $9x^2 + y^2 = 36$ (vea Fig. 11.9). Por tanto la frontera izquierda de R es la gráfica de $x = -\frac{1}{3}\sqrt{36-y^2}$ y la frontera derecha de R es la gráfica de $x = \frac{1}{3}\sqrt{36-y^2}$, es decir, R es la gráfica de

$$\{(x, y) \mid -\frac{1}{3}\sqrt{36-y^2} \leq x \leq \frac{1}{3}\sqrt{36-y^2}, -6 \leq y \leq 6\}.$$

Entonces por el teorema 2(ii)

$$\iint_R xy \, dA = \int_{-6}^6 \int_{-\frac{1}{3}\sqrt{36-y^2}}^{\frac{1}{3}\sqrt{36-y^2}} xy \, dx \, dy.$$

Considere $\iint_R (x-y) \, dA$ donde R es la región que se muestra en la Fig.

11.10. Ésta es una del tipo $T_{1,2}$. Si consideramos a R como del tipo T_1 , vemos que su frontera superior y su frontera inferior están formadas por partes de dos curvas. Si consideramos a R como del tipo T_2 , vemos que su frontera izquierda

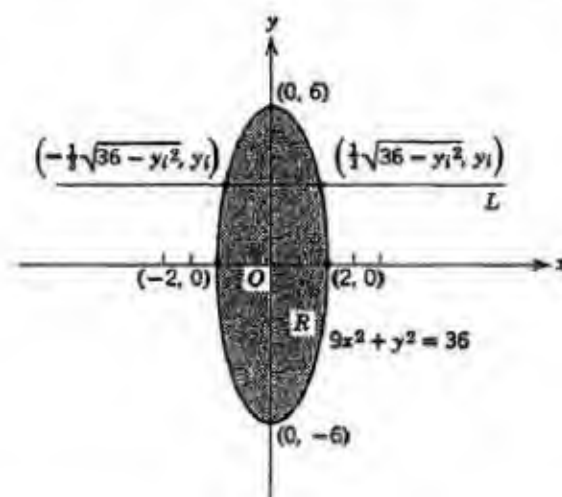


Fig. 11.9

está compuesta de partes de dos curvas. Por tanto, si examinamos las funciones G_1, G_2, H_1 y H_2 para las cuales

$$\iint_R (x-y) \, dA = \int_a^b \int_{G_1(x)}^{G_2(x)} (x-y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_{H_1(y)}^{H_2(y)} (x-y) \, dx \, dy,$$

vemos que solamente una de estas funciones H_i se puede expresar por una ecuación sencilla. Para calcular la integral doble en un caso como éste, es conveniente usar el siguiente teorema, que expresa una propiedad muy importante de las integrales dobles. Este teorema es un análogo al teorema 7 de la Sec. 5.7 y lo estableceremos sin demostración.

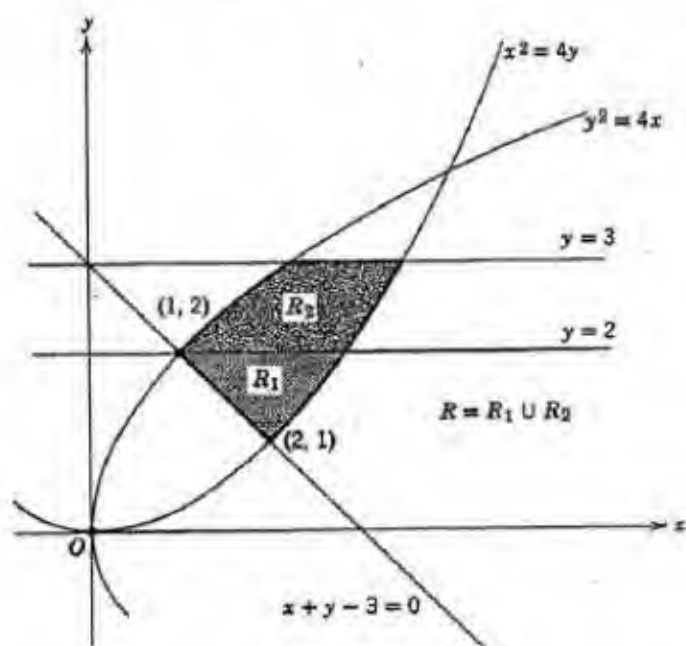


Fig. 11.10

Teorema 3.* Sean R_1 y R_2 dos regiones y sea F una función para la cual $\iint_{R_1} F(x, y) dA$ y $\iint_{R_2} F(x, y) dA$ existen. Si R_1 y R_2 no tienen puntos en común excepto puntos frontera, y si $R = R_1 \cup R_2$, entonces

$$\iint_R F(x, y) dA = \iint_{R_1} F(x, y) dA + \iint_{R_2} F(x, y) dA.$$

El ejemplo 4 es un ejemplo del teorema 3.

Ejemplo 4. Calcule $\iint_R (x - y) dA$ donde R es la región que se muestra en la Fig. 11.10.

Solución. Ya establecimos, que la región R es del tipo T_2 y la frontera izquierda consiste de partes de dos curvas. El cálculo se simplifica si R se considera como la unión de las dos regiones R_1 y R_2 que se muestran en la Fig. 11.10 donde R_1 es la gráfica de $\{(x, y) \mid 3 - y \leq x \leq 2\sqrt{y}, 1 \leq y \leq 2\}$ y R_2 es la gráfica de $\{(x, y) \mid \frac{1}{4}y^2 \leq x \leq 2\sqrt{y}, 2 \leq y \leq 3\}$. Las regiones R_1 y R_2 no tienen puntos en común excepto sus puntos frontera en la línea con ecuación $y = 2$; entonces por el teorema 3

$$\iint_R (x - y) dA = \iint_{R_1} (x - y) dA + \iint_{R_2} (x - y) dA.$$

* Para la demostración de este teorema vea *Real Variables* de Olmsted, Sec. 1306.

Al usar el teorema 2(ii) tenemos

$$\begin{aligned} \iint_R (x - y) dA &= \int_1^2 \int_{3-y}^{2\sqrt{y}} (x - y) dx dy + \int_2^3 \int_{y^2/4}^{2\sqrt{y}} (x - y) dx dy \\ &= \int_1^2 \left(8y - 2y^{3/2} - \frac{3}{2}y^2 - \frac{9}{2} \right) dy \\ &\quad + \int_2^3 \left(2y - 2y^{3/2} + \frac{y^3}{4} - \frac{y^4}{32} \right) dy = \frac{2007}{160}. \end{aligned}$$

Ejemplo 5. Use el teorema 3 para calcular la integral doble del ejemplo 2 considerando a la región R del tipo T_1 .

Solución. Observe en la Fig. 11.7 que la frontera superior de R es la unión de las gráficas de $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x}, x \in [0; 2]\}$ y $\{(x, y) \mid y = \sqrt{4-x}, x \in [2; 4]\}$. Podemos considerar a R como la unión de las regiones R_1 y R_2 donde R_1 es la gráfica de $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 2\}$ y R_2 es la gráfica de $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4-x}, 2 \leq x \leq 4\}$. Las regiones R_1 y R_2 no tienen puntos en común excepto sus puntos frontera en la gráfica de $x = 2$. De donde, por el teorema 3

$$\iint_R xy dA = \iint_{R_1} xy dA + \iint_{R_2} xy dA,$$

y por el teorema 2(i) obtenemos

$$\begin{aligned} \iint_R xy dA &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{x}} xy dy dx + \int_2^4 \int_0^{\sqrt{4-x}} xy dy dx \\ &= \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx + \int_2^4 \frac{x(4-x)}{2} dx = 4. \end{aligned}$$

EJERCICIOS

En los ejercicios del 1 al 10 la integral iterada tiene el mismo valor que la integral doble $\iint_R F(x, y) dA$. En cada ejercicio (a) determine la región R sobre la cual la integración se lleva a cabo y dibuje la gráfica de R ; (b) escriba una integral iterada (o suma de integrales iteradas) con el orden de integración invertida, tal que tenga el mismo valor que la integral dada.

- $\int_0^1 \int_{2x}^{2\sqrt{x}} F(x, y) dy dx.$
- $\int_0^1 \int_x^{2x^{3/2}} F(x, y) dy dx.$
- $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2/2}^{\sqrt{4-y^2}} F(x, y) dx dy.$
- $\int_0^2 \int_{-1}^y F(x, y) dx dy.$
- $\int_{-2}^2 \int_{y^2/4}^{(3-y^2)/4} F(x, y) dx dy.$
- $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{3-2x^2}} F(x, y) dy dx.$
- $\int_1^2 \int_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} F(x, y) dx dy.$
- $\int_2^4 \int_{\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{64-x^2}} F(x, y) dy dx.$

$$9. \int_0^2 \int_{\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} F(x, y) dx dy + \int_2^5 \int_0^{\sqrt{25-y^2}} F(x, y) dx dy.$$

$$10. \int_0^{\sqrt{12}} \int_{x^2/5}^5 F(x, y) dy dx + \int_{\sqrt{12}}^{2\sqrt{5}} \int_{x^2/5}^{\sqrt{30-x^2}} F(x, y) dy dx.$$

En cada uno de los ejercicios de 11 al 20 se especifica una función F y se describe una región R . Encuentre el valor de $\iint_R F(x, y) dA$ en cada ejercicio.

$$11. F(x, y) = x + y; R \text{ está limitada por las gráficas de } y = x^2 \text{ y } y^2 = x.$$

$$12. F(x, y) = y^2; R \text{ está limitada por las gráficas de } x + y = 2, \text{ y } y = x^2.$$

$$13. F(x, y) = 2 - x; R \text{ está limitada por las gráficas de } x^2 + y^2 = 4.$$

$$14. F(x, y) = 1; R \text{ está limitada por las gráficas de } y = 9 - x^2, \text{ y } y = x + 3.$$

$$15. F(x, y) = 1; R \text{ está limitada por las gráficas de } xy = 6 \text{ y } x + y = 5.$$

$$16. F(x, y) = 25 - x^2 - y^2; R \text{ está limitada por las gráficas de } x + y = 5, x = 0 \text{ y } y = 0.$$

$$17. F(x, y) = x^2 + y^2; R \text{ está limitada por la gráfica de } x^2 + y^2 = 25.$$

$$18. F(x, y) = 1; R \text{ está limitada por las gráficas de } x - 2y + 8 = 0 \text{ y } x^2 = 8y.$$

$$19. F(x, y) = 4 - x^2 - y^2; R \text{ está limitada por las gráficas de } y = \sqrt{1 - x^2} \text{ y } y = 0.$$

$$20. F(x, y) = \sin x^2; R \text{ está limitada por las gráficas de } y = x, y = 0, \text{ y } x = 1.$$

11.4 Áreas y volúmenes por integrales dobles. Considere una región R acotada y cerrada, sea N_k una red de la región con norma \mathcal{N} (Vea Sec. 11.1) y represente por $\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_i, \dots, \Delta A_k$ las áreas respectivas de los k rectángulos que constituyen la red N_k . Ya en la Sec. 5.1 se estableció que la suma

$$\Delta A_1 + \Delta A_2 + \dots + \Delta A_i + \dots + \Delta A_k = \sum_{i=1}^k \Delta A_i$$

dá una aproximación del "área" de la región R y cuanto menor sea la norma \mathcal{N} de la red, mejor es la aproximación.

Si existe un número A con la propiedad que dado un número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\left| A - \sum_{i=1}^k \Delta A_i \right| < \varepsilon$$

para todas las redes N_k con norma $\mathcal{N}_k < \delta$, entonces definimos* A como el área de la región R . Note que si $F(x, y) = 1$ entonces la suma que se usó para definir

* Se puede demostrar que esta definición de área es consistente con la definición de área dada para regiones particulares en la Sec. 5.8.

$\iint_R F(x, y) dA$ es la suma $\sum_{i=1}^k \Delta A_i$. Por tanto, si $\iint_R 1 dA$ existe, la región R tiene área A , y está dada por

$$A = \iint_R dA. \quad (7)$$

Ya que $F = \{(x, y; z) | z = 1\}$ es continua en \mathbb{R}^2 , según el teorema 1 si R está limitada por una curva C , cerrada, simple y rectificable, entonces R tiene área A , dada por (7).

Si la región R es del tipo T_1 y es la gráfica de $\{(x, y) | G_1(x) \leq y \leq G_2(x), a \leq x \leq b\}$, entonces el área A de la región se calcula por

$$A = \iint_R dA = \int_a^b \int_{G_1(x)}^{G_2(x)} dy dx = \int_a^b [G_2(x) - G_1(x)] dx.$$

El estudiante debe comparar esta igualdad con la igualdad (30) en la Sec. 5.8 y ver que dan el mismo valor para el área de una región del tipo T_1 .

Ejemplo 1. Encuentre el área de la región R limitada por las gráficas de $x - 2y + 8 = 0$ y $x^2 = 8y$.

Solución. De la igualdad (7) tenemos $A = \iint_R dA$ donde R es la región que aparece en la Fig. 11.11. Vemos que R es del tipo T_1 y que está limitada superiormente por la gráfica de $y = \frac{1}{2}(x + 8)$, inferiormente por la gráfica de $y = x^2/8$ a la izquierda por la gráfica de $x = -4$ y a la derecha por $x = 8$. Entonces

$$\iint_R dA = \int_{-4}^8 \int_{x^2/8}^{(x+8)/2} dy dx,$$

y por lo tanto

$$A = \int_{-4}^8 \int_{x^2/8}^{(x+8)/2} dy dx = \int_{-4}^8 \left(\frac{x+8}{2} - \frac{x^2}{8} \right) dx.$$

Esto es,

$$A = \left[\frac{x^2}{4} + 4x - \frac{x^3}{24} \right]_{-4}^8 = \left(\frac{64}{4} + 32 - \frac{512}{24} \right) - \left(\frac{16}{4} - 16 + \frac{64}{24} \right) = 36.$$

Supongamos que $F = \{(x, y; z) | z = F(x, y), (x, y) \in R\}$ es una función con la propiedad de que $F(x, y) \geq 0$ para $(x, y) \in R$ y consideremos el sólido S (Fig. 11.12) limitado por la gráfica de $z = F(x, y)$, el plano xy , y el cilindro cuyos elementos son paralelos al eje z , para el cual la frontera de R es una generatriz. Llamamos S al sólido bajo la gráfica de $z = F(x, y)$ y sobre la región R . Consideremos una forma en la cual podamos definir el volumen de este sólido; la definición que daremos nos capacitará para escribir el valor del volumen como una integral doble.

Sea N_k una red con norma \mathcal{N}_k de la región R , que consiste de k rectángulos con áreas $\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_i, \dots, \Delta A_k$ respectivamente. Sea

$$T_k = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_i, y_i), \dots, (x_k, y_k)\}$$

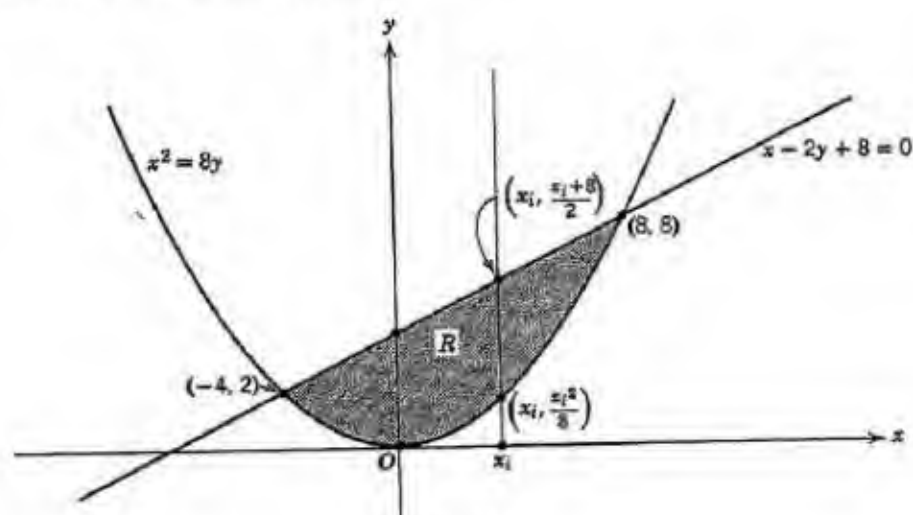


Fig. 11.11

un aumento de N_k . Consideremos los k sólidos rectangulares cuyas bases son los k rectángulos de la red N_k y cuyas alturas son respectivamente $F(x_1, y_1), F(x_2, y_2), \dots, F(x_i, y_i), \dots, F(x_k, y_k)$; el sólido rectangular i se muestra en la Fig. 11.13. Se observa que la suma de los volúmenes de estos k sólidos rectangulares $\sum_{i=1}^k F(x_i, y_i) \Delta A_i$ será una aproximación de la cantidad que llamamos volumen del sólido

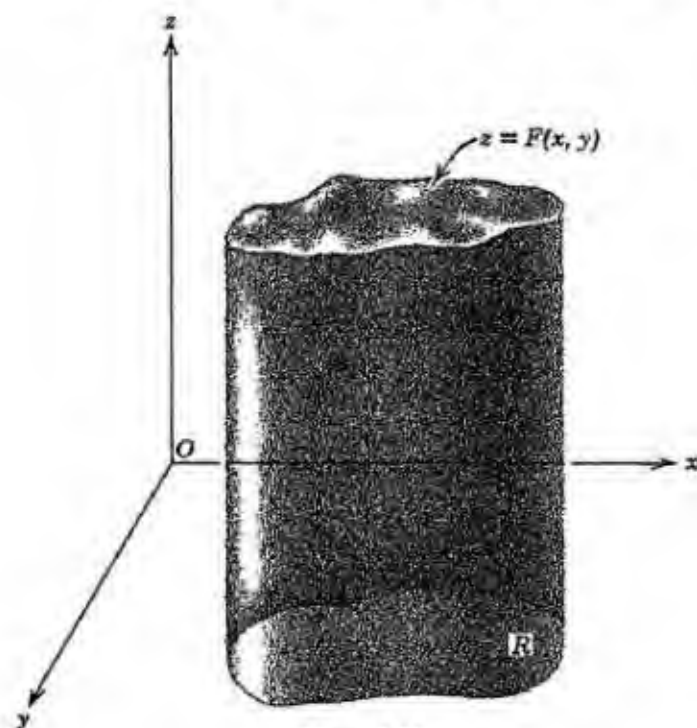


Fig. 11.12

S. Además se comprende que cuando la norma \mathcal{N}_N de la red se haga menor la suma se aproximará más al volumen.

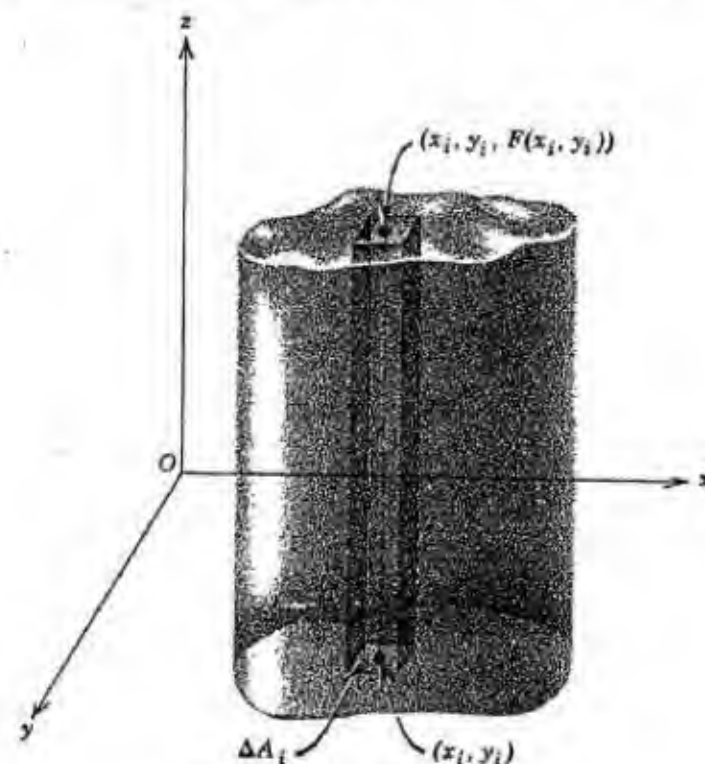


Fig. 11.13

Si existe un número V con la propiedad de que para cualquier número $\epsilon > 0$ dado, existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\left| V - \sum_{i=1}^k F(x_i, y_i) \Delta A_i \right| < \epsilon$$

para todas las redes N_k y aumentos T_k con norma $\mathcal{N}_N < \delta$, entonces V es el **volumen del sólido S limitado superiormente por la gráfica de $z = F(x, y)$ e inferiormente por la región R** .*

Si comparamos esta definición del volumen del sólido S con la definición de la integral doble $\iint_R F(x, y) dA$, vemos que el sólido S tiene un volumen V si y sólo si la integral doble $\iint_R F(x, y) dA$ existe, y además si el volumen V existe, entonces

$$V = \iint_R F(x, y) dA. \quad (8)$$

* Se puede demostrar que esta definición de volumen es consistente con la definición de volumen de un sólido de revolución dada en la Sec. 5.9.

Ejemplo 2. Encuentre el volumen del sólido S bajo la gráfica de $z = F(x, y) = xy$ y sobre la región en el primer cuadrante limitada por las gráficas de $y^2 = x$, $y^2 = 4 - x$ y $y = 0$. (Note que $F(x, y) \geq 0$ en esta región).

Solución. La región R se muestra en la Fig. 11.7. De la igualdad (8) tenemos que

$$V = \iint_R xy \, dA,$$

y al referirnos al ejemplo 2 de la Sec. 11.3 encontramos que

$$\iint_R xy \, dA = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2}^{4-y^2} xy \, dx \, dy = 4.$$

Por tanto $V = 4$.

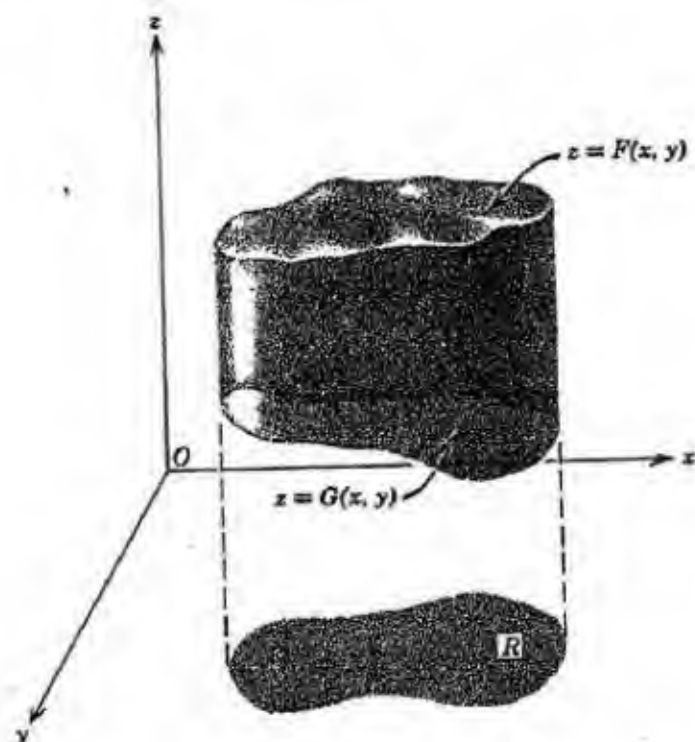


Fig. 11.14

Sean F y G dos funciones de dos variables independientes que tengan un dominio común R y con la propiedad de que $F(x, y) \geq G(x, y)$ para $(x, y) \in R$, sea S (Fig. 11.14) el sólido limitado por las gráficas de $z = F(x, y)$, $z = G(x, y)$ y el cilindro con elementos paralelos al eje z y la frontera de R como curva gene-

ratriz. Debe quedar claro que si S tiene un volumen V , entonces

$$V = \iint_R [F(x, y) - G(x, y)] \, dA. \quad (9)$$

Ejemplo 3. Encuentre el volumen V del sólido limitado superiormente por la gráfica de $2x^2 + 4y^2 + z = 4$ e inferiormente por la gráfica de $2x^2 + 4y^2 - 4z = 4$.

Solución. Cada una de las dos superficies dadas intersectan al plano xy en la elipse (bidimensional) con ecuación $2x^2 + 4y^2 = 4$ ó $x^2 + 2y^2 = 2$. Por tanto el sólido está limitado superiormente por la gráfica de:

$$F = \{(x, y, z) \mid z = 4 - 2x^2 - 4y^2, (x, y) \in R\},$$

e inferiormente por la gráfica de:

$$G = \{(x, y, z) \mid z = \frac{1}{4}(2x^2 + 4y^2 - 4), (x, y) \in R\},$$

donde R es la gráfica de $\{(x, y) \mid x^2 + 2y^2 = 2\}$. Un cuarto del sólido se muestra en la Fig. 11.15. Ya que $F(x, y) \geq G(x, y)$ para $(x, y) \in R$, según la igualdad (9)

$$V = \iint_R \left[(4 - 2x^2 - 4y^2) - \left(\frac{x^2}{2} + y^2 - 1 \right) \right] dA.$$

También

$$V = 4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2-2y^2}} 5 \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - y^2 \right) dx \, dy = 20 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2-2y^2}} \left(1 - \frac{x^2}{2} - y^2 \right) dx \, dy.$$

Encontramos

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2-2y^2}} \left(1 - \frac{x^2}{2} - y^2 \right) dx &= \left[x(1 - y^2) - \frac{x^3}{6} \right]_{x=0}^{x=\sqrt{2}\sqrt{1-y^2}} \\ &= \sqrt{2}(1 - y^2)^{3/2} - \frac{2\sqrt{2}}{6} (1 - y^2)^{3/2} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} (1 - y^2)^{3/2}. \end{aligned}$$

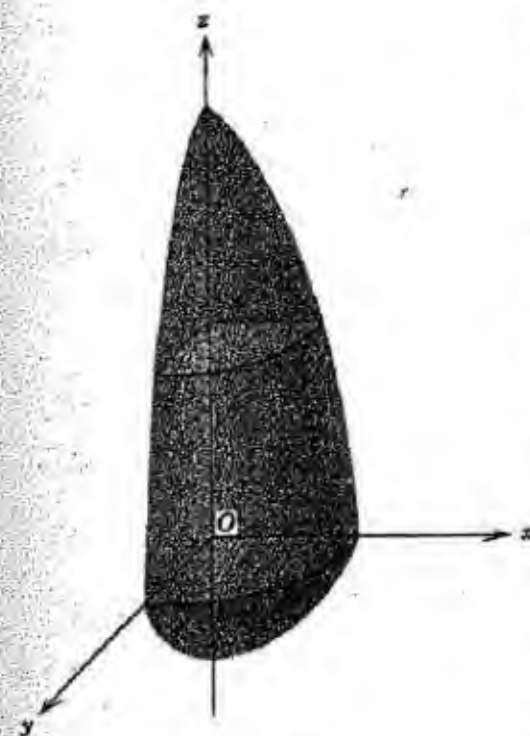


Fig. 11.15

Ahora $\int_0^1 \frac{2\sqrt{2}}{3} (1-y^2)^{3/2} dy$ se puede calcular por medio de la sustitución trigonométrica $y = \sin t$, $dy = \cos t dt$. Note que $t = 0$, cuando $y = 0$ y $t = \pi/2$, cuando $y = 1$, entonces

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} \int_0^1 (1-y^2)^{3/2} dy = \frac{2\sqrt{2}}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt.$$

En la Sec. 7.3 vimos que para calcular $\int \cos^4 t dt$ se hace uso de la identidad $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$; por tanto

$$\int \cos^4 t dt = \frac{3t}{8} + \frac{\sin t \cos t}{2} + \frac{\sin 2t \cos 2t}{16} + k.$$

Entonces,

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt = \frac{\sqrt{2}\pi}{8},$$

y

$$V = 20 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2-2y^2}} \left(1 - \frac{x^2}{2} - y^2\right) dx dy = \frac{5\pi}{\sqrt{2}}.$$

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 6 calcule el área de la región descrita.

1. La región limitada por las gráficas de $y = 4x - x^2$ y $y = x$.
2. La región limitada por las gráficas de $y = x^2$ y $2x - y + 3 = 0$.
3. La región limitada por las gráficas de $y^2 = 2x$ y $x^2 + y^2 - 4y = 0$.
4. La región limitada por las gráficas de $y^2 = 9 + x$ y $y^2 = 9 - 3x$.
5. La región limitada por las gráficas de $y = x^3 - 2x$ y $y = 6x - x^3$.
6. La región limitada por las gráficas de $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ y $x + y = a$.

En cada uno de los ejercicios del 7 al 10 establezca dos integrales iteradas para encontrar el volumen del sólido descrito. Encuentre el volumen calculando una de las integrales iteradas.

7. El sólido bajo la gráfica de $x + y + z = 9$ y sobre la región R limitada por las gráficas de $2x - 3y = 0$, $y = 0$, y $x = 3$.
8. El sólido bajo la gráfica de $z^2 = y$ y sobre la región R limitada por la gráfica de $x^2 + 9y - 9 = 0$ y $y = 0$.
9. El sólido limitado por la gráfica de $x + y + z = 1$ y los planos de coordenadas.
10. El sólido limitado por las gráficas de $x^2 + y^2 = z$ y $x^2 + y^2 = 4$.

En cada uno de los ejercicios del 11 al 17 encuentre el volumen del sólido descrito.

11. El sólido bajo la gráfica de $y^2 + 4z = 16$ y sobre la región R limitada por la gráfica de $x^2 + y^2 = 16$.
12. El sólido limitado por el plano xy y la gráfica de $az = a^3 - x^2 - y^2$.
13. El sólido en el primer octante limitado por las gráficas de $4x + 3y = 12$, $x^2 + z = 4$, $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$.

14. El sólido bajo la gráfica de $x - z = 0$, y sobre la región R en el primer cuadrante limitada por las gráficas de $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 25$, $x = 0$ y $y = 0$.

15. El sólido en el primer octante limitado por las gráficas de $z = x$, $z = x^2$, y $x^2 + y^2 = 1$.

16. El sólido limitado por las gráficas de $x^2 + y^2 = a^2$ y $y^2 + z^2 = a^2$.

17. El sólido limitado superiormente por la gráfica de $z = 1 - x^2 - 4y^2$ e inferiormente por la gráfica de $x^2 + 4y^2 - 4z = 1$.

18. Dibuje una figura que muestre un sólido cuyo volumen se pueda calcular con la integral iterada.

$$\int_0^4 \int_0^x \sqrt{16 - x^2} dy dx.$$

Calcule esta integral.

19. Calcule el volumen de una esfera de radio r por doble integración.

20. Encuentre el volumen del sólido limitado por la gráfica de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

11.5 Integrales triples. Una integral triple es una generalización de una integral doble en el mismo sentido que una integral doble $\iint_R F(x, y) dA$ es una generalización de una integral sencilla $\int_a^b F(x) dx$.

Esto es, una integral triple extiende el concepto de una integral al caso en que F es una función de tres variables independientes cuyo dominio es una región cerrada acotada en el espacio-3.

En el espacio-3 los conceptos de conjunto abierto, conjunto cerrado, región, punto frontera, punto interior, región cerrada, y región cerrada acotada son defini-

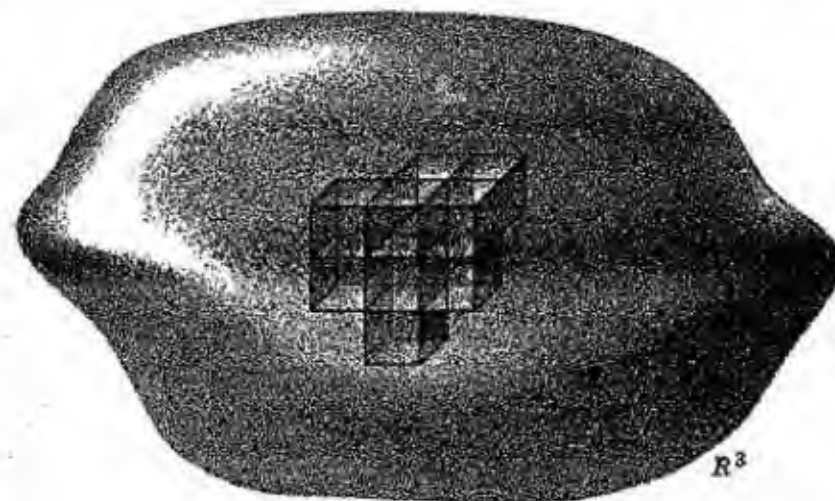


Fig. 11.16 Parte de una red N_1^3 en una región R^3 .

nidos por extensiones de las definiciones en el espacio-2, con una adaptación de la terminología.

El concepto básico para estas extensiones es el de vecindad de un punto P en el espacio-3, la cual se define como el conjunto de todos los puntos cuya distancia al punto P es menor que ρ . Usaremos el símbolo R^3 para representar una región en el espacio-3.

Lo análogo a una red N_k de rectángulos en una región R en el espacio-2 es una red N_k^3 de paralelepípedos $R_1^3, R_2^3, \dots, R_i^3, \dots, R_k^3$ en una región R^3 en el espacio-3. La norma $\mathcal{N}_{N_k^3}$ de una red N_k^3 es la máxima de las longitudes de las diagonales de los paralelepípedos de la red. Un aumento T_k^3 de una red N_k^3 es un conjunto de k puntos

$$\{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_i, y_i, z_i), \dots, (x_k, y_k, z_k)\},$$

en el que se encuentra un punto perteneciente a cada uno de los paralelepípedos de la red. El volumen de los k paralelepípedos de una red N_k^3 se designa por

$$\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_i, \dots, \Delta V_k.$$

Supongamos que

$$F = \{(x, y, z; u) \mid u = F(x, y, z), (x, y, z) \in R^3\}$$

es una función de tres variables independientes cuyo dominio es una región cerrada acotada R^3 . Sea N_k^3 una red de R^3 , sea $T_k^3 = \{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_i, y_i, z_i), \dots, (x_k, y_k, z_k)\}$ con $(x_i, y_i, z_i) \in R^3$ un aumento de N_k^3 , y formemos la suma

$$\sum_{i=1}^k F(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

Si existe un número I con la propiedad de que dado un número $\epsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^k F(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i - I \right| < \epsilon$$

para todas las redes N_k^3 y aumentos T_k^3 con norma $\mathcal{N}_{N_k^3} < \delta$, entonces este (único) número es la **triple integral** (Riemann) de F sobre la región R^3 , y la representamos

$$I = \iiint_{R^3} F(x, y, z) dV$$

La existencia de la integral triple de una función F sobre una región R^3 depende no sólo de la naturaleza de F sino también de la naturaleza de R^3 . Para establecer un teorema de existencia comparable al teorema 1 de la Sec. 11.1, definiremos una superficie uniforme. Si G es una función de tres variables cuyo dominio es una región D^3 en el espacio-3, y si G_x, G_y, G_z son continuas, y

$$[G_x(x, y, z)]^2 + [G_y(x, y, z)]^2 + [G_z(x, y, z)]^2 \neq 0$$

en D^3 , la gráfica de $G(x, y, z) = 0$ es una **superficie uniforme**.

Estableceremos el siguiente teorema sin demostración.

Teorema 4. Si F es continua sobre una región cerrada acotada R^3 cuya frontera consiste de la unión de un número finito de superficies uniformes entonces

$$\iiint_{R^3} F(x, y, z) dV \text{ existe.}$$

Las condiciones indicadas en este teorema son suficientes pero no necesarias para la existencia de la integral triple.

Para la mayoría de las funciones y regiones es prácticamente imposible determinar el valor de una integral triple por cálculo directo usando la definición. Existe un teorema fundamental para integrales triples semejante al teorema 2 para integrales dobles. Para establecer este teorema necesitamos extender el concepto de integrales iteradas introducido en la Sec. 11.2.

EJERCICIOS

Dibuje la gráfica de cada una de las regiones en el espacio-3 descritos en los siguientes ejercicios.

1. La región R^3 limitada por las gráficas de $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 16\}$ y $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 16\}$.

2. La región R^3 limitada por las gráficas de $x + y + z = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

3. La región R^3 limitada superiormente por la gráfica de $x^2 + y^2 - z = 16$ e inferiormente por la gráfica de $z = 2$.

4. La región limitada superiormente por la gráfica de $\{(x, y, z) \mid x + z = 4\}$ e inferiormente por el plano xy y lateralmente por la gráfica de $\{(x, y, z) \mid y^2 = 4x\}$.

11.6 Integrales iteradas de $F(x, y, z)$. Sea $F = \{(x, y, z; u) \mid u = F(x, y, z), (x, y, z) \in R^3\}$ una función que es continua en una región cerrada acotada R^3 en el espacio-3. Sea R una región en el espacio-2 y sean $K_1 = \{(x, y, z) \mid z = K_1(x, y), (x, y) \in R\}$ y $K_2 = \{(x, y, z) \mid z = K_2(x, y), (x, y) \in R\}$ dos funciones continuas tales que si

$$(x_1, y_1) \in R \text{ y } K_1(x_1, y_1) \leq z_1 \leq K_2(x_1, y_1),$$

entonces el punto $(x_1, y_1, z_1) \in R^3$. En este caso la función V definida por $V(z) = F(x_1, y_1, z)$ donde $(x_1, y_1) \in R$ es continua en $[K_1(x_1, y_1); K_2(x_1, y_1)]$, y

$$\int_{K_1(x_1, y_1)}^{K_2(x_1, y_1)} F(x_1, y_1, z) dz$$

existe para toda $(x_1, y_1) \in R$. Entonces existe una función Φ de dos variables independientes tal que

$$\Phi(x, y) = \int_{K_1(x, y)}^{K_2(x, y)} F(x, y, z) dz, \quad (x, y) \in R. \quad (10)$$

Si U es una función de tres variables independientes con la propiedad de que

$$D_z U(x, y, z) = F(x, y, z),$$

entonces para $(x, y) \in R$,

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \int_{K_1(x, y)}^{K_2(x, y)} F(x, y, z) dz = U(x, y, z) \Big|_{z=K_1(x, y)}^{z=K_2(x, y)} \\ &= U[x, y, K_2(x, y)] - U[x, y, K_1(x, y)]. \end{aligned} \quad (11)$$

La integral en (10) se lee "la integral de $F(x, y, z)$ con respecto a z en el intervalo $[K_1(x, y); K_2(x, y)]$ ". La igualdad (11) proporciona un medio para calcular esta integral.

Ejemplo 1. Calcule $\int_{xy}^{x-y} (4xz + y) dz$.

Solución. Ya que deseamos integrar con respecto a z , buscaremos $V(x, y, z)$ con la propiedad de que $D_z V(x, y, z) = 4xz + y$, y encontramos que $V(x, y, z) = 2xz^2 + yz$ tiene esta propiedad. Por tanto

$$\begin{aligned} \int_{xy}^{x-y} (4xz + y) dz &= \left[2xz^2 + yz \right]_{z=xy}^{z=x-y} \\ &= [2x(x-y)^2 + y(x-y)] - [2x(xy)^2 + y(xy)] \\ &= 2x^2(1-y^2) - 4x^2y + x(y^2 + y) - y^2. \end{aligned}$$

Aquí la función Φ de (10) está dada por

$$\Phi(x, y) = 2x^2(1-y^2) - 4x^2y + x(y^2 + y) - y^2.$$

Para la función Φ definida por (10) podemos considerar

$$\iint_R \Phi(x, y) dA = \iint_R \left(\int_{K_1(x, y)}^{K_2(x, y)} F(x, y, z) dz \right) dA. \quad (12)$$

Si R es una región cerrada del tipo T_1 , digamos la gráfica de

$$\{(x, y) \mid G_1(x) \leq y \leq G_2(x), a \leq x \leq b\},$$

entonces (12) la podemos escribir como

$$\int_a^b \int_{G_1(x)}^{G_2(x)} \left(\int_{K_1(x, y)}^{K_2(x, y)} F(x, y, z) dz \right) dy dx. \quad (13)$$

Si R es una región cerrada del tipo T_2 , digamos la gráfica de

$$\{(x, y) \mid H_1(y) \leq x \leq H_2(y), c \leq y \leq d\},$$

entonces (12) la podemos escribir como

$$\int_c^d \int_{H_1(y)}^{H_2(y)} \left(\int_{K_1(x, y)}^{K_2(x, y)} F(x, y, z) dz \right) dx dy. \quad (14)$$

Omitiremos el paréntesis en las integrales (13) y (14); esto es, para (13) escribiremos

$$\int_a^b \int_{G_1(x)}^{G_2(x)} \int_{K_1(x, y)}^{K_2(x, y)} F(x, y, z) dz dy dx,$$

y para (14) escribiremos

$$\int_c^d \int_{H_1(y)}^{H_2(y)} \int_{K_1(x, y)}^{K_2(x, y)} F(x, y, z) dz dx dy.$$

Ejemplo 2. Calcule

$$\iiint_R \left(\int_{x-y}^{x+y} (x+y+z) dz \right) dA,$$

donde R es la región en el plano xy limitada por las gráficas de $y+x=0$, $y-x=0$, y $x=1$.

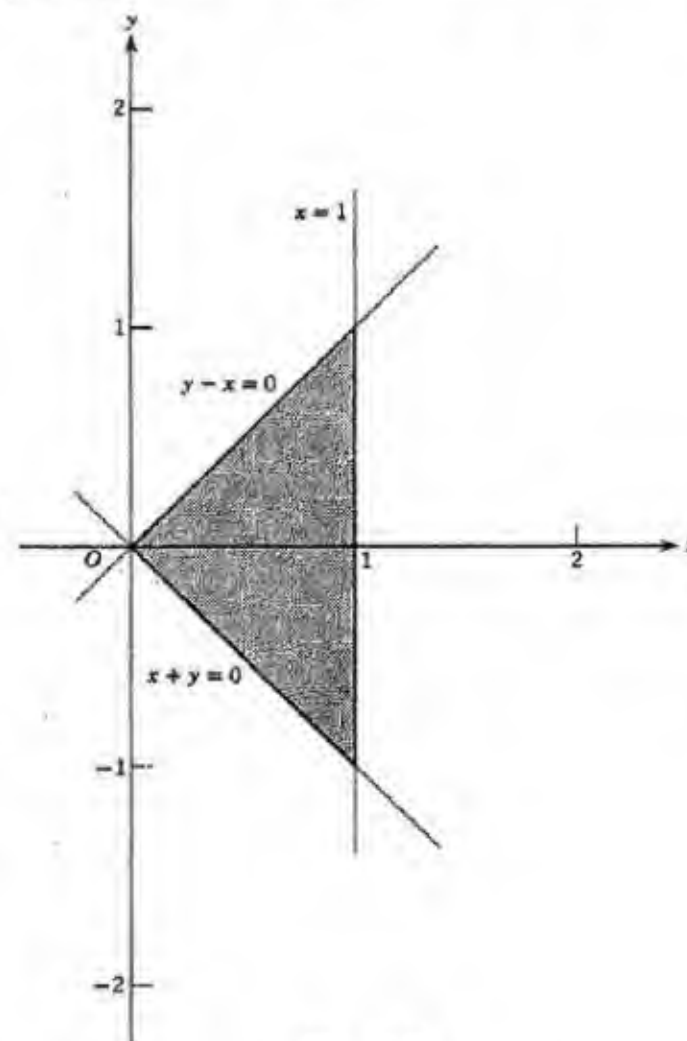


Fig. 11.17

Solución. Al proceder en forma semejante al ejemplo 1 encontramos

$$\begin{aligned} \int_{x-y}^{x+y} (x+y+z) dz &= \left[(x+y)z + \frac{1}{2}z^2 \right]_{z=x-y}^{z=x+y} \\ &= \left[(x+y)(x+y) + \frac{1}{2}(x+y)^2 \right] - \left[(x+y)(x-y) + \frac{1}{2}(x-y)^2 \right] \\ &= 4xy + 2y^2. \end{aligned}$$

Para calcular $\iint_R (4xy + 2y^2) dA$, graficamos R como se muestra en la Fig. 11.17.

De la figura vemos que R es una región del tipo T_1 y es la gráfica de

$$\{(x, y) \mid -x \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\},$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \iint_R (4xy + 2y^2) dA &= \int_0^1 \int_{-x}^x (4xy + 2y^2) dy dx = \int_0^1 \left[2xy^2 + \frac{2}{3}y^3 \right]_{y=-x}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{4}{3}x^3 dx = \left[\frac{x^4}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3. Calcule $T = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{1-x} dz dy dx$, y describa y dibuje la región R para la cual

$$\iint_R \left(\int_0^{1-x} dz \right) dA = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{1-x} dz dy dx.$$

Solución. Al integrar primero con respecto a z , encontramos:

$$\int_0^{1-x} dz = 1 - x,$$

donde

$$T = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} (1-x) dy dx.$$

Al integrar con respecto a y , tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} (1-x) dy &= (1-x)y \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{2x-x^2}} \\ &= (1-x)\sqrt{2x-x^2}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} T &= \int_0^1 (1-x)\sqrt{2x-x^2} dx \\ &= \frac{1}{3} (2x-x^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

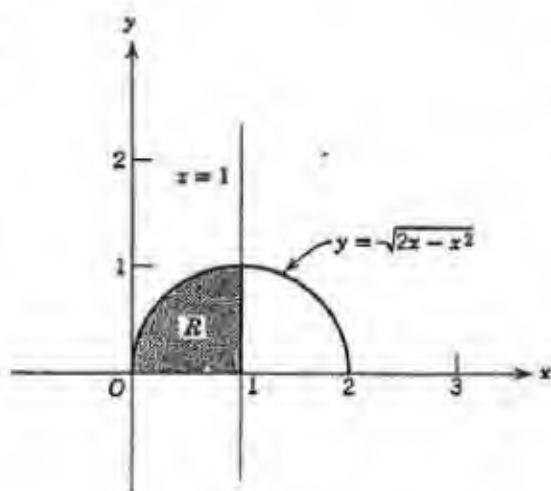


Fig. 11.18

La región R es la gráfica de $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}, 0 \leq x \leq 1\}$ esto es, R está acotada inferiormente por la gráfica de $y=0$, superiormente por la gráfica de $y = \sqrt{2x-x^2}$, a la izquierda por la gráfica de $x=0$ y a la derecha por la gráfica de $x=1$. La región R se muestra en la Fig. 11.18.

Las integrales (13) y (14) se llaman **integrales iteradas** de $F(x, y, z)$. Es evidente que podemos definir otras cuatro integrales iteradas de $F(x, y, z)$ en las que la primera integración se efectúe con respecto a una variable distinta de z . Estas integrales iteradas de $F(x, y, z)$ son:

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} F(x, y, z) dx dy dz, \\ \int_c^d \int_{k_1(y)}^{k_2(y)} \int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} F(x, y, z) dx dz dy, \\ \int_e^f \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} F(x, y, z) dy dx dz, \\ \int_a^b \int_{k_1(x)}^{k_2(x)} \int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} F(x, y, z) dy dz dx. \end{aligned}$$

Se debe notar que en una integral iterada de $F(x, y, z)$ los límites de integración de la integral interior son las correspondientes bajo funciones de *dos* variables independientes; los límites de integración de la integral intermedia son los correspondientes bajo funciones de *una* variable independiente; y los límites de integración de la exterior son constantes.

EJERCICIOS

Calcule cada una de las integrales iteradas siguientes.

- $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x-y} x dz dy dx.$
- $\int_1^2 \int_0^1 \int_2^4 x^2 y^2 z dz dy dx.$
- $\int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_{4-2x}^{1-x^2-y^2} dz dy dx.$
- $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x-y}^{x+y} z dz dy dx.$
- $\int_2^4 \int_{1/2}^1 \int_0^{\sqrt{2x}} xyz dx dy dz.$
- $\int_0^2 \int_{1/3\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{4-2y^2} dz dy dx.$

11.7 El teorema fundamental para integrales triples. Si la integral

triple $I = \iiint_{R^3} F(x, y, z) dV$ existe y si R^3 es una región de tipo especial, se

pueden usar las integrales iteradas de $F(x, y, z)$ para calcular I .

Consideremos una región cerrada y acotada R^3 en el espacio-3 con las siguientes propiedades.

(i) La frontera de R^3 consiste de la unión de un número finito de superficies uniformes.

(ii) Existe una región cerrada acotada R en el plano xy con la propiedad de que si $(x, y, z) \in R^3$ entonces $(x, y) \in R$ y si $(x, y) \in R$ entonces existe un número z tal que

$$(x, y, z) \in R^3.$$

Esta región R se llama la *proyección de R^3 sobre el plano xy* .

(iii) La frontera de la proyección de R^3 sobre el plano xy es una curva simple, rectificable y cerrada.

(iv) Existen funciones continuas K_1 y K_2 de dos variables independientes con la propiedad de que R^3 es la gráfica de

$$\{(x, y, z) \mid K_1(x, y) \leq z \leq K_2(x, y), (x, y) \in R\}.$$

Si una región R^3 tiene estas propiedades, entonces R^3 está limitada por las gráficas de $z = K_1(x, y)$, $z = K_2(x, y)$, y el cilindro cuyos elementos son paralelos al eje z y con frontera de R como curva generatriz. Llamaremos a tal región en el

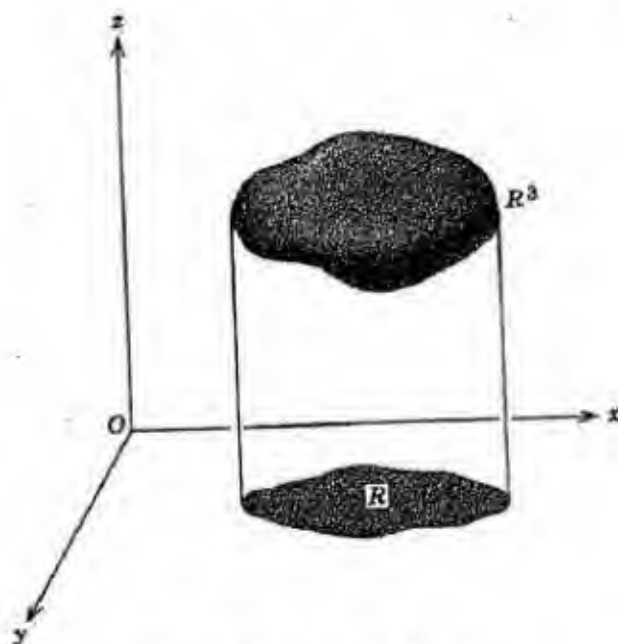


Fig. 11.19 Región de tipo $S_{1,2}$.

espacio-3 una **región del tipo $S_{1,2}$** . La región R^3 en la Figura 11.19 es una región del tipo $S_{1,2}$. Decimos que una región del tipo $S_{1,2}$ es una región acotada superiormente por la gráfica de $z = K_2(x, y)$ e inferiormente por la gráfica de $z = K_1(x, y)$ para $(x, y) \in R$.

Si en nuestra definición los papeles de x y z se intercambian, entonces R^3 es la gráfica de

$$\{(x, y, z) \mid H_1(y, z) \leq x \leq H_2(y, z), (y, z) \in R\},$$

donde R es la proyección de R^3 sobre el plano yz , en este caso decimos que R^3 es una **región del tipo $S_{2,3}$** .

Si los papeles de y y z se intercambian, entonces R^3 es la gráfica de

$$\{(x, y, z) \mid G_1(x, z) \leq y \leq G_2(x, z), (x, z) \in R\},$$

donde R es la proyección de R^3 sobre el plano xz , en este caso R^3 es una **región del tipo $S_{1,3}$** . Estableceremos sin demostración un teorema básico para calcular el valor de

$$\iiint_{R^3} F(x, y, z) dV$$

si R^3 es una región del tipo $S_{1,2}$, $S_{2,3}$, ó $S_{1,3}$.

Teorema 5. Sea $F = \{(x, y, z; u) \mid u = F(x, y, z), (x, y, z) \in R^3\}$ una función que es continua sobre la región cerrada y acotada R^3 .

(i) Si R^3 es del tipo $S_{1,2}$ y es la gráfica de

$$\{(x, y, z) \mid K_1(x, y) \leq z \leq K_2(x, y), (x, y) \in R\},$$

donde R es la proyección de R^3 sobre el plano xy , entonces

$$\iiint_{R^3} F(x, y, z) dV = \iint_R \left(\int_{K_1(x, y)}^{K_2(x, y)} F(x, y, z) dz \right) dA. \quad (15)$$

(ii) Si R^3 es del tipo $S_{1,3}$ y es la gráfica de

$$\{(x, y, z) \mid H_1(y, z) \leq x \leq H_2(y, z), (y, z) \in R\},$$

donde R es la proyección de R^3 en el plano yz entonces

$$\iiint_{R^3} F(x, y, z) dV = \iint_R \left(\int_{H_1(y, z)}^{H_2(y, z)} F(x, y, z) dx \right) dA. \quad (16)$$

(iii) Si R^3 es del tipo $S_{2,3}$ y es la gráfica de

$$\{(x, y, z) \mid G_1(x, z) \leq y \leq G_2(x, z), (x, z) \in R\},$$

donde R es la proyección de R^3 sobre el plano xz

$$\iiint_{R^3} F(x, y, z) dV = \iint_R \left(\int_{G_1(x, z)}^{G_2(x, z)} F(x, y, z) dy \right) dA. \quad (17)$$

Ejemplo 1. Encuentre una integral iterada que se pueda usar para calcular $\iiint_{R^3} F(x, y, z) dV$, donde R^3 es una región cerrada en el espacio-3 limitada por la esfera con centro $(4, 2, 4)$ y radio 3.

Solución. La región R^3 que se muestra en la Fig. 11.20, es del tipo $S_{1,2}$. La frontera de R^3 es la gráfica de $(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 9$, ó

$$(z-4)^2 = 9 - (x-4)^2 - (y-2)^2.$$

Es obvio que la proyección de R^3 sobre el plano xy es un disco circular con centro en $(4, 2)$ y radio 3; designemos esta proyección por R (Vea Fig. 11.20). Procuraremos elegir las funciones K_1 y K_2 de tal manera que R^3 esté limitada superiormente por la gráfica de $z = K_2(x, y)$ e inferiormente por la gráfica de $z = K_1(x, y)$. Para encontrar $K_1(x, y)$ y $K_2(x, y)$ procederemos como sigue. Sea $P(x_i, y_i)$ un punto interior de R ; una línea que pase por P perpendicular al plano xy intersectará a la frontera de R^3 en dos puntos $M(x_i, y_i, z_1)$ y $N(x_i, y_i, z_2)$ donde

$$z_1 = 4 - \sqrt{9 - (x_i - 4)^2 - (y_i - 2)^2}$$

y

$$z_2 = 4 + \sqrt{9 - (x_i - 4)^2 - (y_i - 2)^2}.$$

Por tanto, si $Q(x_i, y_i, z_i)$ es un punto en R^3 , entonces z_i satisface la desigualdad

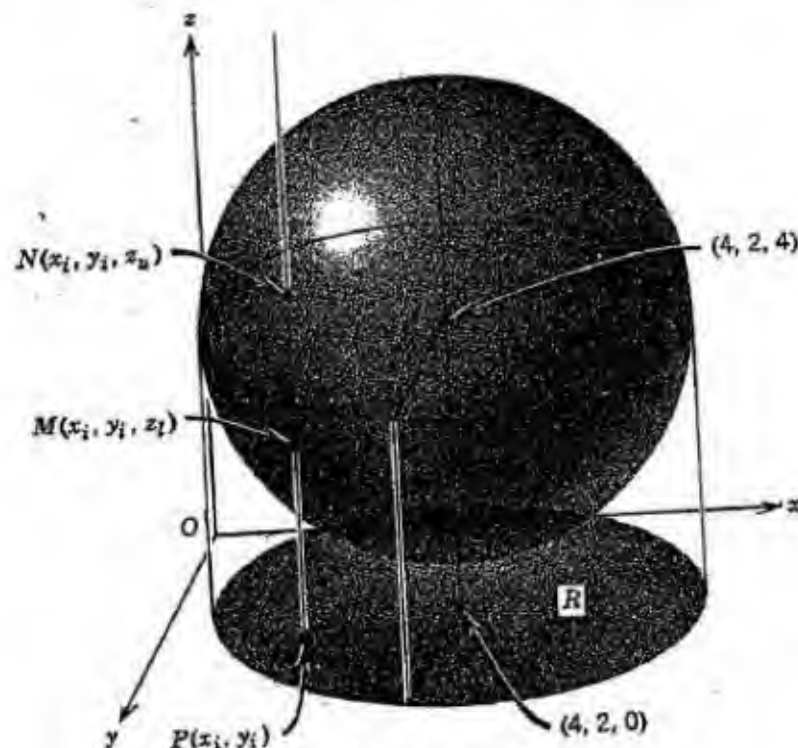
$$4 - \sqrt{9 - (x_i - 4)^2 - (y_i - 2)^2} \leq z_i \leq 4 + \sqrt{9 - (x_i - 4)^2 - (y_i - 2)^2}.$$


Fig. 11.20

y vemos que R^3 es la gráfica de

$$\{(x, y, z) \mid 4 - \sqrt{9 - (x - 4)^2 - (y - 2)^2} \leq z \leq 4 + \sqrt{9 - (x - 4)^2 - (y - 2)^2}, (x, y) \in R\}$$

donde R es un disco circular en el plano xy limitado por la gráfica de

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 9.$$

Entonces usando el teorema 5(i) tenemos

$$\iiint_{R^3} F(x, y, z) dV = \iint_R \left(\int_{4 - \sqrt{9 - (x - 4)^2 - (y - 2)^2}}^{4 + \sqrt{9 - (x - 4)^2 - (y - 2)^2}} F(x, y, z) dz \right) dA.$$

Ya que R es del tipo T_1 y es la gráfica de

$$\{(x, y) \mid 2 - \sqrt{9 - (x - 4)^2} \leq y \leq 2 + \sqrt{9 - (x - 4)^2} (1 \leq x \leq 7),$$

podemos usar el teorema 2(i) para encontrar

$$\begin{aligned} \iint_R \left(\int_{4 - \sqrt{9 - (x - 4)^2 - (y - 2)^2}}^{4 + \sqrt{9 - (x - 4)^2 - (y - 2)^2}} F(x, y, z) dz \right) dA \\ = \int_1^7 \int_{2 - \sqrt{9 - (x - 4)^2}}^{2 + \sqrt{9 - (x - 4)^2}} \int_{4 - \sqrt{9 - (x - 4)^2 - (y - 2)^2}}^{4 + \sqrt{9 - (x - 4)^2 - (y - 2)^2}} F(x, y, z) dz dy dx, \end{aligned}$$

y esta integral iterada nos da el valor de I .

Ejemplo 2. Calcule $I = \iiint_{R^3} (3y + yz) dV$, donde R^3 es la región limi-

tada por las gráficas de $\{(x, y, z) \mid y^2 + z^2 = 9\}$, $\{(x, y, z) \mid x + z = 3\}$ y $\{(x, y, z) \mid x = 0\}$.

Solución. La región R^3 se muestra en la Fig. 11.21. Aquí es más conveniente encontrar la proyección de R^3 sobre el plano yz ; esta proyección es el disco circu-

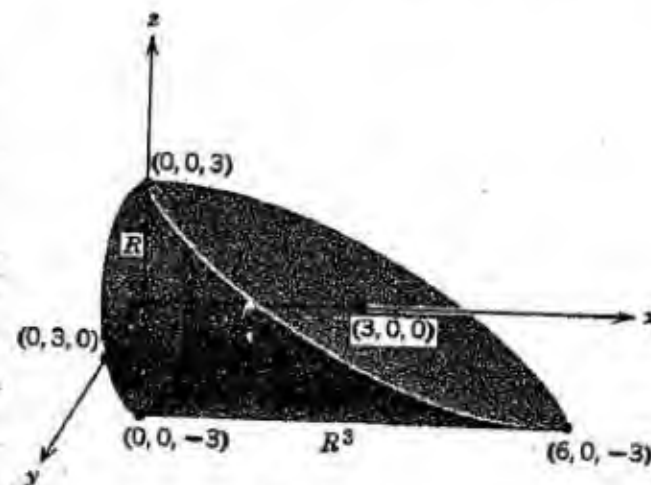


Fig. 11.21

lar R (Fig. 11.21) cuyo centro es el origen y radio 3. Entonces, por el teorema 5(ii) podemos escribir

$$I = \iint_R \left(\int_{H_1(y,z)}^{H_2(y,z)} (3y + yz) dx \right) dA,$$

donde H_1 y H_2 son funciones tales que R^0 es la gráfica de

$$\{(x, y, z) \mid H_1(y, z) \leq x \leq H_2(y, z), (y, z) \in R\}.$$

Para determinar las fórmulas de $H_1(y, z)$ y $H_2(y, z)$ consideremos una línea que pase por un punto interior (y_i, z_i) de R perpendicular al plano yz . Esta línea intersectará a la frontera de R^3 en dos puntos, $M(x_i, y_i, z_i)$ en la frontera izquierda y $N(x_i, y_i, z_i)$ en la frontera derecha, y es evidente que $x_i = 0$ y $x_i = 3 - z_i$ para cualquier (y_i, z_i) en el interior de R .

Por tanto,

$$\begin{aligned} I &= \iint_R \left(\int_0^{3-z} (3y + yz) dx \right) dA \\ &= \iint_R \left((3y + yz)x \Big|_{x=0}^{x=3-z} \right) dA = \iint_R (9y - yz^2) dA. \end{aligned}$$

Ya que la frontera de R es el círculo en el plano yz con ecuación $y^2 + z^2 = 9$, podemos usar el teorema 2 para encontrar

$$\begin{aligned} I &= \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-z^2}}^{\sqrt{9-z^2}} (9y - yz^2) dz dy = \int_{-3}^3 \left[9yz - y \frac{z^3}{3} \right]_{z=-\sqrt{9-z^2}}^{z=\sqrt{9-z^2}} dy \\ &= \int_{-3}^3 \left[18y\sqrt{9-z^2} - \frac{2y}{3} (9-z^2)^{3/2} \right] dy = 0. \end{aligned}$$

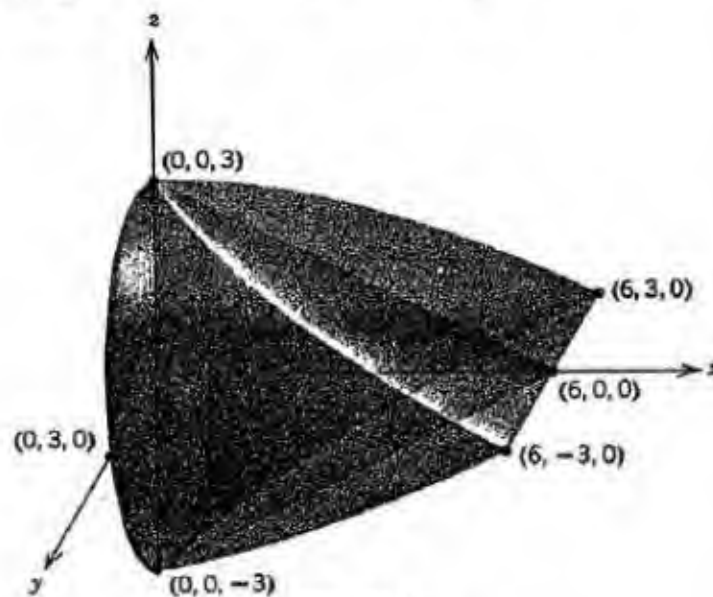


Fig. 11.22

En situaciones en las cuales R^3 no es una región de los tipos $S_{1,2}$, $S_{3,2}$ ó $S_{2,3}$, o su frontera es tal que la determinación de las fórmulas para las expresiones $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$, $H_1(y, z)$, $H_2(y, z)$, $G_1(x, z)$, $G_2(x, z)$ del teorema 5 no es posible, es útil usar el teorema 6 (dado sin demostración) el cual es análogo al teorema 3 de la Sec. 11.13.

Teorema 6. Sean R_1^3 y R_2^3 dos regiones en el espacio 3 y sea F una función tal que $\iiint_{R_1^3} F(x, y, z) dV$ y $\iiint_{R_2^3} F(x, y, z) dV$ existen. Si R_1^3 y R_2^3 no tienen puntos en común excepto puntos frontera, y si $R^3 = R_1^3 \cup R_2^3$, entonces $\iiint_{R^3} F(x, y, z) dV = \iiint_{R_1^3} F(x, y, z) dV + \iiint_{R_2^3} F(x, y, z) dV$.

Ejemplo 3. Sea $I = \iiint_{R^3} F(x, y, z) dV$ donde R^3 es la región limitada por

las gráficas de

$$\{(x, y, z) \mid y^2 + z^2 = 9\}, \quad \{(x, y, z) \mid x + 2z = 6\}, \quad \{(x, y, z) \mid x - 2z = 6\},$$

y

$$\{(x, y, z) \mid x = 0\}.$$

(a) Establezca una suma de integrales iteradas de $F(x, y, z)$ que se puedan usar para calcular I y en la cual la primera integración sea con respecto a x , (b) una integral iterada de $F(x, y, z)$ que se pueda usar para calcular I y en la cual la primera integración se haga con respecto a y .

Solución. (a) Si deseamos integrar primero con respecto a x , consideremos la proyección R de R^3 sobre el plano yz ; vea Fig. 11.22. Esta proyección es del disco circular limitado por el círculo con ecuación $y^2 + z^2 = 9$. Se ve claro que R^3 es del tipo $S_{2,3}$; entonces buscamos las funciones H_1 y H_2 para las cuales se verifica la igualdad (16) del teorema 5(ii). Si consideramos una recta que pasa por el punto interior (y_i, z_i) de R y es perpendicular al plano yz esta línea intersecta a la frontera de R^3 en dos puntos $M(0, y_i, z_i)$ y $N(x_i, y_i, z_i)$. Veamos además que $x_i = 6 - 2z_i$ si la recta está arriba del plano xy y $x_i = 6 + 2z_i$ si la recta está abajo del plano xy . Por tanto, la función H_2 es la igualdad (16), no se puede especificar por una fórmula sencilla. Entonces consideraremos R como la unión de R_1 y R_2 , donde R_1 es la parte de R para la cual $z \geq 0$ y R_2 es la parte de R para la cual $z \leq 0$. Entonces, usando los teoremas 6 y 5(ii), podemos escribir

$$\iiint_{R^3} F(x, y, z) dV = \iint_{R_1} \left(\int_0^{6-2z} F(x, y, z) dx \right) dA + \iint_{R_2} \left(\int_0^{6+2z} F(x, y, z) dx \right) dA,$$

y por tanto (al usar teorema 2),

$$\begin{aligned} \iiint_{R^3} F(x, y, z) dV &= \int_0^3 \int_{-\sqrt{9-z^2}}^{\sqrt{9-z^2}} \int_0^{6-2z} F(x, y, z) dx dy dz + \int_{-3}^0 \int_{-\sqrt{9-z^2}}^{\sqrt{9-z^2}} \int_0^{6+2z} F(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned}$$

(b) Si descamos integrar primero con respecto a y , consideraremos la proyección R^* de R^3 sobre el plano xz . Esta proyección es la región triangular cerrada en el plano xz limitada por las gráficas de $x = 0$, $x + 2z = 6$, y $x - 2z = 6$. Una recta perpendicular al plano xz que pasa por un punto interior (x_i, z_i) de R^* intersectará a la frontera de R^3 en dos puntos $T(x_i, y_i, z_i)$ y $U(x_i, y_i, z_i)$ donde $y_i = -\sqrt{9 - z_i^2}$ y $y_i = \sqrt{9 - z_i^2}$. Por tanto R^3 es del tipo $S_{1,3}$ y es la gráfica de

$$\{(x, y, z) \mid -\sqrt{9 - z^2} \leq y \leq \sqrt{9 - z^2}, (x, z) \in R^*\},$$

además al usar la igualdad (17) en el teorema 5(iii) tenemos

$$\iiint_{R^3} F(x, y, z) dV = \iint_{R^*} \left(\int_{-\sqrt{9-z^2}}^{\sqrt{9-z^2}} F(x, y, z) dy \right) dA.$$

Ya que la región R^* es la gráfica de

$$\{(x, z) \mid -3 + \frac{x}{2} \leq z \leq 3 - \frac{x}{2}, 0 \leq x \leq 6\},$$

vemos que

$$\iiint_{R^3} F(x, y, z) dV = \int_0^6 \int_{-3+(x/2)}^{3-(x/2)} \int_{-\sqrt{9-z^2}}^{\sqrt{9-z^2}} F(x, y, z) dy dz dx.$$

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 4 la integral iterada dada nos proporciona el valor de la integral triple $\iiint_{R^3} F(x, y, z) dV$. En cada ejercicio describa la región R^3 sobre la cual se integra y dibuje la gráfica de R^3 . Además describa la proyección de R de R^3 sobre el plano de coordenadas apropiado y dibuje la gráfica de R .

$$1. \int_0^1 \int_0^{4-x} \int_0^{4-x-y} F(x, y, z) dz dy dx.$$

$$2. \int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} F(x, y, z) dz dx dy.$$

$$3. \int_0^1 \int_0^x \int_{-\sqrt{x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2-y^2}} F(x, y, z) dx dy dz.$$

$$4. \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{12-x^2-y^2}} F(x, y, z) dz dx dy.$$

En cada uno de los ejercicios del 5 al 8 describa y grafique la región R^3 sobre la cual se integra, escriba una integral iterada (o suma de integrales iteradas) con diferente orden de integración y que tenga el mismo valor de la integral iterada dada.

$$5. \int_0^4 \int_{-\sqrt{16-z^2}}^{\sqrt{16-z^2}} \int_{-\sqrt{16-z^2-y^2}}^{\sqrt{16-z^2-y^2}} F(x, y, z) dz dy dx.$$

$$6. \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{12-y^2}} \int_{-2}^{16-x^2-y^2} F(x, y, z) dz dx dy.$$

$$7. \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{8-2x^2}}^{\sqrt{8-2x^2}} \int_{-1/\sqrt{8-x^2-2x^2}}^{1/\sqrt{8-x^2-2x^2}} F(x, y, z) dy dz dx.$$

$$8. \int_{-2}^2 \int_{-3/2\sqrt{4-x^2}}^{3/2\sqrt{4-x^2}} \int_{-1}^4 F(x, y, z) dz dy dx.$$

En los ejercicios del 9 al 12 se especifica una función F y se describe una región R^3 . Dibuje la gráfica de R^3 y encuentre el valor de $\iiint_{R^3} F(x, y, z) dV$ en cada ejercicio.

9. $F(x, y, z) = xz + yz$; R^3 está limitada por las gráficas de $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 16\}$, $\{(x, y, z) \mid z = 0\}$ y $\{(x, y, z) \mid z = 3\}$.

10. $F(x, y, z) = xyz$; R^3 es la región en el primer octante limitada por las gráficas de $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 4\}$ y $\{(x, y, z) \mid y^2 + z^2 = 4\}$.

11. $F(x, y, z) = z$; R^3 es la región limitada por los planos con ecuaciones $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, y $x - y - z = 0$.

12. $F(x, y, z) = x^2yz$; R^3 es la región cerrada en el primer octante limitada por la esfera con centro en el origen y radio a .

11.8 Volúmenes por integrales triples. Consideremos una región cerrada acotada R^3 en el espacio-3, sea N_k^3 una red de paralelepípedos

$$R_1^3, R_2^3, \dots, R_i^3, \dots, R_k^3$$

de R^3 , y representemos por

$$\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_i, \dots, \Delta V_k$$

los volúmenes respectivos de los k paralelepípedos. La suma

$$\Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots + \Delta V_i + \dots + \Delta V_k = \sum_{i=1}^k \Delta V_i$$

nos da una aproximación del "volumen" de la región R^3 , y mientras más pequeña es la norma \mathcal{N}_k^3 de la red, mejor es la aproximación.

Si existe un número V con la propiedad de que dado un número $\epsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\left| V - \sum_{i=1}^k \Delta V_i \right| < \epsilon$$

para todas las redes N_k^3 con norma $\mathcal{N}_k^3 < \delta$, definiremos* V como el volumen de la región R^3 . Note que si $F(x, y, z) = 1$, entonces la suma que se usó para definir $\iiint_{R^3} F(x, y, z) dV$ es la suma $\sum_{i=1}^k \Delta V_i$. Por tanto, si $\iiint_{R^3} 1 dV$ existe, la región R^3 tiene un volumen V dado por

* Se puede demostrar que esta definición de volumen es consistente con las definiciones de volumen dadas para regiones de tipos especiales de las Secs. 5.9 y 11.4.

$$V = \iiint_{R^3} dV. \quad (18)$$

Si la región R^3 es del tipo $S_{1,2}$ y es además la gráfica de $\{(x, y, z) \mid K_1(x, y) \leq z \leq K_2(x, y), (x, y) \in R\}$ donde R es la proyección de R^3 sobre el plano xy , entonces el volumen V de la región R^3 se puede encontrar por

$$V = \iiint_{R^3} dV = \iint_R \left(\int_{K_1(x,y)}^{K_2(x,y)} dz \right) dA = \iint_R [K_2(x, y) - K_1(x, y)] dA.$$

El estudiante debe comparar esta igualdad con la igualdad (9) de la Sec. 11.4, y ver que dan el mismo valor para el volumen de una región del tipo $S_{1,2}$.

Ejemplo 1. Encuentre el volumen V de la región R^3 , que se muestra en la Fig. 11.21, la cual está limitada por las gráficas de $\{(x, y, z) \mid y^2 + z^2 = 9\}$, $\{(x, y, z) \mid x + z = 3\}$ y $\{(x, y, z) \mid x = 0\}$.

Solución. Tenemos que $V = \iiint_{R^3} dV$, y al referirnos al ejemplo 2 de la Sec. 11.7 podemos escribir

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{R^3} dV = \int_{-2}^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \int_0^{3-z} dx dz dy \\ &= \int_{-2}^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} (3-z) dz dy = \int_{-2}^3 6\sqrt{9-y^2} dy = 27\pi. \end{aligned}$$

EJERCICIOS

Encuentre, usando integrales triples, el volumen de la región descrita en cada ejercicio.

1. La región en el primer octante limitada por las gráficas de $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 4\}$, y $\{(x, y, z) \mid y^2 + z^2 = 4\}$.
2. La región limitada por las gráficas de $\{(x, y, z) \mid x^2 = z\}$, $\{(x, y, z) \mid x^2 = 4 - z\}$, $\{(x, y, z) \mid x + 2y = 4\}$ y $\{(x, y, z) \mid y = 0\}$.
3. La región limitada por las gráficas de $\{(x, y, z) \mid z = x^2 + 2y^2\}$, $\{(x, y, z) \mid x + y = 1\}$, y los planos de coordenadas.
4. La región limitada por las gráficas de $\{(x, y, z) \mid y^2 = a^2 - 2ax\}$ y los planos con ecuaciones $x = z$ y $x = 0$.
5. La región limitada por los cilindros con ecuaciones $x^2 = 4 - 4z$ y $y^2 = 4 - 4z$ y el plano xy .
6. La región limitada por la gráfica de $4z = x^2 + 4y^2$ y el plano con ecuación $z = 1$.

11.9 Transformaciones de integrales múltiples. Coordenadas polares. En esta sección y la Sec. 11.10 discutiremos los dos casos siguientes.

Primero, consideraremos la integral $\iint_R F(x, y) dA$ y supongamos que D , es

una región cerrada en el plano uv limitada por una curva cerrada, con la propiedad de que a cada punto D corresponde uno y sólo un punto de R . Nos preguntamos si existe una función F^* con la propiedad de que $\iint_D F^*(u, v) dA$ tenga el mismo valor que $\iint_R F(x, y) dA$; esto es, deseamos encontrar $F^*(u, v)$ tal que

$$\iint_R F(x, y) dA = \iint_D F^*(u, v) dA \quad (19)$$

En forma similar, consideremos la integral $\iiint_{R^3} F(x, y, z) dV$ y supongamos que D^3 , es una región cerrada en el espacio-3 limitada por una superficie formada por la unión de un número finito de superficies uniformes, con la propiedad de que a cada punto $(u, v, w) \in D^3$ le corresponde uno y sólo un punto $(x, y, z) \in R^3$. Nos preguntamos si existe una función F^* con la propiedad de que $\iiint_{D^3} F^*(u, v, w) dV$ tiene el mismo valor de $\iiint_{R^3} F(x, y, z) dV$; esto es, deseamos encontrar $F^*(u, v, w)$ de modo que

$$\iiint_{R^3} F(x, y, z) dV = \iiint_{D^3} F^*(u, v, w) dV. \quad (20)$$

Se pueden expresar condiciones bajo las cuales es posible encontrar $F^*(u, v)$ y $F^*(u, v, w)$ tales que (19) y (20) sean verdaderas. Para ello se hace uso de los conceptos de transformaciones y Jacobianos de las transformaciones.

Supongamos que D y R son regiones en el espacio-2. Una función T cuyo dominio es D y cuyo rango es R se llama **transformación de D sobre R** . La transformación T se especifica comúnmente por el sistema de ecuaciones

$$x = X(u, v), \quad y = Y(u, v), \quad (21)$$

donde X y Y son funciones cuyos dominios contienen a D , y con la propiedad de que si $(u, v) \in D$ entonces $(X(u, v), Y(u, v)) \in R$. La transformación T se puede escribir

$$T = \{(u, v), (x, y) \mid x = X(u, v), \quad y = Y(u, v), \quad (u, v) \in D, \quad (x, y) \in R\}.$$

Algunas veces diremos que D se mapea sobre R por la transformación T .

Por ejemplo, consideremos la función

$$T_1 = \{(u, v), (x, y) \mid x = u^2 - v^2, \quad y = uv, \quad (u, v) \in D, \quad (x, y) \in R\}.$$

†Por conveniencia identificaremos un conjunto de parejas ordenadas de números reales con su gráfica en el espacio-2; hablaremos indistintamente de un conjunto de parejas ordenadas de números reales o de su gráfica como el dominio (o rango) de una transformación de D sobre R .

Supongamos que $D = \{(u, v) \mid u > 0, v > 0\}$; entonces $R = \{(x, y) \mid y > 0\}$; y la función T_1 es una transformación del primer cuadrante del plano uv sobre el semi-plano superior xy .

Si para la función

$$T_2 = \{((u, v), (x, y)) \mid x = u, y = 0 \cdot v, (u, v) \in D, (x, y) \in R\}$$

hacemos $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, entonces $R = (-\infty; +\infty)$, y T_2 transformará el plano uv sobre el eje x .

Supongamos que D^3 y R^3 son regiones en el espacio-3. Una función T^3 cuyo dominio es D^3 y cuyo rango es R^3 se llama **una transformación de D^3 sobre R^3** . Tal transformación se especifica comúnmente por el sistema de ecuaciones

$$x = X(u, v, w), \quad y = Y(u, v, w), \quad z = Z(u, v, w), \quad (22)$$

donde X, Y, Z son funciones cuyos dominios contienen a D^3 y tiene la propiedad de que si $(u, v, w) \in D^3$, entonces $(X(u, v, w), Y(u, v, w), Z(u, v, w)) \in R^3$. La transformación T^3 se puede escribir

$$T^3 = \{((u, v, w), (x, y, z)) \mid x = X(u, v, w), y = Y(u, v, w), z = Z(u, v, w), (u, v, w) \in D^3, (x, y, z) \in R^3\}.$$

Como ejemplo, sea

$$T_1^3 = \{((u, v, w), (x, y, z)) \mid x = e^{au}, y = e^{bv}, z = e^{cw}, (u, v, w) \in D^3, (x, y, z) \in R^3\},$$

donde a, b y c son números positivos. Si $D^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, entonces

$$R^3 = \{(x, y, z) \mid x > 0, y > 0, z > 0\}$$

y T_1^3 transforma el espacio uvw sobre el primer octante del plano xyz .

Sea T la transformación especificada por el sistema (21). El **Jacobiano** de la transformación T se representa por $J\left(\frac{x, y}{u, v}\right)$ y se define como:

$$J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = \begin{vmatrix} D_u X(u, v) & D_v X(u, v) \\ D_u Y(u, v) & D_v Y(u, v) \end{vmatrix}.$$

Note que $J\left(\frac{x, y}{u, v}\right)$ es un determinante, y en el cálculo de un Jacobiano se hace uso frecuente de las propiedades de los determinantes.

Por ejemplo, $J_1\left(\frac{x, y}{u, v}\right)$ representa al Jacobiano de la transformación T_1 .

† Por conveniencia identificaremos un conjunto de triadas ordenadas de números reales con su gráfica en el espacio-3 y hablaremos indistintamente de un conjunto de triadas ordenadas de números reales o de su gráfica como el dominio (o rango) de una transformación de D^3 sobre R^3 .

definida en la p. 627 y $J_2\left(\frac{x, y}{u, v}\right)$ representa al Jacobiano de la transformación T_2 definida en la p. 628. Entonces

$$J_1\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{vmatrix} = 2u^2 + 2v^2,$$

$$J_2\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Sea T^3 la transformación especificada por el sistema (22). El **Jacobiano** de la transformación T^3 se representa por $J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right)$ y se define por

$$J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) = \begin{vmatrix} D_u X(u, v, w) & D_v X(u, v, w) & D_w X(u, v, w) \\ D_u Y(u, v, w) & D_v Y(u, v, w) & D_w Y(u, v, w) \\ D_u Z(u, v, w) & D_v Z(u, v, w) & D_w Z(u, v, w) \end{vmatrix}.$$

Algunas veces $J\left(\frac{x, y}{u, v}\right)$ se presenta por $\frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)}$, y $J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right)$ se representa por $\frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(u, v, w)}$.

Limitaremos nuestras consideraciones a transformaciones que satisfagan las siguientes condiciones

La transformación T estará dada por

$$x = X(u, v), \quad y = Y(u, v) \quad (u, v) \in D$$

donde X_u, X_v, Y_u y Y_v son continuas en D , y además

$$J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) > 0 \quad \text{ó} \quad J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) < 0 \quad \text{para} \quad (u, v) \in D.$$

La transformación T^3 estará dada por

$$x = X(u, v, w), \quad y = Y(u, v, w), \quad z = Z(u, v, w), \quad (u, v, w) \in D^3$$

donde $X_u, X_v, X_w, Y_u, Y_v, Y_w, Z_u, Z_v$ y Z_w son continuas en D^3 y

$$J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) > 0 \quad \text{ó} \quad J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) < 0 \quad \text{para} \quad (u, v, w) \in D^3.$$

Bajo estas condiciones la transformación T mapea una región cerrada y acotada D sobre una región cerrada y acotada R de tal manera que uno y sólo un punto de R corresponde a cada punto de D y la frontera de D se mapea sobre la frontera de R . Además si $J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \neq 0$ para $(u, v) \in D$ existe una transformación T^* de R sobre D definida por el sistema

$$u = U(x, y), \quad v = V(x, y), \quad (x, y) \in R,$$

donde U_x, U_y, V_x y V_y son continuas en R y $J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \neq 0$ para $(x, y) \in R$. T^* se llama la inversa de la transformación T , y ambas T y T^* son biunívocas.

Proposiciones similares son verdaderas para la transformación T^2 .

Por ejemplo, supongamos que para la transformación T_1 definida en la p. 628 tenemos que:

$$D = \{(u, v) \mid 1 \leq u \leq 2, 3 \leq v \leq 4\}.$$

Entonces R es la región cerrada en el segundo cuadrante limitada por las gráficas de $y^2 = -(x-1)$, $y^2 = -4(x-4)$, $y^2 = 9(x+9)$, y $y^2 = 16(x+16)$. Aquí $J_1\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = 2u^2 + 2v^2 \neq 0$ para $(u, v) \in D$ y T_1 es una transformación biunívoca de D sobre R .

El teorema 7 da las condiciones suficientes para la existencia de una función F^* para la cual se verifique la igualdad (19) y además el teorema especifica la función F^* de (19).

El teorema 8 da las especificaciones para la función F^* para la cual se verifica la igualdad (20) y las condiciones suficientes para la existencia de dicha función. Enunciaremos estos teoremas sin demostración.[†]

Teorema 7. Supongamos que la integral $\iint_R F(x, y) dA$ existe. Sea T una transformación definida por

$$x = X(u, v), \quad y = Y(u, v), \quad (u, v) \in D, \quad (23)$$

donde D es la región en el espacio-2 la cual se transforma sobre R mediante T .

Si las funciones X y Y que aparecen en (23) tienen primeras derivadas parciales continuas en D , y si

$$J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \neq 0 \quad \text{para } (u, v) \in D,$$

entonces

$$\iint_R F(x, y) dA = \iint_D F[X(u, v), Y(u, v)] \left| J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \right| dA. \quad (24)$$

Este teorema es aún verdadero si $J\left(\frac{x, y}{u, v}\right)$ es cero para algunos puntos de D , puesto que $J\left(\frac{x, y}{u, v}\right)$ no cambie de signo en D .

Como ejemplo del uso del teorema 7 consideremos $\iint_R (x+y) dA$ donde R

[†] Para la demostración de estos teoremas y una discusión más detallada de integrales múltiples vea *Advanced Calculus* de R. C. Buck, Mc. Graw-Hill Book Company, New York, 1956. Secs. 5.1, 5.7 y 6.1.

es la región que se muestra en la Fig. 11.23(a). Sea D la región cerrada que se muestra en la Fig. 11.23(b) y sea T la transformación definida por

$$x = X(u, v) = u \cos v, \quad y = Y(u, v) = u \sin v, \quad (u, v) \in D. \quad (25)$$

La región D está limitada a la izquierda por la gráfica de $u = 1$. Como (por 25) $[X(u, v)]^2 + [Y(u, v)]^2 = u^2$, vemos que la transformación T mapea la línea con ecuación $u = 1$ sobre el círculo con ecuación $x^2 + y^2 = 1$. En forma semejante la línea que es la gráfica de $u = 5$ y además limita a D a la derecha se mapea sobre el círculo con ecuación $x^2 + y^2 = 25$.

La región D está limitada inferiormente por el segmento de línea que es la gráfica de $\{(u, v) \mid v = -\frac{\pi}{4}; 1 \leq u \leq 5\}$ y la transformación T mapea este segmento sobre el segmento de línea que es la gráfica de

$$\left\{ (x, y) \mid x = u \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right), \quad y = u \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right), \quad 1 \leq u \leq 5 \right\},$$

esto es, sobre la parte de la línea con ecuación $y = -x$ entre los puntos $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$. La región D está limitada superiormente por

el segmento de línea que es la gráfica de $\{(u, v) \mid v = \frac{2\pi}{3}; 1 \leq u \leq 5\}$ y T mapea este segmento sobre el segmento de línea que es la gráfica de

$$\left\{ (x, y) \mid x = u \cos \frac{2\pi}{3}; \quad y = u \sin \frac{2\pi}{3}; \quad 1 \leq u \leq 5 \right\},$$

esto es, sobre la parte de la línea con ecuación $\frac{y}{x} = \tan \frac{2\pi}{3}$ ó $y = -\sqrt{3}x$ entre los puntos $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(-\frac{5}{2}; \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$.

La transformación T dada por (25) mapea a la región D que se muestra en la Fig. 11.23(b) sobre la región R que se muestra en la Fig. 11.23(a). Para esta transformación tenemos

$$J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = \begin{vmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{vmatrix} = u \cos^2 v + u \sin^2 v = u.$$

Ya que $J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \neq 0$ para $(u, v) \in D$ y las funciones X y Y tienen primeras derivadas parciales continuas en D , se puede aplicar el teorema 7, y tenemos

$$\iint_R (x+y) dA = \iint_D (u \cos v + u \sin v) u dA.$$

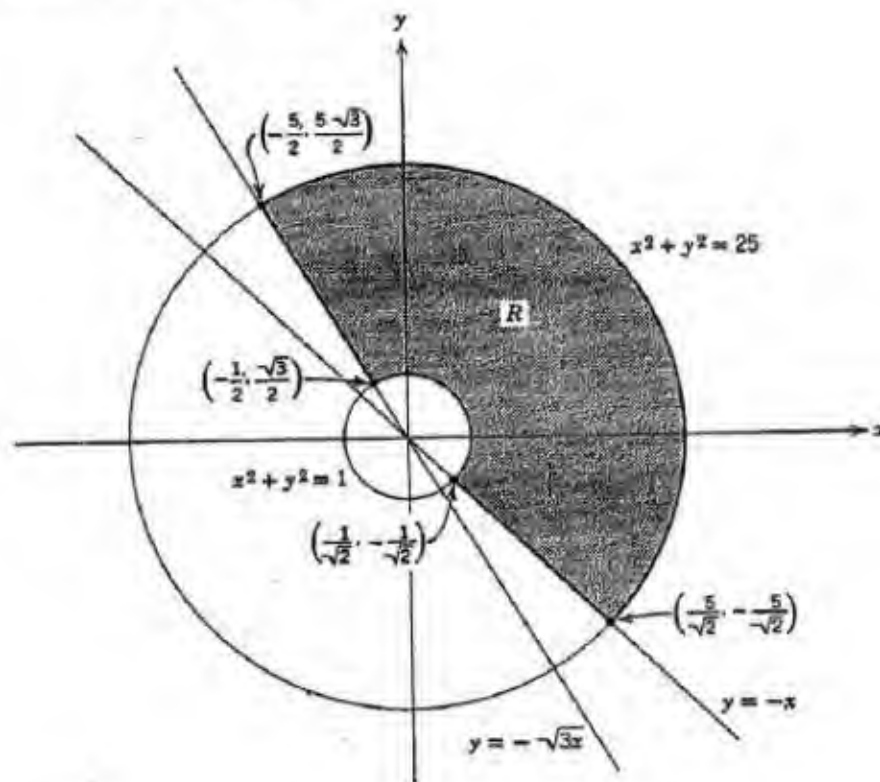


Fig. 11.23(a)

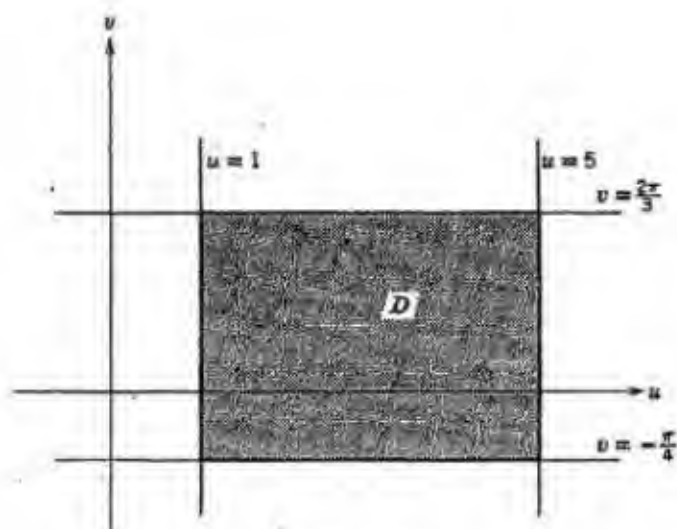


Fig. 11.23(b)

Ya que D es una región del tipo T_2 limitada por las gráficas de $u = 1, u = 5, v = -\frac{\pi}{4}$; y $v = \frac{2\pi}{3}$; tenemos

$$\begin{aligned} \iint_R (x + y) dA &= \int_{-\pi/4}^{2\pi/3} \int_1^5 u^2 (\cos v + \sin v) du dv \\ &= \int_{-\pi/4}^{2\pi/3} \frac{124}{3} (\cos v + \sin v) dv = \frac{62}{3} (1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Es evidente que es mucho más complicado el cálculo de $\iint_R (x + y) dA$ usando integrales iteradas en las variables x y y , que auxiliándose del teorema 7. Cuando se usa el teorema 7 para calcular una integral dada decimos que hemos calculado la integral por un *cambio de variable*. El cálculo de una integral doble por un cambio de variable puede ser útil cuando el cambio de variable va acompañado por una transformación T , que tiene la propiedad de que la región D que se mapea sobre R por T es del tipo T_1 ó T_2 .

Teorema 8. Supongamos que la integral $\iiint_{D^3} F(x, y, z) dV$ existe. Sea T^3 una transformación definida por

$$x = X(u, v, w), \quad y = Y(u, v, w), \quad z = Z(u, v, w), \quad (u, v, w) \in D^3 \quad (26)$$

donde D^3 es la región en el espacio-3 que se transforma sobre R^3 mediante T^3 .

Si las funciones X, Y y Z de (26) tienen primeras derivadas parciales continuas en D^3 y si

$$J \left(\frac{x, y, z}{u, v, w} \right) \neq 0 \quad \text{para } (u, v, w) \in D^3,$$

entonces

$$\begin{aligned} \iiint_{R^3} F(x, y, z) dV &= \iiint_{D^3} F[X(u, v, w), Y(u, v, w), Z(u, v, w)] \left| J \left(\frac{x, y, z}{u, v, w} \right) \right| dV. \quad (27) \end{aligned}$$

Este teorema es aún cierto si $J \left(\frac{x, y, z}{u, v, w} \right)$ es cero en algunos puntos de D^3 , siempre y cuando $J \left(\frac{x, y, z}{u, v, w} \right)$ no cambie de signo en D^3 .

Como ejemplo del uso del teorema 8 consideremos $\iiint_{R^3} (x + z) dV$ donde R^3 es la región que muestra la Fig. 11.24(a). Sea D^3 la región cerrada que se muestra en la Fig. 11.24(b) y T^3 la transformación definida por

$$\begin{aligned} x &= X(u, v, w) = u \cos v \sin w, & y &= Y(u, v, w) = u \sin v \sin w, \\ z &= Z(u, v, w) = u \cos w, & (u, v, w) &\in D^3. \end{aligned} \quad (28)$$

Se puede ver que T^3 mapea la cara derecha del paralelepípedo D^3 sobre la parte de la esfera con ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, que está limitada por el triángulo esférico con vértices $(0, 0, 2)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ y $(2, 0, 0)$. En forma semejante la cara izquierda del paralelepípedo D^3 se mapea sobre la parte de la esfera con ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, que está limitada por el triángulo esférico con vértices $(0, 0, 1)$, $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, y $(1, 0, 0)$.

La transformación T^3 mapea la región D^3 que se muestra en la figura 11.24(b) sobre la región R^3 que se muestra en la Fig. 11.24(a). El jacobiano de esta transformación es

$$J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) = \begin{vmatrix} \cos v \sin w & -u \sin v \sin w & u \cos v \cos w \\ \sin v \sin w & u \cos v \sin w & u \sin v \cos w \\ \cos w & 0 & -u \sin w \end{vmatrix} = -u^2 \sin w.$$

Note que aunque $J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right)$ es cero para algunos puntos de D^3 no cambió de signo en D^3 . Como las funciones X, Y , y Z de (28) tienen primeras derivadas continuas en D^3 , se puede aplicar el teorema 8 (vea el enunciado del teorema 8) y tenemos

$$\iiint_{R^3} (x + z) dV = \iiint_{D^3} (u \cos v \sin w + u \cos w) |-u^2 \sin w| dV.$$

Ya que D^3 es del tipo $S_{2,3}$, podemos usar el teorema 5(ii) para establecer

$$\begin{aligned} \iiint_{R^3} (x + z) dV &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \int_1^2 u^3 (\cos v \sin^2 w + \cos w \sin w) du dv dw \\ &= \frac{15\pi}{32} (1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Cuando el teorema 8 se usa de esta manera para calcular una integral dada decimos que hemos calculado la integral por un cambio de variable.

En el ejemplo del uso del teorema 7, la transformación T se definió por el sistema

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad (u, v) \in D, \quad (29)$$

donde D era una región en el plano uv . La forma de las ecuaciones de transformación de (29) recuerda a la relación entre un sistema de coordenadas rectangulares y un sistema de coordenadas polares superpuesto en el sistema rectangular (Fig. 11.25); esta relación fue discutida en la Sec. 8.5 y está dada por dos ecuaciones

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \quad (30)$$

Las coordenadas polares (r, θ) de un punto P en un sistema de coordenadas polares son las coordenadas del punto en el plano de coordenadas rectangulares $r\theta$ que se mapea sobre P por la transformación (30), y la ecuación en coor-

nadas polares de una curva C en un sistema de coordenadas polares es la ecuación de la curva en el plano de coordenadas rectangulares $r\theta$ que se mapea sobre C por la transformación (30). Al usar la transformación (30) no es necesario

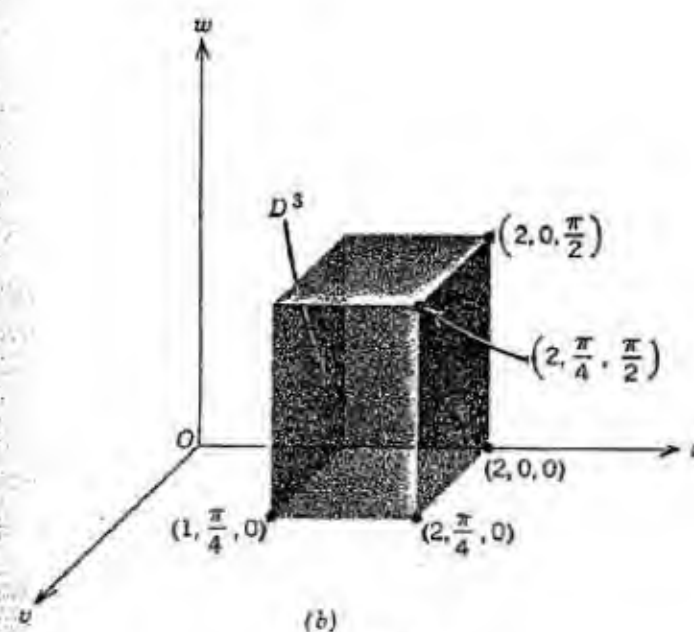
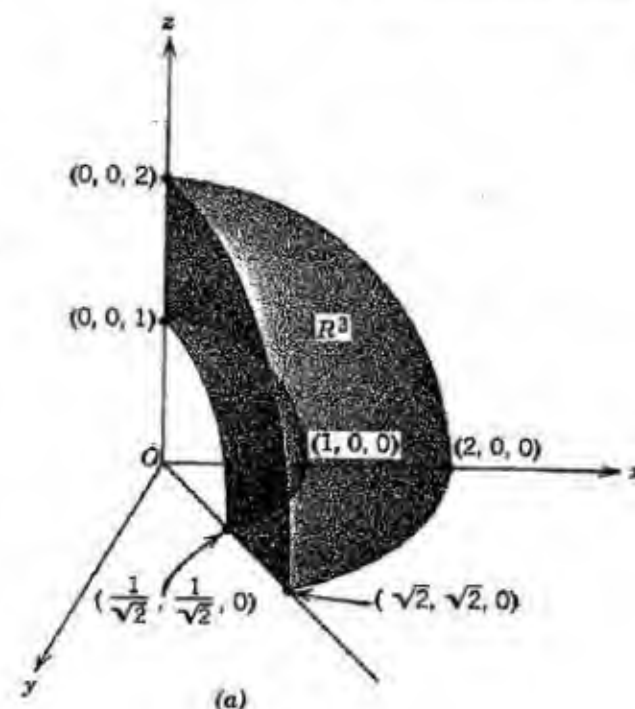


Fig. 11.24

hacer uso de un plano $r\theta$ separado, sino simplemente superponer un sistema de coordenadas polares al plano xy , como se muestra en la Fig. 11.25.

Al aplicar el teorema 7 al cálculo de una integral doble en una región R usando un cambio de variable, deseamos determinar una transformación T y una región D tal que T transforme a D sobre R y además que D sea del tipo T_1 , ó T_2 , ó la unión de un número finito de regiones del tipo T_1 y T_2 . Cuando la transformación es la "coordenada polar" (30), entonces D será una región del tipo T_2 (en el plano $r\theta$) si la región R es del tipo que se describe en la Sec. 8.5 y se muestra en la Fig. 8.33. Esto es, D será del tipo T_2 si existen las funciones G_1 y G_2 y las constantes a y b tales que $b - a \leq 2\pi$, y $G_1(\theta) \leq G_2(\theta)$ para $\theta \in [a; b]$, y si la región R está limitada (en coordenadas polares) por las gráficas de

$$r = G_1(\theta), \quad r = G_2(\theta), \quad \theta = a, \quad \text{y} \quad \theta = b.$$

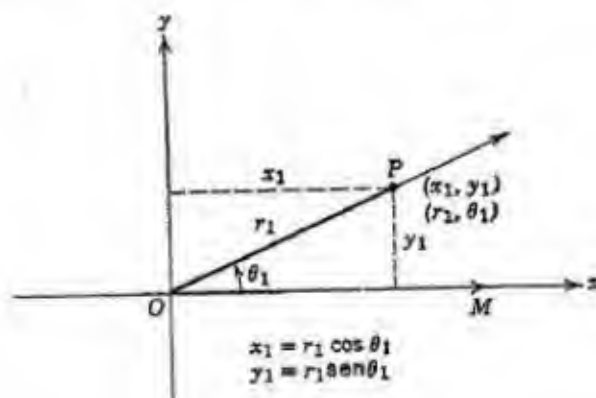


Fig. 11.25

La región R es la gráfica de

$$\{(r, \theta) \mid G_1(\theta) \leq r \leq G_2(\theta), a \leq \theta \leq b\},$$

y se llama una **región del tipo T_2** .

La región D en el plano $r\theta$ que se muestra en la Fig. 11.26(b) es del tipo T_2 . Esta región se mapea sobre la región R en el plano xy , que se muestra en la figura 11.26(a) por la transformación

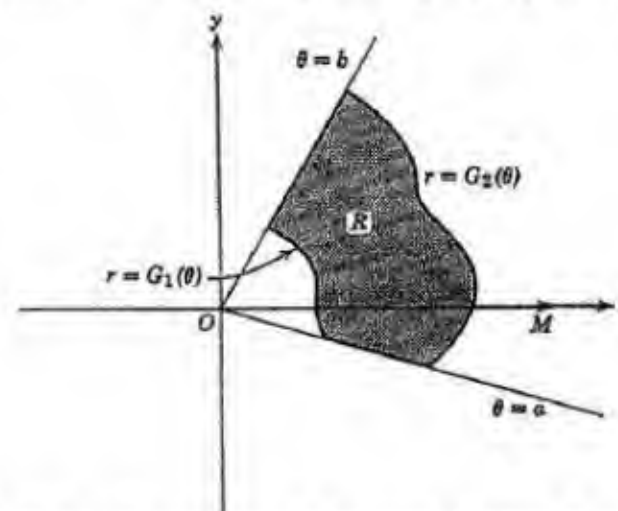
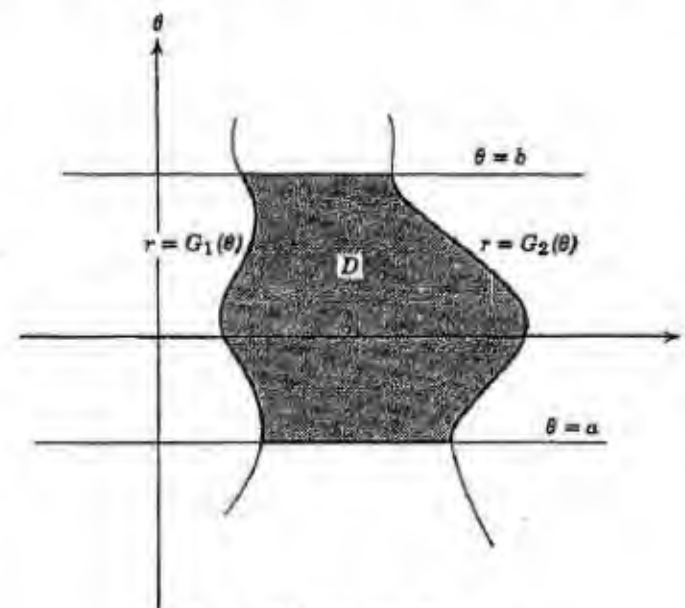
$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad (r, \theta) \in D.$$

La región R es una región del tipo T_2 y las ecuaciones de su frontera se han dado en coordenadas polares. Si deseamos calcular $\iint_R F(x, y) dA$, donde R es la región que se muestra en la Fig. 11.26(a) hacemos uso del teorema 7. El jacobiano $J\left(\frac{x, y}{r, \theta}\right)$ de la transformación en coordenadas polares es r , y ya que $r \neq 0$

para $(r, \theta) \in D$, por el teorema 7 tenemos

$$\begin{aligned} \iint_R F(x, y) dA &= \iint_D F(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_a^b \int_{G_1(\theta)}^{G_2(\theta)} F(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta. \end{aligned}$$

Note que los límites de integración de la integral iterada se pueden obtener directamente de la gráfica de R si las fronteras de R se describen en coordenadas polares. Este procedimiento se puede seguir siempre ya que r no cambia de signo

Fig. 11.26(a) El plano xy sobre el cual se superpone el sistema de coordenadas polaresFig. 11.26(b) El plano $r\theta$

en R , y esto implica que el jacobiano $J\left(\frac{x, y}{r, \theta}\right)$ no cambie de signo. Por tanto tenemos el siguiente teorema.

Teorema 9. Supongamos que $\iint_R F(x, y) dA$ existe. Si R es una región del tipo T , y R es la gráfica (en coordenadas polares) de

$$\{(r, \theta) \mid G_1(\theta) \leq r \leq G_2(\theta), a \leq \theta \leq b\},$$

donde $b - a \leq 2\pi$ y $G_1(\theta) \geq 0$, entonces

$$\iint_R F(x, y) dA = \int_a^b \int_{G_1(\theta)}^{G_2(\theta)} F(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta. \quad (31)$$

Cuando se usa el teorema 9 para calcular $\iint_R F(x, y) dA$ decimos que hemos calculado la integral mediante el uso de coordenadas polares.

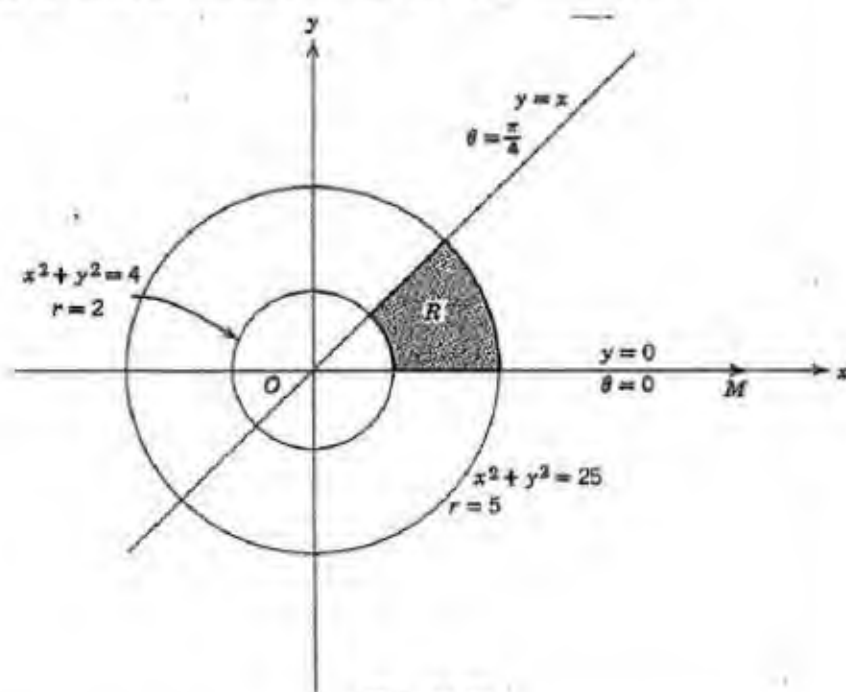


Fig. 11.27

El teorema 9 y la fórmula 7 implican que el área de la región R descrita en el teorema se da por

$$A = \iint_R dA = \int_a^b \int_{G_1(\theta)}^{G_2(\theta)} r dr d\theta.$$

El lector debe comparar este resultado con el obtenido por (19) en la Sec. 8.5.

Ejemplo 1. Encuentre el área de la región R , en el primer cuadrante, que está limitada por las gráficas de $x^2 + y^2 = 25$, $x^2 + y^2 = 4$, $y = 0$, y $y = x$.

Solución. El área de R es $\iint_R dA$ donde R se muestra en la Fig. 11.27. Notamos que el círculo con ecuación $x^2 + y^2 = 25$ en coordenadas rectangulares tiene la ecuación $r = 5$ en coordenadas polares. Análogamente, el círculo con ecuación $x^2 + y^2 = 4$ tiene la ecuación $r = 2$ en coordenadas polares, la línea con ecuación $y = 0$, tiene la ecuación $\theta = 0$, y la línea con ecuación $y = x$ tiene la ecuación $\theta = \pi/4$ en coordenadas polares. Por tanto, R es del tipo T y es la gráfica (en coordenadas polares) de

$$\{(r, \theta) \mid 2 \leq r \leq 5, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}.$$

Al usar la ecuación (31) en el teorema 9 tenemos

$$\iint_R dA = \int_0^{\pi/4} \int_2^5 r dr d\theta = \frac{21}{2} \int_0^{\pi/4} d\theta = \frac{21\pi}{8}.$$

Ejemplo 2. Encuentre el área de la región R limitada por la gráfica (en coordenadas polares) de $r = 2 \cos^2 \theta$.

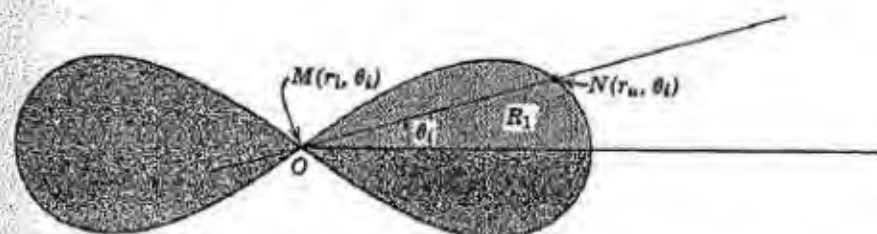


Fig. 11.28

Solución. R es la región sombreada que se muestra en la Fig. 11.28. Para calcular el área de la región R multiplicamos por 4 el área de la región R_1 que se muestra en la figura.

Cualquier línea que pasa por el origen y un punto interior (r_i, θ_i) de R , intersecta a la frontera de R_1 , en dos puntos $M(r_1, \theta_1)$ y $N(r_2, \theta_1)$, donde

$$r_1 = 0, \quad r_2 = 2 \cos^2 \theta_i, \quad \theta_i \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

entonces R_1 es del tipo T , y es la gráfica de

$$\{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2 \cos^2 \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

por lo que al usar el teorema 9 tenemos

$$\begin{aligned}\text{área de } R_1 &= \iint_{R_1} dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \cos^2 \theta} r \, dr \, d\theta = \int_0^{\pi/2} 2 \cos^4 \theta \, d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi/2} \cos^2 2\theta \, d\theta \right] = \frac{3\pi}{8}.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\text{área de } R = 4 \left(\frac{3\pi}{8} \right) = \frac{3\pi}{2}.$$

EJERCICIOS

1. Sea R la región del plano xy limitada por las gráficas de $y = x$, $y + x^2 = 0$, y $x = 2$. Sea T la transformación definida por $x = u + v$, $y = v - u^2$, y sea D la región en el plano uv que se mapea en R por T . Use el teorema 7 en la integración doble en D para encontrar el área de la región R . Dibuje figuras que muestren R y D . *Sugerencia:* La inversa de T es la transformación definida por $u = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4x - 4y}$, $v = (x^2 + y)/2x$.

2. Considere la integral $I = \iint_R e^{(x-y)/(x+y)} dA$ donde R es la región limitada por las líneas con ecuaciones $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$. Use la transformación T definida por $x = u - uv$, $y = uv$ y el teorema 7 para calcular I . *Sugerencia:* La región D que se mapea en R es un cuadrado cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$.

En cada uno de los ejercicios del 3 al 10 encuentre por integración doble, el área de la región descrita. Calcule las integrales usando coordenadas polares.

- La región limitada por un círculo de radio a .
- La región exterior al círculo con ecuación $(x - 4)^2 + y^2 = 16$ e interior al círculo con ecuación $(x - 6)^2 + y^2 = 36$.
- La región limitada por la gráfica de $r = 4 \cos 2\theta$.
- La región limitada por la gráfica de $r = 4 \sin 3\theta$.
- La región limitada por la gráfica de $r = 1 + \cos 2\theta$.
- La región limitada por la gráfica de $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.
- La región interior a la cardioides con ecuación $r = 1 + \cos \theta$ y exterior al círculo con radio 1 y centro en el origen.
- La región exterior a la gráfica de $r = 1 - \cos \theta$ e interior a la gráfica de $r = \sin \theta$.

En los ejercicios del 11 al 13 calcule la integral iterada dada usando coordenadas polares.

$$11. \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} (x^2 + y^2) \, dy \, dx. \quad 12. \int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2 + y^2) \, dy \, dx.$$

$$13. \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy.$$

14. Escriba una doble integral que dé el volumen de la región S^3 limitada por las gráficas de $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, y el plano xy . Calcule la integral doble usando coordenadas polares.

15. Establezca una integral doble que dé el volumen de la región limitada por las gráficas de $x^2 + y^2 = 4z$, $x^2 + y^2 = 16$, y el plano xy . Calcule la integral doble usando coordenadas polares.

11.10 Coordenadas cilíndricas y esféricas. En la Sec. 11.9 hemos visto que el cálculo de una integral doble se facilita algunas veces si se usan coordenadas polares; esto es usando la transformación definida por

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

En forma similar en relación con las integrales triples, encontramos frecuentemente transformaciones definidas por uno de los sistemas de ecuaciones:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z \quad (32)$$

$$x = r \cos \theta \sin \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \varphi. \quad (33)$$

[En la Sec. 11.9 hemos usado la transformación (33) para ilustrar el uso del teorema 8].

La transformación dada por (32) se llama la *transformación en coordenadas cilíndricas*. Del mismo modo que en el caso de la transformación

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

en el espacio-2, se acostumbra a no hacer uso de un sistema de coordenadas rectangulares $r\theta z$ por separado sino introducir un nuevo sistema de coordenadas. Para

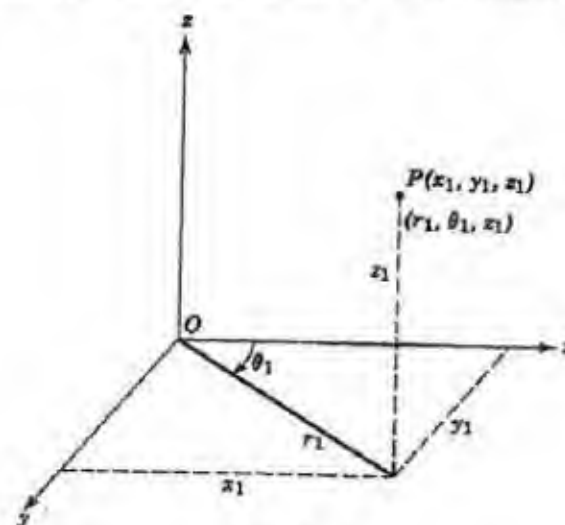


Fig. 11.29

la transformación en coordenadas cilíndricas (32) superponemos sobre el sistema de coordenadas rectangulares xyz un nuevo sistema de coordenadas, al cual llamaremos sistema de coordenadas cilíndricas. Las **coordenadas cilíndricas** (r, θ, z) de un punto P en el sistema de coordenadas cilíndricas son las coordenadas de P en el sistema de coordenadas rectangulares $r\theta z$, que se transforma en P por la

transformación (32). Esto es las ecuaciones (32) dan la relación entre las coordenadas rectangulares (x, y, z) y las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) de un punto en el espacio-3. La figura 11.29 muestra un punto P con sus coordenadas rectangulares (x_1, y_1, z_1) y sus coordenadas cilíndricas (r_1, θ_1, z_1) .

Una ecuación en coordenadas cilíndricas de una superficie S es una ecuación de la superficie de S^* en el sistema de coordenadas rectangulares $r\theta z$ que se mapea en S mediante la transformación (32). Ejemplo, si S es la gráfica de $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, la superficie S^* es la gráfica (en coordenadas rectangulares) de $r^2 + z^2 = 16$, y en consecuencia la superficie S tiene la ecuación $r^2 + z^2 = 16$ en coordenadas cilíndricas. Las superficies S y S^* se muestran en la Fig. 11.30.

Ejemplo 1. (a) Encuentre las coordenadas cilíndricas de los puntos cuyas coordenadas rectangulares son $(2, 2, 3)$ y $(-2, 2\sqrt{3}, 4)$. (b) Encuentre las coordenadas rectangulares de los puntos cuyas coordenadas esféricas son $(2, \pi, -3)$ y $(5, -\pi/3, 4)$.

Solución. (a) Observando las gráficas de $(2, 2, 3)$ y $(-2, 2\sqrt{3}, 4)$ que se muestran en la Fig. 11.31(a) vemos que para el punto $(2, 2, 3)$, $(2\sqrt{2}, \pi/4, 3)$ es un conjunto de coordenadas cilíndricas y para el punto $(-2, 2\sqrt{3}, 4)$, $(4, 2\pi/3, 4)$ es también un conjunto de coordenadas cilíndricas. Se recomienda al estudiante repasar la Sec. 8.5 sobre coordenadas polares.

(b) Del sistema de ecuaciones (32) que define la transformación en coordenadas cilíndricas, encontramos que si $r = 2$, $\theta = \pi$ y $z = -3$, entonces $x = -2$, $y = 0$ y $z = -3$; en consecuencia el punto con coordenadas cilíndricas $(2, \pi, -3)$ tiene coordenadas rectangulares $(-2, 0, -3)$. En forma semejante el punto con coordenadas cilíndricas $(5, -\pi/3, 4)$ tiene coordenadas rectangulares

$$x = 5 \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{2}, \quad y = 5 \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{5\sqrt{3}}{2}, \quad z = 4.$$

Estos dos puntos se muestran en la Fig. 11.31(b).

Ejemplo 2. Determine una ecuación en coordenadas cilíndricas de la superficie que es la gráfica de $2x^2 + 2y^2 - 3z - 8 = 0$.

Solución. Al usar las ecuaciones de la transformación (32) vemos que $x^2 + y^2 = r^2$ y por tanto $2r^2 - 3z - 8 = 0$ es una ecuación de la superficie en coordenadas cilíndricas. Una parte de esta superficie se muestra en la Fig. 11.32.

El Jacobiano $J\left(\frac{x, y, z}{r, \theta, z}\right)$ de la transformación (32) es

$$J\left(\frac{x, y, z}{r, \theta, z}\right) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

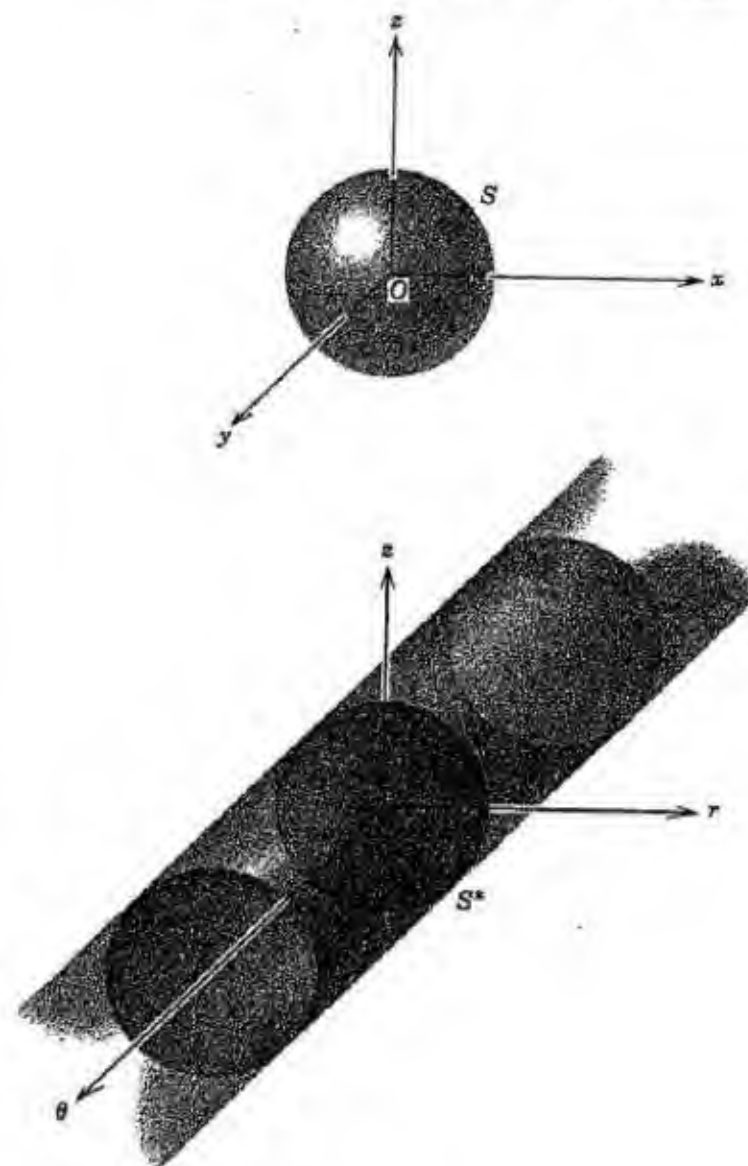


Fig. 11.30

Por tanto, usando el teorema 8, si D^3 se mapea en R^3 mediante (32) y si $r \geq 0$ en D^3 , entonces:

$$\iiint_{D^3} F(x, y, z) dV = \iiint_{D^3} F(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dV. \quad (34)$$

Los límites de integración para una integral iterada que nos dé la integral del segundo miembro de la ecuación (34) los podemos obtener de las ecuaciones en coordenadas cilíndricas de la región R^3 si esta región tiene ciertas características.

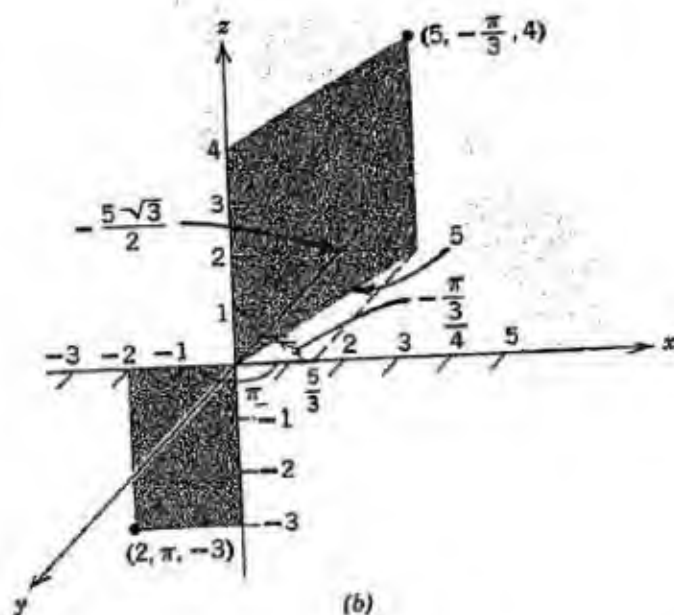
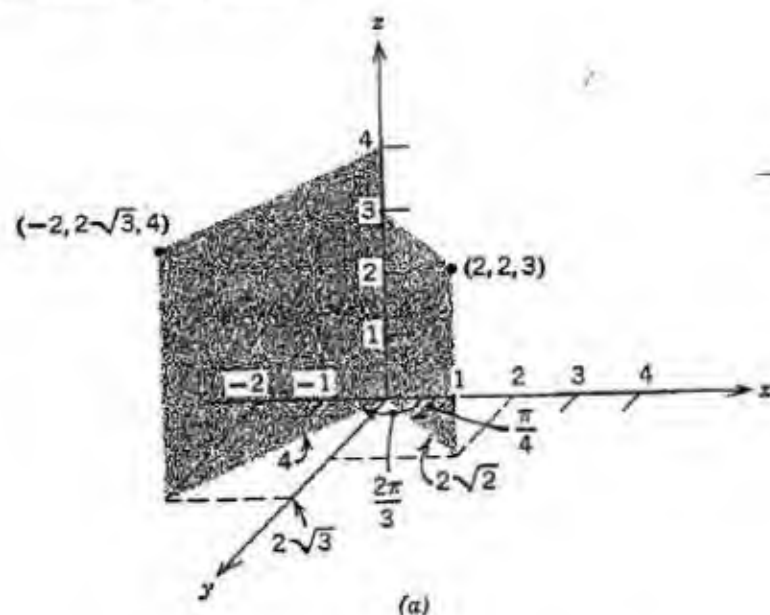


Fig. 11.31

Un tipo de la región R^3 que tiene dichas características se describe en el teorema 10.

Teorema 10. Supongamos que $\iiint_{R^3} F(x, y, z) dV$ existe. Si R^3 es una región

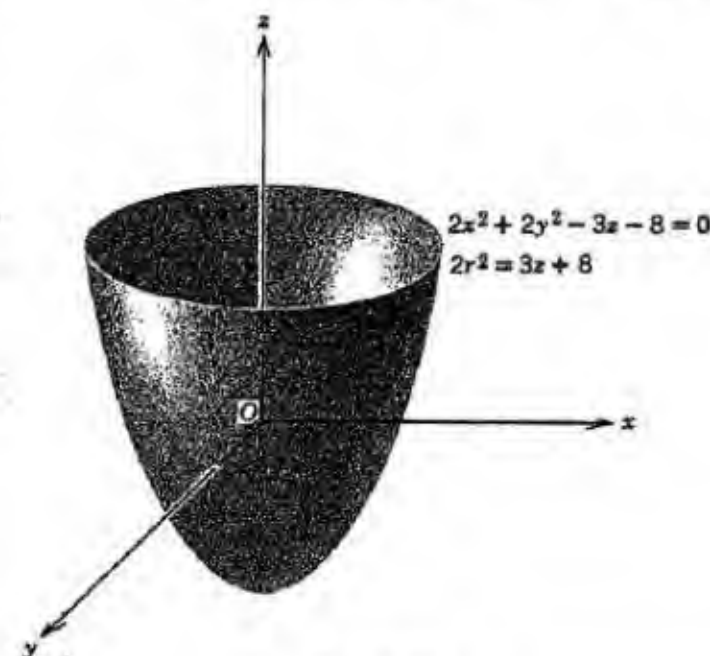


Fig. 11.32

del tipo $S_{1,2}$ cuya proyección R sobre el plano xy es del tipo T_2 y es la gráfica, en coordenadas polares, de

$$\{(r, \theta) \mid G_1(\theta) \leq r \leq G_2(\theta), a \leq \theta \leq b\}$$

donde $b - a \leq 2\pi$ y $G_1(\theta) \geq 0$ y si R^3 está limitada superiormente por la gráfica en coordenadas cilíndricas, de $z = K_2(r, \theta)$ e inferiormente por la gráfica de $z = K_1(r, \theta)$, entonces

$$\iiint_{R^3} F(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{G_1(\theta)}^{G_2(\theta)} \int_{K_1(r, \theta)}^{K_2(r, \theta)} F(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta. \quad (35)$$

Este teorema es una consecuencia de los teoremas 8 y 5 de la Sec. 11.9 y 11.7 respectivamente.

Una región R^3 del tipo descrito en el teorema 10 se muestra en la Fig. 11.33.

Cuando se calcula una integral triple $\iiint_{R^3} F(x, y, z) dV$ usando el teorema 10 decimos que la hemos calculado mediante coordenadas cilíndricas.

Ejemplo 3. Use integrales triples y coordenadas cilíndricas para encontrar el volumen de la región R^3 , en el primer octante, limitada por el paraboloides cuya ecuación es $x^2 + y^2 = az$ y el cilindro cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 2ax$.

Solución. La región R^3 se muestra en la Fig. 11.34. Vemos que R^3 está limitada superiormente por la gráfica de $z = (x^2 + y^2)/a$ ó $z = r^2/a$ en coordenadas cilíndricas; R^3 está limitada inferiormente por la gráfica de $z = 0$. La

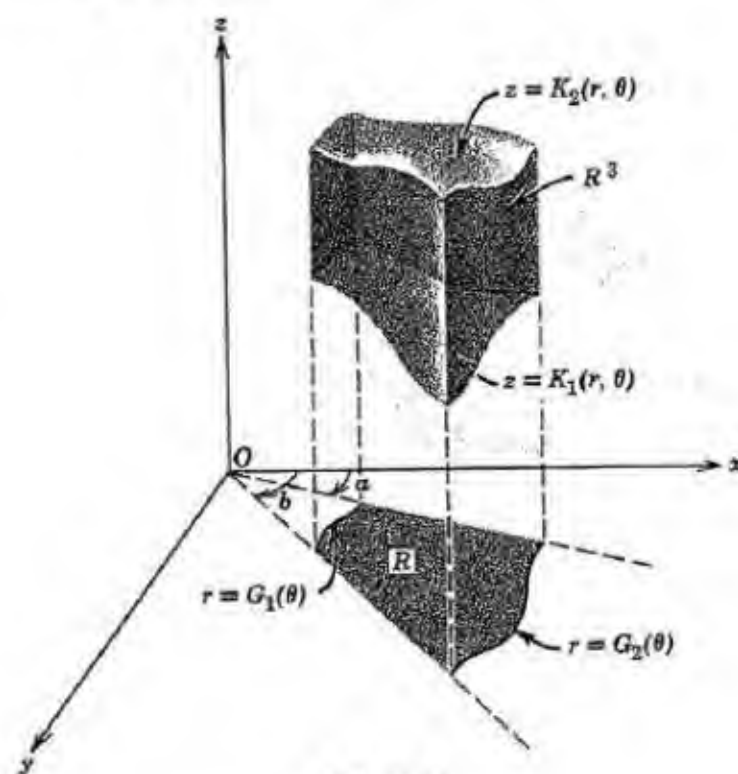


Fig. 11.33

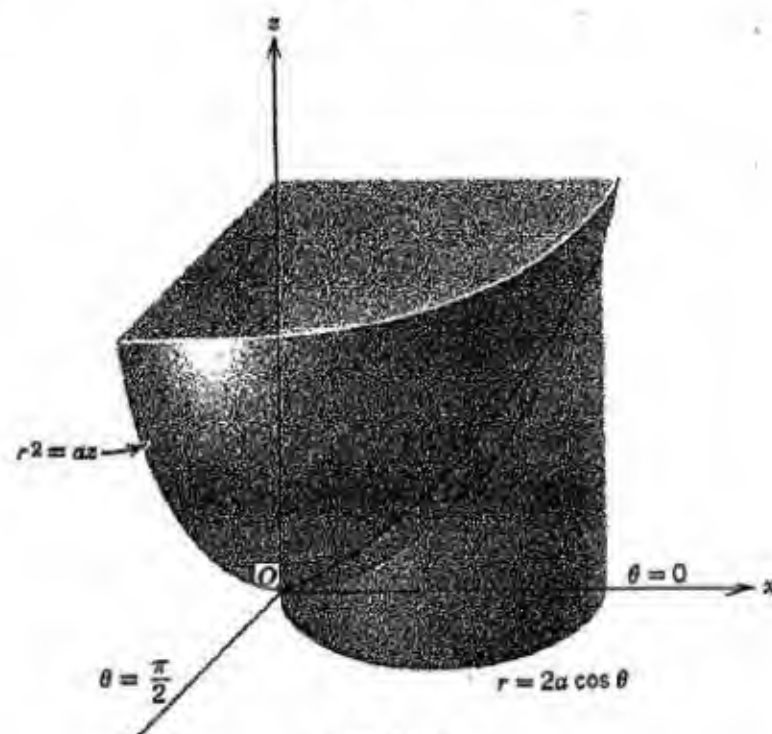


Fig. 11.34

proyección de R^3 en el plano xy es la región R que está en el primer cuadrante y está limitada por las gráficas de $x^2 + y^2 = 2ax$ y $y = 0$, ó por las gráficas en coordenadas cilíndricas de $r = 2a \cos \theta$ y $\theta = 0$.

De aquí el volumen V de R^3 es

$$V = \iiint_{R^3} dV = \iint_R \left(\int_0^{r^2/a} r dz \right) dA,$$

donde la integración sobre R se lleva a cabo en coordenadas polares. Como R es la gráfica de $\{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2a \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$, tenemos

$$\begin{aligned} \iint_R \left(\int_0^{r^2/a} r dz \right) dA &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2a \cos \theta} \int_0^{r^2/a} r dz dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2a \cos \theta} \frac{r^3}{a} dr d\theta \\ &= \frac{1}{4a} \int_0^{\pi/2} (2a \cos \theta)^4 d\theta = 4a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3\pi a^3}{4}, \end{aligned}$$

entonces

$$V = \frac{3\pi a^3}{4};$$

La transformación dada por (33)

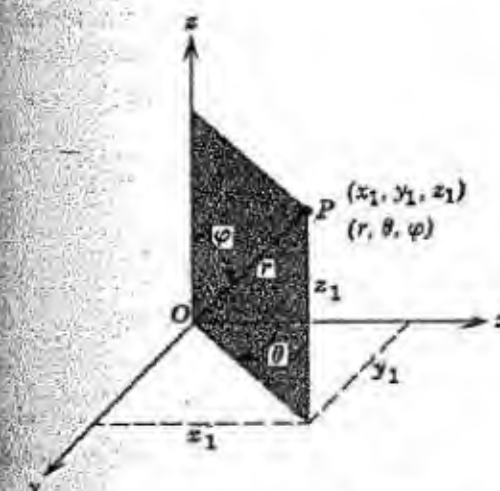
$$x = r \cos \theta \sin \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \varphi,$$

se llama *transformación en coordenadas esféricas*. Aquí de nuevo no se hace uso de un sistema de coordenadas rectangulares $r\theta\varphi$ por separado sino introducir un

nuevo sistema de coordenadas. Para la transformación en coordenadas esféricas (33) superponemos sobre el sistema de coordenadas rectangulares xyz un sistema de coordenadas esféricas. Las **coordenadas esféricas** (r, θ, φ) de un punto P en un sistema de coordenadas esféricas son las coordenadas del punto en el sistema de coordenadas rectangulares $r\theta\varphi$ que se mapea en P por la transformación (33); esto es cualquier triada (r, θ, φ) serán las coordenadas esféricas de un punto $P(x, y, z)$ si la triada (r, θ, φ) satisface al sistema

$$x = r \cos \theta \sin \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \varphi.$$

Fig. 11.35 $x_1 = r \cos \theta \sin \varphi, y_1 = r \sin \theta \sin \varphi, z_1 = r \cos \varphi$



Convenimos en seleccionar $r \geq 0$ y $\varphi \in [0; \pi]$. Por consideraciones de trigonometría vemos que las coordenadas esféricas (r, θ, φ) de un punto P se interpretan como sigue: r es la distancia entre el origen O y el punto P ; θ es el ángulo entre la parte positiva del eje x y la

proyección del segmento OP sobre el plano xy ; φ es el ángulo ($0 \leq \varphi \leq \pi$) entre la parte positiva del eje z y el segmento OP ; vea Fig. 11.35.

Nota: El estudiante debe tener cuidado de no interpretar las coordenadas r y θ de las coordenadas esféricas como las coordenadas cilíndricas r y θ .

Una ecuación de una superficie en coordenadas esféricas se obtiene de una ecuación de la superficie en coordenadas rectangulares usando las ecuaciones (33). Por ejemplo, si G es la esfera con ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ en coordenadas rectangulares, entonces G tiene la ecuación $r = 4$ en coordenadas esféricas. La figura 11.24(a) muestra una región R^3 que está limitada por las gráficas, en coordenadas esféricas de $r = 2$, $r = 1$, $\theta = 0$, $\theta = \pi/4$, $\varphi = 0$ y $\varphi = \pi/2$. La región D^3 en el sistema de coordenadas rectangulares $r\theta\varphi$, que se mapea en R^3 por la transformación en coordenadas esféricas se indica en la Fig. 11.24(b).

Ejemplo 4. (a) Encuentre las coordenadas esféricas de los puntos cuyas coordenadas rectangulares son $(2, 2, 2)$, y $(0, 0, -3)$. (b) Encuentre las coordenadas rectangulares de los puntos cuyas coordenadas esféricas son $(3, \pi/2, \pi/4)$ y $(2, -\pi/3, \pi/6)$.

Solución. (a) Observando las gráficas de $(2, 2, 2)$ y $(0, 0, -3)$ en la Fig. 11.36(a) vemos que al punto $(2, 2, 2)$ le corresponden las coordenadas esféricas $(2\sqrt{3}, \pi/4, \arccos(1/\sqrt{3}))$, y para el punto $(0, 0, -3)$ un conjunto de coordenadas esféricas es, $(3, \theta, \pi)$ donde θ puede tener cualquier valor.

(b) De las igualdades (33) encontramos que si $r = 3$, $\theta = \pi/2$, y $\varphi = \pi/4$, entonces $x = 0$, $y = 3/\sqrt{2}$ y $z = 3/\sqrt{2}$; entonces el punto con coordenadas esféricas $(3, \pi/2, \pi/4)$ tiene coordenadas rectangulares $(0, 3/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2})$. En forma semejante el punto con coordenadas esféricas $(2, -\pi/3, \pi/6)$ tiene coordenadas rectangulares $(1/2, -\sqrt{3}/2, \sqrt{3})$. Estos dos puntos se muestran en la Fig. 11.36(b).

El Jacobiano $J\left(\frac{x, y, z}{r, \theta, \varphi}\right)$ de la transformación (33) es

$$J\left(\frac{x, y, z}{r, \theta, \varphi}\right) = \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & -r \sin \varphi \end{vmatrix} = -r^2 \sin \varphi,$$

como se vio en la Sec. 11.9 en el ejemplo del uso del teorema 8. Entonces por el teorema 8, si D^3 se mapea en R^3 mediante la transformación (33) y si $r^2 \sin \varphi$ no cambia el signo en D^3 , entonces

$$\iiint_{R^3} F(x, y, z) dV = \iiint_{D^3} F(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dV. \quad (36)$$

Ya que hemos convenido en que $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, entonces $r^2 \sin \varphi \geq 0$ en cualquier región D^3 .

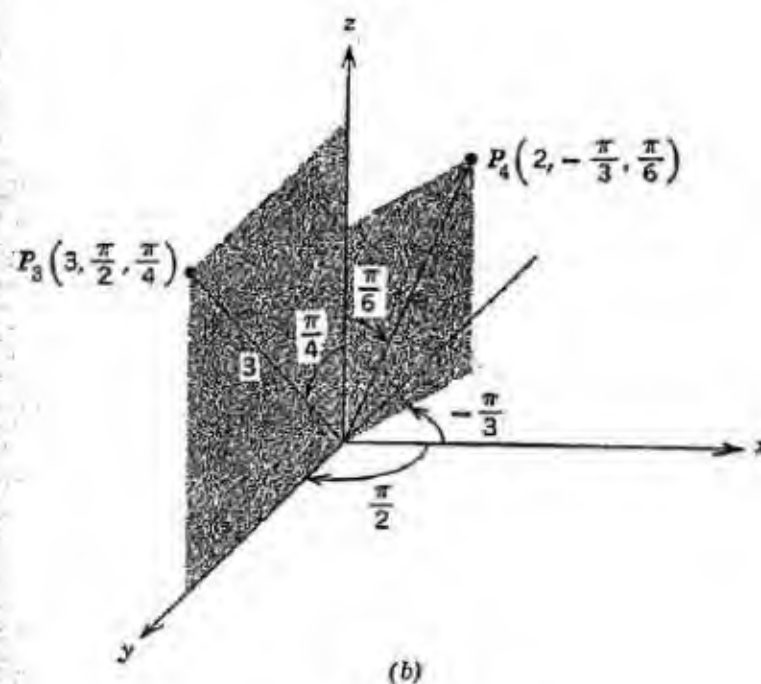
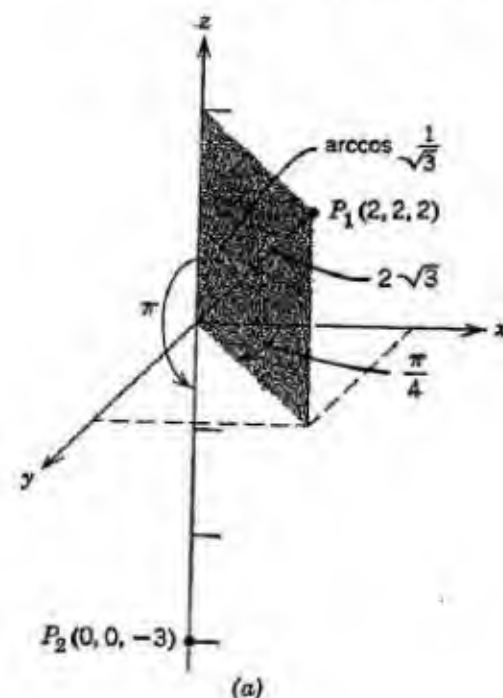


Fig. 11.36

Los límites de integración para una integral iterada, que podemos usar para calcular la integral del segundo miembro de (36) se obtienen de las ecuaciones, en coordenadas esféricas, de la región R^3 si dicha región tiene ciertas características. Un tipo de R^3 que tiene dichas características se describe en el teorema 11.

Teorema 11. Supongamos que $\iiint_{R^3} F(x, y, z) dV$ existe. Supongamos que existen funciones K_1 y K_2 de dos variables independientes, funciones G_1 y G_2 de una variable independiente y números reales a y b con la propiedad que R^3 es acotada por las gráficas de

$$r = K_1(\theta, \varphi), \quad r = K_2(\theta, \varphi), \quad \theta = G_1(\varphi), \quad \theta = G_2(\varphi), \quad \varphi = a, \quad \varphi = b;$$

esto es R^3 es la gráfica de

$$\{(r, \theta, \varphi) \mid K_1(\theta, \varphi) \leq r \leq K_2(\theta, \varphi), \quad G_1(\varphi) \leq \theta \leq G_2(\varphi), \quad a \leq \varphi \leq b\}.$$

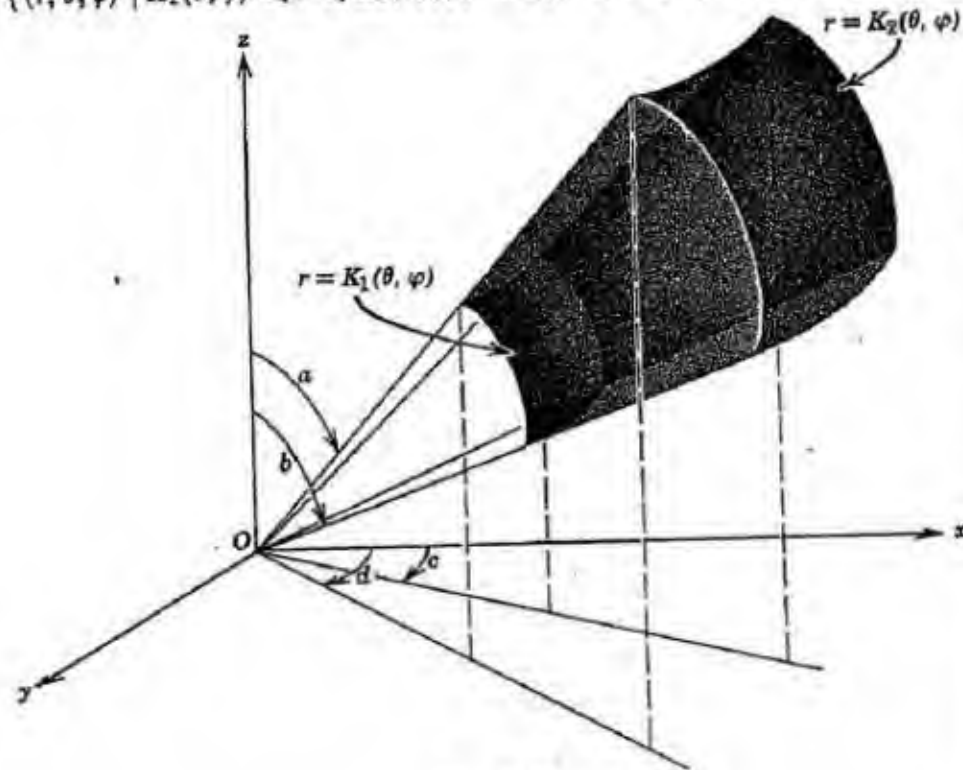


Fig. 11.37

Si $r^2 \sin \varphi$ no cambia de signo en R^3 , entonces

$$\iiint_{R^3} F(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{G_1(\varphi)}^{G_2(\varphi)} \int_{K_1(\theta, \varphi)}^{K_2(\theta, \varphi)} F(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi. \quad (37)$$

Este teorema es una consecuencia de los teoremas 8 y 5. Note que si R^3 satisface las condiciones de este teorema, entonces D^3 del teorema 8 es del tipo $S_{2,1}$ de acuerdo con el teorema 5.

Los papeles de θ y φ se pueden intercambiar en el teorema 11 y el teorema permanece aún cierto.

Una región R^3 del tipo descrito en el teorema 11, con $G_1(\varphi) = c$ y $G_2(\varphi) = d$, se muestra en la Fig. 11.37.

Cuando se calcula una integral triple $\iiint_{R^3} F(x, y, z) dV$ usando el teorema 11, decimos que se ha calculado la integral por medio de coordenadas esféricas.

Ejemplo 5. Use una integral triple y calcule la integral por medio de coordenadas esféricas, para encontrar el volumen de la región S limitada superiormente por la esfera con ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e inferiormente por el cono con ecuación $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$.

Solución. Ya que S es simétrica respecto al eje z tenemos que el volumen de $S = 4$ (volumen de R^3) donde R^3 es la parte de S que pertenece al primer octante. R^3 se muestra en la Fig. 11.38.

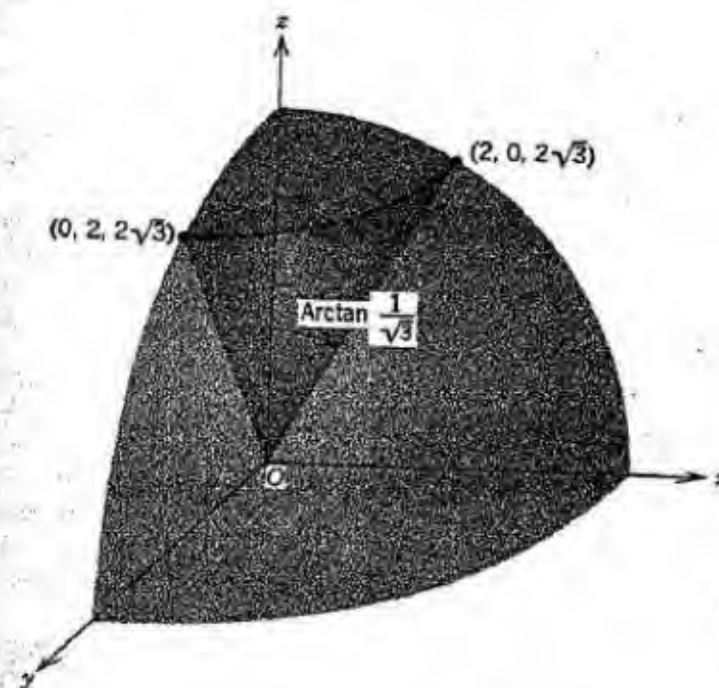


Fig. 11.38

En coordenadas esféricas la esfera tiene la ecuación $r = 4$, el cono tiene la ecuación $\varphi = \pi/6$, el plano xz tiene la ecuación $\theta = 0$, y el plano yz tiene la ecuación $\theta = \pi/2$. Entonces R^3 es la gráfica de

$$\{(r, \theta, \varphi) \mid 0 \leq r \leq 4, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}\}.$$

Ya que el volumen de $R^3 = \iiint_{R^3} dV$, tenemos al usar la ecuación (37) en el teorema 11,

$$\begin{aligned} \text{volumen } R^3 &= \iiint_{R^3} dV = \int_0^{\pi/6} \int_0^{\pi/2} \int_0^4 r^2 \sin \varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi \\ &= \frac{64}{3} \cdot \frac{\pi}{2} \left(-\cos \frac{\pi}{6} + 1 \right) = \frac{32\pi}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\text{volumen } S = 4 \left[\frac{32\pi}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] = \frac{64\pi}{3} (2 - \sqrt{3}).$$

EJERCICIOS

1. Encuentre el volumen de una esfera de radio a usando una integral triple (a) mediante coordenadas cilíndricas; (b) mediante coordenadas esféricas.
 2. Use coordenadas cilíndricas para encontrar el volumen de la región limitada por las gráficas (en el espacio-3) de $x^2 + y^2 = z$, y $x^2 + y^2 - y = 0$ y el plano xy .
 3. El centro de una esfera de radio a está sobre la superficie de un cilindro circular de radio $\frac{1}{2}a$. Use coordenadas cilíndricas para encontrar el volumen de la región interior a ambas superficies.
 4. Encuentre el volumen de la región limitada por las gráficas de $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 4\}$, $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 2z\}$ y $\{(x, y, z) \mid z = 0\}$.
 5. Use coordenadas esféricas para encontrar el volumen de la región limitada superiormente por la esfera con ecuación $r = a$ e inferiormente por el cono con ecuación $\varphi = b$.
 6. Encuentre el volumen de la región que está dentro de la esfera con ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4y$ y fuera del cono con ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.
- Sugerencia:* Use coordenadas esféricas; una ecuación de la esfera en coordenadas esféricas es $r = 4 \sin \theta \sin \varphi$.
7. Encuentre el volumen de la región limitada superiormente por la gráfica de $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e inferiormente por la gráfica de $x^2 + y^2 = 6z$.
 8. Encuentre el volumen de la región limitada por las gráficas de $x^2 + y^2 = 6y$, $x^2 + y^2 = 8z$ y $z = 0$.
 9. Encuentre el volumen de la región limitada superiormente por la gráfica de $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ e inferiormente por la gráfica de $x^2 + y^2 = z$.
 10. Encuentre el volumen de la región en el espacio-3 limitada superiormente por las gráficas de $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, y $z = x$. Use coordenadas cilíndricas.

11.11 Área de una superficie. En la Sec. 8.7 definimos el área de una superficie de revolución y encontramos que esta área se puede calcular, en general, por medio de una integral definida. Ahora consideraremos el problema de definir y calcular el área de una superficie más general. Definiremos el área de una superficie solamente cuando la superficie es la gráfica de una función F cuyo dominio es una región R cerrada y limitada por una curva C simple, cerrada, rectificable y cuyas primeras derivadas parciales son continuas. Estas condiciones aseguran que hay un plano tangente a la superficie en cada punto de la superficie.

Supongamos que $F = \{(x, y, z) \mid z = F(x, y), (x, y) \in R\}$ es una función con la propiedad de que F_x y F_y son continuas en R , donde R es una región cerrada limitada por una curva cerrada, simple y rectificable. Sea M la superficie que es gráfica de F .

Haga una red N_k con norma \mathcal{N}_N , en la región R y represente por $\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_k$ las áreas respectivas de los k rectángulos de la red. Sea $T_k = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)\}$ un aumento de N_k . En el punto $P_i(x_i, y_i, z_i)$, donde $z_i = F(x_i, y_i)$ está sobre la superficie M , existe un plano tangente τ_i y una línea normal L_i . Consideremos el cilindro cuya curva generatriz es la frontera del rectángulo i -ésimo de N_k y cuyos elementos son paralelos al eje z ; representemos por $\Delta \tau_i$ el área de la parte del plano tangente τ_i que se encuentra dentro del cilindro (Vea Fig. 11.39).

Usaremos el área $\Delta \tau_i$ como una aproximación del área ΔM_i de la parte de la superficie M que está dentro del cilindro. Entonces la suma

$$\sum_{i=1}^k \Delta \tau_i \quad (38)$$

será una aproximación * del área de la superficie M . Si existe un número A_M con la propiedad de que dado un número $\epsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\left| A_M - \sum_{i=1}^k \Delta \tau_i \right| < \epsilon$$

para todas las redes N_k y aumentos T_k con norma $\mathcal{N}_N < \delta$, entonces, se define † A_M como el área de la superficie M que es gráfica de $F = \{(x, y, z) \mid z = F(x, y), (x, y) \in R\}$.

La suma (38) se puede escribir en forma diferente, lo cual nos da un método para calcular A_M , cuando el área existe. Sabemos (Sec. 10.4) que el conjunto de números

$$F_x(x_i, y_i), F_y(x_i, y_i), -1$$

* Al definir el área de una superficie usando sumas aproximadas, es importante que el área $\Delta \tau_i$ sea una aproximación del área ΔM_i en el sentido de que la razón $\Delta \tau_i / \Delta M_i$ se pueda aproximar bastante a 1 para todas las redes N_k con normas suficientemente pequeñas. Este es el caso para $\Delta \tau_i$ tal y como lo hemos definido.

† Se puede demostrar que esta definición del área de una superficie es consistente con la definición del área de una superficie de revolución dada en la Sec. 8.7.

es un conjunto de números directores de la línea normal L_i a la superficie M en el punto $P(x_i, y_i, z_i)$, y si $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ son ángulos directores escogidos de tal manera que γ_i sea un ángulo agudo, entonces por la Sec. 9.2

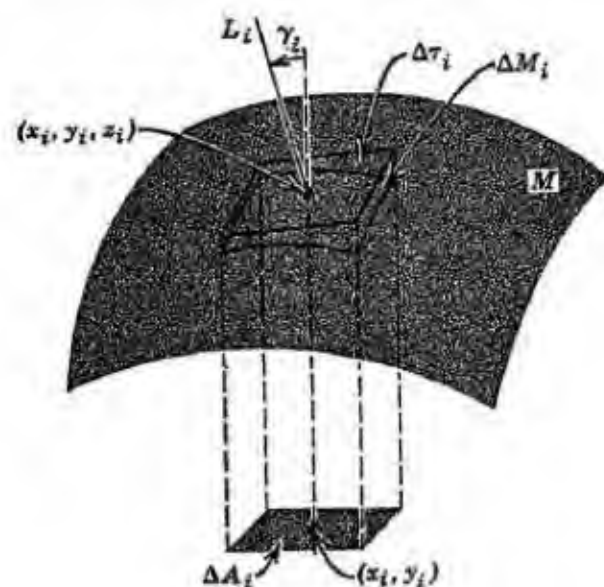


Fig. 11.39

$$\cos \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{[F_x(x_i, y_i)]^2 + [F_y(x_i, y_i)]^2 + 1}} \quad (39)$$

Además, vemos (Fig. 11.39) que $\Delta A_i = \Delta \tau_i \cos \gamma_i$ ó

$$\Delta \tau_i = \Delta A_i \sec \gamma_i. \quad (40)$$

Al usar (39) y (40) en la suma (38), tenemos

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{[F_x(x_i, y_i)]^2 + [F_y(x_i, y_i)]^2 + 1} \Delta A_i \quad (41)$$

como una suma aproximada al área A_M . Al recordar la definición de $\iint_R G(x, y) dA$,

vemos que si $G(x, y) = \sqrt{[F_x(x, y)]^2 + [F_y(x, y)]^2 + 1}$ y si el área A_M existe, entonces

$$A_M = \iint_R \sqrt{[F_x(x, y)]^2 + [F_y(x, y)]^2 + 1} dA. \quad (42)$$

Ejemplo 1. Calcule el área de la parte de la esfera con ecuación $x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 16$, que está dentro del cono con ecuación $z^2 = 3(x^2 + y^2)$.

Solución. Al eliminar x y y de las dos ecuaciones encontramos que los puntos de intersección del cono y la esfera están en el plano con ecuación $z = 0$

en el plano con ecuación $z = 6$. Por tanto, el cono intersecta a la esfera en el origen y a lo largo del círculo con representación

$$z = 6, \quad x^2 + y^2 = 12.$$

La superficie M cuya área se busca, se muestra en la Fig. 11.40. Es la gráfica de

$$F = \{(x, y, z) \mid z = 4 + \sqrt{16 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in R\},$$

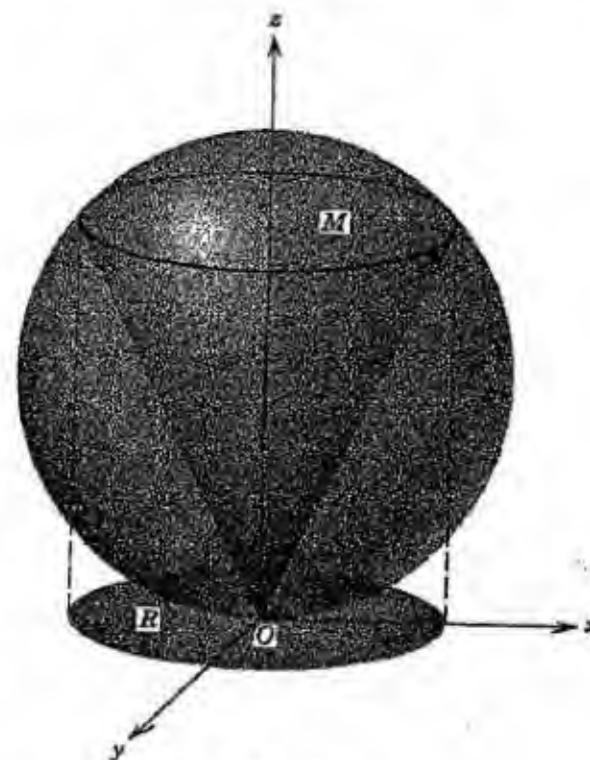


Fig. 11.40

donde R es la región cerrada en el plano xy limitada por el círculo con ecuación $x^2 + y^2 = 12$. Encontramos que

$$F_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}, \quad F_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}},$$

por tanto

$$\sqrt{[F_x(x, y)]^2 + [F_y(x, y)]^2 + 1} = \sqrt{\frac{16}{16 - x^2 - y^2}} = \frac{4}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$$

Al usar la ecuación (42) encontramos que el área A_M de la superficie M es

$$A_M = \iint_R \frac{4}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} dA.$$

El cálculo de esta integral se hace más fácil usando coordenadas polares. La región R es la gráfica, en coordenadas polares, de

$$\{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2\sqrt{3}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

y por tanto, si usamos el teorema 9 de la Sec. 11.9, tenemos

$$A_M = \iint_R \frac{4}{\sqrt{16-x^2-y^2}} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{4r}{\sqrt{16-r^2}} dr d\theta.$$

Encontramos

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{4r}{\sqrt{16-r^2}} dr d\theta = 4 \int_0^{2\pi} \left[-(16-r^2)^{1/2} \right]_{r=0}^{r=2\sqrt{3}} d\theta = 4 \int_0^{2\pi} 2 d\theta,$$

entonces

$$A_M = 8 \int_0^{2\pi} d\theta = 16\pi.$$

EJERCICIOS

1. Encuentre el área de la parte de una esfera con radio a , que está dentro de un cono cuyo vértice está en el centro de la esfera y cuyo ángulo central es $\pi/4$; vea la figura adjunta.



2. Encuentre el área de la parte de la esfera con ecuación $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ y que está fuera del paraboloide con ecuación $x^2 + y^2 = 3z$.

3. Sea S el plano que pasa por los puntos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ y $(0, 0, c)$. Encuentre el área de la parte de S que está limitada por las trazas de S sobre los planos coordenados.

4. Encuentre el área de la parte de la gráfica de $z = x^2 - y^2$ que está dentro del cilindro con ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

5. Sea R la región en el plano xy limitada por las gráficas de $2x + 4y - 9 = 0$ y $xy = 1$. Establezca una integral iterada que se pueda usar para calcular el área de la parte del cilindro con ecuación $y^2 - 2x = 0$ que se encuentra sobre la región R .

6. Encuentre el área de la parte de la gráfica de $4z = xy$ que está en el primer octante y dentro del cilindro con ecuación $x^2 + y^2 = 16$.

7. Encuentre el área de una zona de esfera si el radio de la esfera es a y la altura de la zona es h .

8. Sea R la región en el primer cuadrante del plano xy que está limitada por las gráficas de $(x^2/16) + (y^2/4) = 1$, $x = 0$, $y = 0$, y $x = 2$. Encuentre el área de la parte de la esfera con ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y que está sobre R .

9. Sea R la región en el plano xy limitada por las gráficas de $y = x$, $x = 1$, y $y = 0$. Sea S la gráfica de $\{(x, y, z) \mid z = \frac{1}{2}x^2\}$. Encuentre el área de la parte de S que está sobre R .

10. Encuentre el área de la parte de la gráfica de $z = x^2 + y^2$ que está bajo el plano con ecuación $z = b$.

EJERCICIOS ADICIONALES AL CAPÍTULO 11

En cada uno de los ejercicios del 1 al 4 encuentre el valor de la integral iterada.

$$1. \int_0^1 \int_{x+1}^2 (y+1) dy dx.$$

$$2. \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy.$$

$$3. \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{4-y^2} dz dy dx.$$

$$4. \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_{r^2+3}^{4r} r dz dr d\theta.$$

5. Encuentre el volumen de la región R^3 limitada inferiormente por el plano xy , y en cualquier otra parte por las gráficas de $\{(x, y, z) \mid z = 3x^2 + 3y^2\}$ y $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 4\}$.

6. Encuentre el área de la región R limitada por las gráficas de $y^2 = x$ y $y = x - 2$.

En los ejercicios 7 y 8 encuentre el valor de la integral iterada. Describa una región R^3 cuyo volumen se represente por la integral iterada dada. Dibuje una figura que muestre esta región R^3 , y dibuje una segunda figura que muestre la región R que es proyección de R^3 sobre el plano xy .

$$7. \int_0^1 \int_0^{\sqrt{10-x^2}} (x+y+2) dy dx.$$

$$8. \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-\frac{1}{2}y^2) dy dx.$$

9. (a) Calcule la integral $\iint_R x dA$ donde R es la región que es la gráfica de

$$\{(x, y) \mid \frac{1}{2}x \leq y \leq x^2, \quad 1 \leq x \leq 2\}.$$

(b) Grafique R . (c) Verifique el resultado obtenido en (a) integrando en orden inverso.

10. Encuentre el volumen de la región R^3 limitada por el paraboloide con ecuación $z = 4 - x^2 - y^2$ y el plano xy .

11. (a) Calcule la integral $\iiint_{R^3} x dV$ donde R^3 es la región limitada por los planos con ecuaciones $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y + z = 4$.

(b) Grafique R^3 .

(c) Verifique el resultado obtenido en (a) integrando en un orden distinto al usado en (a).

12. Encuentre el volumen de la región R^3 en el primer octante limitada superiormente por el plano con ecuación $z = x \tan \beta$, inferiormente por el plano con ecuación $z = \tan \alpha$ ($\alpha < \beta$) y lateralmente por el plano xz y el cilindro que es la gráfica de $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - 2ax = 0\}$.

En cada uno de los ejercicios del 13 al 16 calcule el jacobiano de la transformación dada.

$$13. T = \{(u, v), (x, y) \mid x = u^2 - 2v, y = u + v, (u, v) \in D, (x, y) \in R\}.$$

$$14. T = \{(u, v), (x, y) \mid x = u - v^{1/2}, y = u + v^2, (u, v) \in D, (x, y) \in R\}.$$

$$15. T = \{(u, v), (x, y) \mid x = e^{u/v}, y = \ln v - \ln u, (u, v) \in D, (x, y) \in R\}.$$

16. $T^2 = \{ (u, v, w) (x, y, z) \mid x = e^{au}, y = e^{bv}, z = e^{cw}, (u, v, w) \in D^3, (x, y, z) \in R^3 \}$, donde a, b , y c son números positivos.

17. (a) Para la transformación T del ejercicio 13, ¿qué restricción se debe dar a la región D para que la transformación T^* (de R sobre D) inversa de T exista?

(b) ¿Es el jacobiano de la transformación T del ejercicio 14 idénticamente nulo? ¿Es necesario introducir alguna restricción a la región D para que exista la transformación T^* (de R sobre D) que sea el universo de T ?

(c) Para la transformación T del ejercicio 15, hay una región D para la cual exista la transformación T^* (de R sobre D), inversa de T ?

(d) ¿Es el jacobiano de la transformación T del ejercicio 16 idénticamente nulo? ¿Hay alguna región D donde no exista la transformación T^* (de R sobre D) inversa de T ?

18. Use coordenadas cilíndricas para calcular el volumen de la región R^3 en el primer octante limitada por el elipsoide con ecuación $9(x^2 + y^2) + 4z^2 = 36$, el plano xz , el plano xy y el plano con ecuación $x = \sqrt{3}y$.

Aplicaciones de la integración a problemas de la física

12.1 Centro de masa de un sistema de partículas. Recordemos que la masa m de un cuerpo es el cociente que se obtiene al dividir el peso w del cuerpo entre la aceleración g debida a la gravedad; esto es,

$$m = \frac{w}{g} \quad \text{ó} \quad w = mg. \quad (1)$$

Si un cuerpo tiene masa m , es conveniente considerar la masa concentrada en cierto punto, y referirse a ese punto como una partícula de masa m . Ya que una masa física ocupa un espacio de volumen diferente de cero, una *partícula de masa m* es una abstracción. Tal abstracción es útil porque en muchas situaciones se pueden determinar propiedades y el modo de comportarse de un cuerpo físico de masa m , considerando el comportamiento de una partícula de masa m localizada en cierto punto asociado con el cuerpo. Este punto se llama el *centro de masa* del cuerpo.

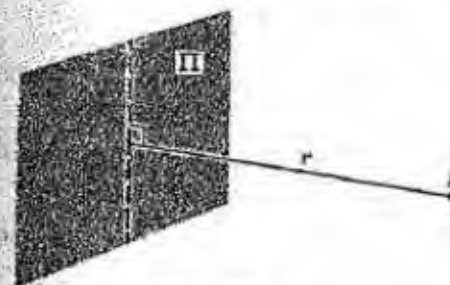


Fig. 12.1

El producto rm se llama el **momento de masa**, o **primer momento de la partícula de masa m** con respecto al plano II. Representando este momento de masa por M_{II} , podemos escribir

$$M_{II} = rm.$$

La distancia r se puede considerar positiva si el punto P está a un lado del plano y negativa si P está al otro lado del plano. Entonces el momento M_{II} es positivo, negativo o cero (es cero si el punto P está en el plano II).

Si P tiene coordenadas rectangulares x_1, y_1, z_1 , y si M_{yz}, M_{zx} y M_{xy} representan los primeros momentos de la partícula de masa m con respecto al plano yz al plano zx , y al plano xy , respectivamente, entonces

$$M_{yz} = x_1 m, \quad M_{zx} = y_1 m, \quad M_{xy} = z_1 m.$$

Consideremos un sistema de n partículas con masas m_1, m_2, \dots, m_n localizadas respectivamente a distancias r_1, r_2, \dots, r_n del plano. Entonces el **momento de masa o primer momento**, M_{Π} de este sistema de partículas de masa con respecto al plano Π es la suma de los primeros momentos de cada una de las partículas esto es

$$M_{\Pi} = r_1 m_1 + r_2 m_2 + \dots + r_n m_n = \sum_{i=1}^n r_i m_i.$$

Si consideramos las partículas de masa m_1, m_2, \dots, m_n situadas respectivamente en los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), \dots, P_n(x_n, y_n, z_n)$ de un sistema de coordenadas rectangulares de 3 dimensiones, entonces los momentos de masa, o primeros momentos, de este sistema de n partículas con respecto a los planos coordenados están dados por las siguientes fórmulas:

$$M_{yz} = x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n = \sum_{i=1}^n x_i m_i,$$

$$M_{zx} = y_1 m_1 + y_2 m_2 + \dots + y_n m_n = \sum_{i=1}^n y_i m_i,$$

$$M_{xy} = z_1 m_1 + z_2 m_2 + \dots + z_n m_n = \sum_{i=1}^n z_i m_i.$$

Representaremos por M la masa total del sistema de n partículas de masa, esto es,

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{i=1}^n m_i.$$

El **centro de masa** de este sistema de n partículas de masa es el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ cuyas coordenadas son

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{zx}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}. \quad (2)$$

Observe que el centro de masa de un sistema de n partículas de masa se define como el punto que tiene la propiedad de que si la masa total M se concentra en ese punto, entonces el primer momento de esta partícula de masa M con respecto a cualquiera de los planos de coordenadas es igual a la suma de los primeros momentos de las n partículas con respecto a dicho plano, esto es:

$$\bar{x}M = x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n,$$

$$\bar{y}M = y_1 m_1 + y_2 m_2 + \dots + y_n m_n,$$

$$\bar{z}M = z_1 m_1 + z_2 m_2 + \dots + z_n m_n.$$

Ejemplo. Cuatro partículas de masa se localizan en un sistema de coordenadas tri-dimensional de la siguiente manera: la primera en $P_1(1, 2, 3)$, la segunda en $P_2(3, 2, 1)$ con el doble de masa que la primera partícula, la tercera en $P_3(2, 1, 4)$ con $\frac{3}{2}$ de la masa de la primera, la cuarta en $P_4(3, 3, 6)$ con $\frac{5}{2}$ de la primera partícula. Encuentre el centro de masa de este sistema de partículas.

Solución. Sea k la masa de la primera partícula; entonces tenemos

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{M_{yz}}{M} = \frac{1(k) + 3(2k) + 2(\frac{3}{2}k) + 3(\frac{5}{2}k)}{k + 2k + \frac{3}{2}k + \frac{5}{2}k} = \frac{35}{14}, \\ \bar{y} &= \frac{M_{zx}}{M} = \frac{2(k) + 2(2k) + 1(\frac{3}{2}k) + 3(\frac{5}{2}k)}{k + 2k + \frac{3}{2}k + \frac{5}{2}k} = \frac{30}{14} = \frac{15}{7}, \\ \bar{z} &= \frac{M_{xy}}{M} = \frac{3(k) + 1(2k) + 4(\frac{3}{2}k) + 6(\frac{5}{2}k)}{k + 2k + \frac{3}{2}k + \frac{5}{2}k} = \frac{52}{14} = \frac{26}{7}. \end{aligned}$$

por tanto el centro de masa es el punto $(\frac{35}{14}, \frac{15}{7}, \frac{26}{7})$.

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 4 encuentre el centro de masa del sistema dado.

1. Las masas de 3, 5 y 4 unidades están situadas en los puntos $P_1(1, 1, 3)$, $P_2(1, 0, -1)$ y $P_3(2, 3, 4)$ respectivamente.

2. Las masas de 2, 3, 5 y 6 unidades están situadas en los puntos $P_1(1, -2, 3)$, $P_2(3, 4, 1)$, $P_3(-3, 7, 5)$ y $P_4(-4, 7, 2)$ respectivamente.

3. Las masas de 1, 2 y 3 unidades están situadas en los puntos $P_1(2, 3, 1)$, $P_2(4, 2, 3)$ y $P_3(3, 5, 8)$ respectivamente.

4. Tres partículas de masas iguales situadas en los puntos del ejercicio 3.

5. El **momento de peso** de una partícula w , que está a una distancia r del plano Π , se define como rw , y el momento W_{Π} del sistema de n partículas con pesos w_1, w_2, \dots, w_n a distancias respectivas r_1, r_2, \dots, r_n del plano Π se define como $W_{\Pi} = r_1 w_1 + r_2 w_2 + \dots + r_n w_n$. Si W_{yz}, W_{zx} , y W_{xy} , representan el momento de peso del sistema con respecto a los planos de coordenadas yz , zx , y xy , y si $W = w_1 + w_2 + \dots + w_n$, entonces el punto

$$\left(\frac{W_{yz}}{W}, \frac{W_{zx}}{W}, \frac{W_{xy}}{W} \right)$$

se define como el **centro de gravedad** de este sistema de n partículas. Con el uso de la igualdad $w_i = m_i g$, demuestre que el centro de gravedad de un sistema de n partículas es el mismo punto que su centro de masa.

6. Demuestre que el centro de masa de tres partículas de igual masa que no son colineales está en la intersección de las medianas del triángulo cuyos vértices son los puntos donde las partículas están situadas.

12.2 Centro de masa de un cuerpo continuo. Si un cuerpo B ocupa una región cerrada y acotada R^3 en el espacio-3, decimos que el cuerpo es **continuo**. Un cuerpo continuo B es **homogéneo** si la densidad es la misma en todos los puntos de B . Si la densidad se representa por k , la masa por M y el volumen por V entonces

$$k = \frac{M}{V}, \quad \text{ó} \quad M = kV. \quad (3)$$

Un cuerpo continuo es *heterogéneo* si la densidad en el punto $P(x, y, z)$ del cuerpo depende de los valores de x , y y z . En tal caso representaremos la densidad por $\rho(x, y, z)$ y consideraremos a $\rho(x, y, z)$ como la correspondiente de la triada (x, y, z) bajo una función continua ρ :

$$\rho = \{(x, y, z; u) \mid u = \rho(x, y, z), (x, y, z) \in R^3, \rho(x, y, z) > 0\},$$

donde R^3 es la región ocupada por el cuerpo.

La masa M de un cuerpo continuo que ocupa la región R^3 se define por

$$M = \iiint_{R^3} \rho(x, y, z) dV. \quad (4)$$

Los primeros momentos de un cuerpo B de masa M con respecto al plano yz , al plano xz y al plano xy , se representa por M_{yz} , M_{xz} , M_{xy} respectivamente, y se definen por

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \iiint_{R^3} x\rho(x, y, z) dV, \\ M_{xz} &= \iiint_{R^3} y\rho(x, y, z) dV, \\ M_{xy} &= \iiint_{R^3} z\rho(x, y, z) dV. \end{aligned} \quad (5)$$

El centro de masa de un cuerpo continuo B es el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ cuyas coordenadas se dan por las ecuaciones

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}, \quad (6)$$

ó en forma equivalente por

$$\bar{x} = \frac{\iiint_{R^3} x\rho(x, y, z) dV}{\iiint_{R^3} \rho(x, y, z) dV}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_{R^3} y\rho(x, y, z) dV}{\iiint_{R^3} \rho(x, y, z) dV}, \quad (7)$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_{R^3} z\rho(x, y, z) dV}{\iiint_{R^3} \rho(x, y, z) dV}.$$

Los siguientes comentarios proporcionan una justificación de las definiciones de M , M_{yz} , M_{xz} , M_{xy} y \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} para un cuerpo continuo B de volumen V que ocupe una región cerrada R^3 . Como en la Sec. 11.5, construiremos una red N_k^3 de paralelepípedos $R_1^3, R_2^3, \dots, R_i^3, \dots, R_k^3$ en la región R^3 , representaremos los volúmenes de los k paralelepípedos en esta red por

$$\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_i, \dots, \Delta V_k,$$

respectivamente, y sea $P_i(x_i, y_i, z_i)$ un punto en R_i^3 . Así como la suma

$$\Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots + \Delta V_i + \dots + \Delta V_k = \sum_{i=1}^k \Delta V_i$$

es una aproximación del volumen V de B (ver Sec. 11.8), así también la suma

$$\begin{aligned} \rho(x_1, y_1, z_1) \Delta V_1 + \rho(x_2, y_2, z_2) \Delta V_2 + \dots + \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i \\ + \dots + \rho(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k = \sum_{i=1}^k \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i \end{aligned}$$

es una aproximación de la masa M de B . En forma semejante, la suma

$$\begin{aligned} x_1 \rho(x_1, y_1, z_1) \Delta V_1 + x_2 \rho(x_2, y_2, z_2) \Delta V_2 + \dots + x_i \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i \\ + \dots + x_k \rho(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k = \sum_{i=1}^k x_i \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i \end{aligned}$$

es una aproximación del momento de masa M_{yz} de B con respecto al plano yz . Igualmente podemos escribir una suma que dé una aproximación de M_{xz} y una suma que dé una aproximación de M_{xy} . Entonces, por analogía con la situación de la Sec. 11.8 para volúmenes, definiremos la masa M por (4) y los momentos de M con respecto a los planos coordenados por (5). Finalmente por analogía con

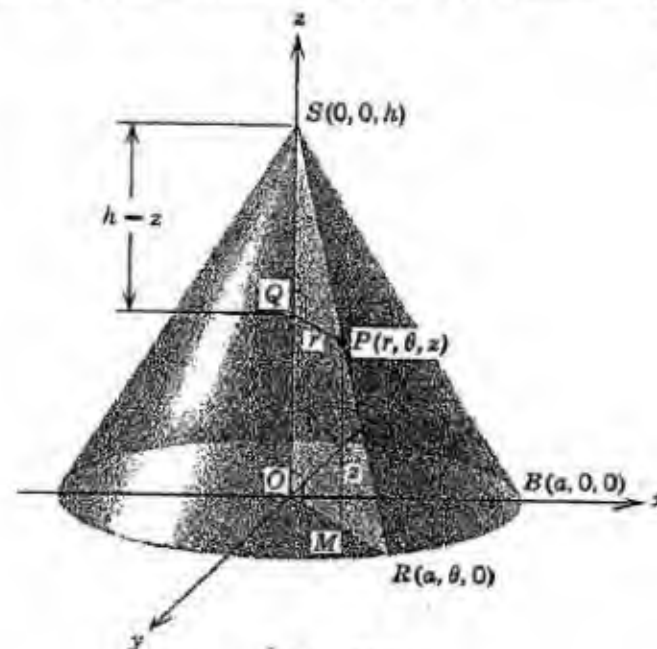


Fig. 12.2

el centro de masa de un sistema de n partículas de masa definido en la Sec. 12.1, definiremos el centro de masa del cuerpo continuo B por medio de (6) ó por medio de (7).

Ejemplo 1. Encuentre el centro de masa del cuerpo continuo que ocupa un cono circular recto, si la densidad $\rho(x, y, z)$ en el punto $P(x, y, z)$ es proporcional

a la distancia de P al eje del cono. Sea h la altura del cono a el radio del cono y k la constante de proporcionalidad.

Solución. De la simetría del cuerpo y de la simetría de la densidad con respecto al eje del cono, vemos que el centro de masa debe de estar en el eje. Seleccionaremos un sistema rectangular de coordenadas con el eje de las z en el eje del cono y el plano xy que contenga a la base del cono, como se muestra en la Fig. 12.2.

La distancia de un punto $P(x, y, z)$ al eje z es $\sqrt{x^2 + y^2}$ y por tanto

$$\rho(x, y, z) = k \sqrt{x^2 + y^2}.$$

El centro de masa del cuerpo $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ tiene coordenadas dadas por

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = 0, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}, \quad (8)$$

donde
$$M = \iiint_{R^3} k \sqrt{x^2 + y^2} dV \quad (9)$$

y
$$M_{xy} = \iiint_{R^3} zk \sqrt{x^2 + y^2} dV. \quad (10)$$

Es conveniente usar coordenadas cilíndricas para calcular las integrales (9) y (10).

El cono circular recto de la Fig. 12.2 es la gráfica (en coordenadas cilíndricas) de la ecuación

$$\frac{r}{h-z} = \frac{a}{h} \quad \text{ó} \quad r = \frac{a}{h}(h-z),$$

se puede ver de la Fig. 12.2 que los triángulos SOR y SQP son semejantes. Entonces el cuerpo ocupa una región R^3 que es la gráfica de

$$\{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq \frac{a}{h}(h-z), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq h\},$$

y tenemos

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{R^3} k \sqrt{x^2 + y^2} dV = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{h}(h-z)} k r r dr d\theta dz \\ &= k \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} \frac{a^2}{h^2} (h-z)^2 d\theta dz = \frac{2\pi k}{3} \int_0^h \frac{a^2}{h^2} (h-z)^2 dz; \end{aligned}$$

entonces

$$M = \frac{\pi k a^3 h}{6}.$$

También encontramos que

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_{R^3} zk \sqrt{x^2 + y^2} dV = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{h}(h-z)} k z r^2 dr d\theta dz \\ &= k \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} \frac{a^2}{h^2} z (h-z)^2 d\theta dz = \frac{2\pi k a^3}{h^2} \int_0^h z (h-z)^2 dz. \end{aligned}$$

Por tanto

$$M_{xy} = \frac{\pi k a^3 h^2}{30},$$

$$\bar{z} = \frac{h}{5}.$$

Como ya hemos visto el centro de masa del cuerpo es el punto $(0, 0, h/5)$ cuando el cuerpo se coloca como se muestra en la Fig. 12.2. Esto es, el centro de masa está en el eje del sólido a una distancia de un quinto de la altura de la base del cono.

Si un cuerpo de volumen V y masa M es homogéneo con densidad R , la ecuación (4) se transforma en

$$M = \iiint_{R^3} k dV = k \iiint_{R^3} dV = kV, \quad (11)$$

y las ecuaciones (5) en

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \iiint_{R^3} kx dV = k \iiint_{R^3} x dV, \\ M_{zx} &= \iiint_{R^3} ky dV = k \iiint_{R^3} y dV, \\ M_{xy} &= \iiint_{R^3} kz dV = k \iiint_{R^3} z dV, \end{aligned} \quad (12)$$

y las ecuaciones (7) en

$$\bar{x} = \frac{\iiint_{R^3} x dV}{V}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_{R^3} y dV}{V}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint_{R^3} z dV}{V} \quad (13)$$

Ejemplo 2. Encuentre el centro de masa del cuerpo continuo descrito en el ejemplo 1 si el cuerpo es homogéneo y su densidad se representa por k .

Solución. Al usar el sistema de coordenadas, dado en el ejemplo 1, tenemos que el volumen V del cuerpo es

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{R^3} dV = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{h}(h-z)} r dr d\theta dz \\ &= \frac{a^2}{2h^2} \int_0^h \int_0^{2\pi} (h-z)^2 d\theta dz = \frac{\pi a^2}{h^2} \int_0^h (h-z)^2 dz = \frac{1}{3} \pi a^2 h. \end{aligned}$$

Entonces por (13) encontramos que:

$$\bar{z} = \frac{\iiint_{R^3} z dV}{V} = \frac{\int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{h}(h-z)} z r dr d\theta dz}{\frac{1}{3} \pi a^2 h} = \frac{\pi a^2 h^2 / 12}{\frac{1}{3} \pi a^2 h} = \frac{h}{4}.$$

Si examinamos las ecuaciones (13) vemos que para un cuerpo homogéneo con densidad k las coordenadas x , y y z del centro de masa no dependen de la densidad k , sino solamente de la forma de la región R^3 ocupada por el cuerpo. En este

caso llamaremos al punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ dado por las ecuaciones (13), **centroide de la región R^3** .

Ejemplo 3. Encuentre el centroide de la región R^3 que es la gráfica de

$$\{(x, y, z) \mid z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}, -a \leq x \leq a\}.$$

Solución. Vemos que la región está limitada inferiormente por el plano xy y superiormente por el hemisferio con centro en el origen y radio a . De la simetría de R^3 vemos que el centroide está en el eje z , así que $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$. Sabemos que z está dada por

$$\bar{z} = \frac{\iiint_{R^3} z \, dV}{V}.$$

y que $V = \frac{1}{2}(\frac{4}{3}\pi a^3) = \frac{2}{3}\pi a^3$. Para calcular $\iiint_{R^3} z \, dV$ usamos coordenadas cilíndricas, y observamos que en coordenadas cilíndricas la región R^3 es la gráfica de

$$\{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{a^2 - z^2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq a\}.$$

Tendremos

$$\iiint_{R^3} z \, dV = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} zr \, dr \, d\theta \, dz = \frac{1}{4}\pi a^4.$$

Por tanto

$$z = \frac{\frac{1}{4}\pi a^4}{\frac{2}{3}\pi a^3} = \frac{3}{8}a$$

y el centroide de la región R^3 es el punto $(0, 0, \frac{3}{8}a)$.

EJERCICIOS

1. Encuentre la masa de un cuerpo que ocupa una esfera de radio a si la densidad en cada punto P es proporcional a la distancia de P al centro de la esfera.
2. Encuentre la masa de un cuerpo que ocupa la región limitada por las gráficas de $y = 0$, $z = 0$, $z = h$ ($h > 0$) y $x^2 + y^2 = a^2$ si $\rho(x, y, z) = kyz$.
3. Encuentre el centro de masa del cuerpo homogéneo que ocupa la región en el primer octante limitada por los tres planos de coordenadas y la esfera con ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. *Sugerencia:* Use coordenadas cilíndricas.
4. Un cuerpo B ocupa una región R^3 limitada superiormente por la gráfica de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e inferiormente por el plano xy . Encuentre el centro de masa de B si la densidad $\rho(x, y, z)$ en el punto $P(x, y, z)$ es proporcional a la distancia de P al origen.

En cada uno de los ejercicios del 5 al 10 se da un conjunto de pares ordenados y se designa un eje. Cuando la región R , que es la gráfica del conjunto de pares ordenados, gira alrededor del eje se genera un sólido de revolución. Encuentre el centro de masa del sólido homogéneo.

5. $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 4\}$; eje x .

6. $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{x^2 - a^2}, a \leq x \leq 2a\}$; eje x .
7. $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y^2/4a, 0 \leq y \leq b, a > 0\}$; eje y .
8. $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \sqrt{4 - y}, 0 \leq y \leq 4\}$; eje y .
9. $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 2\sqrt{ax}, 0 \leq x \leq b\}$; eje x .
10. $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq (b/a)\sqrt{a^2 - x^2}, 0 \leq x \leq a\}$; eje x .

En cada uno de los ejercicios del 11 al 14 encuentre el centroide de la región R^2 que es la gráfica de la relación dada.

11. $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h\}$.
12. $\{(x, y, z) \mid \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq z \leq 2\}$.
13. $\{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq y, 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}, 0 \leq x \leq a\}$.
14. $\{(x, y, z) \mid 2x \leq z \leq 4x, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.
15. Encuentre el centroide de la región R^3 limitada por los planos de coordenadas y la gráfica de $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$ donde a, b y c son positivos.
16. Encuentre el centroide de la región R^3 limitada por la superficie cónica con ecuación $h^2(x^2 + y^2) = a^2z^2$ y el plano con ecuación $z = h, h > 0, a > 0$.
17. Un cuerpo ocupa el cubo limitado por los planos de coordenadas y los planos con ecuaciones respectivas $x = 1, y = 1$, y $z = 1$. Si la densidad en cada punto es proporcional a la distancia del punto al plano xy , encuentre el centro de masa del cuerpo.
18. Un cuerpo homogéneo B ocupa la región R^2 que es la gráfica de

$$\{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq x^2 + y^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Encuentre el centro de masa de B .

12.3 Centro de masa de una lámina. Supongamos que S es una superficie cilíndrica cuya directriz es una curva simple cerrada C . Construyamos dos planos paralelos, cada uno perpendicular a los elementos de la superficie cilíndrica y separados una distancia h . El sólido limitado por la superficie cilíndrica y los dos planos paralelos se llama **lámina** y se representa por L . Una lámina tiene espesor constante (o altura) h . Para muchos propósitos el espesor h de la lámina se toma como pequeño, de tal manera que la lámina se considera una lámina delgada, pero esto no es necesario. Supongamos que la densidad de una lámina es constante a lo largo de cualquier línea perpendicular a las caras planas de la lámina. Entonces, si una de las caras planas de una lámina es una región R en el plano xy (Fig. 12.3), podemos representar la densidad en el punto $P(x, y, z)$ de la lámina por $\rho(x, y)$ donde $\rho(x, y)$ es la correspondiente del par (x, y) bajo una función continua ρ ; esto es

$$\rho = \{(x, y, u) \mid u = \rho(x, y), (x, y) \in R, \rho(x, y) > 0\}.$$

El área A de la región R está dada por:

$$A = \iint_R dA,$$

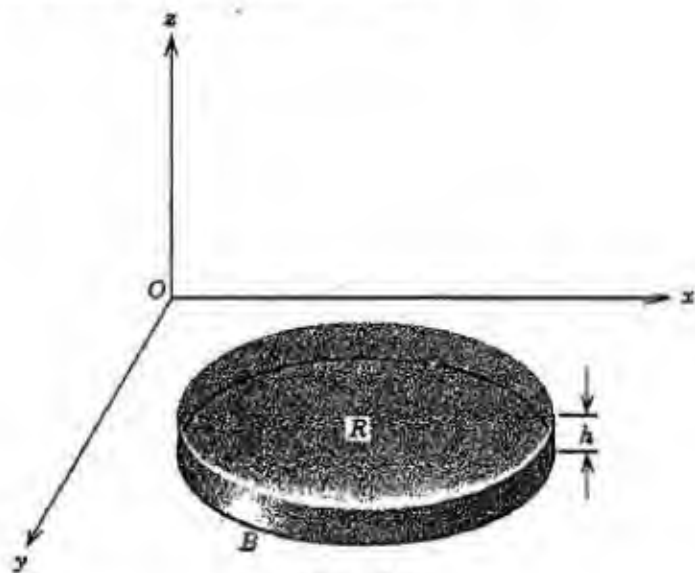


Fig. 12.3

por tanto el volumen V de la lámina está dado por

$$V = hA = h \iint_R dA.$$

La masa M de la lámina está dada por

$$M = h \iint_R \rho(x, y) dA. \quad (14)$$

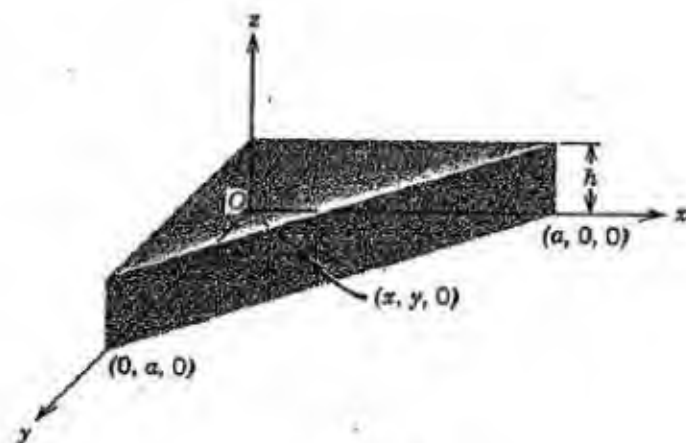


Fig. 12.4

Los primeros momentos de la lámina de masa M (Fig. 12.3) con respecto al plano yz y al plano xz se representan por M_{yz} y M_{xz} respectivamente y se definen por

$$M_{yz} = h \iint_R x \rho(x, y) dA, \quad (15)$$

$$M_{xz} = h \iint_R y \rho(x, y) dA.$$

El primer momento de la lámina con respecto al plano xy es $\frac{1}{2}hM$.

El centro de masa de la lámina que se muestra en la Fig. 12.3 es el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ cuyas coordenadas están dadas por

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}; \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}; \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{h}{2}. \quad (16)$$

Las coordenadas \bar{x} y \bar{y} se pueden escribir como

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x \rho(x, y) dA}{\iint_R \rho(x, y) dA}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_R y \rho(x, y) dA}{\iint_R \rho(x, y) dA}. \quad (17)$$

Las definiciones de M , M_{yz} , M_{xz} y M_{xy} para la lámina se pueden justificar usando sumas aproximadas del mismo modo que se justifican en la Sec. 12.2 las definiciones de M , M_{yz} , M_{xz} y M_{xy} para un sólido en general.

Ejemplo 1. Una lámina de grueso h tiene como una de sus caras la región cerrada R en el plano xy limitada por el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, a)$. Si la lámina está arriba del plano xy , y si la densidad en un punto $P(x, y, z)$ es proporcional al cuadrado de la distancia entre P y el eje z , encuentre el centro de masa de la lámina.

Solución. Aquí $\rho(x, y) = k(x^2 + y^2)$ para algún número real k . La región R (vea Fig. 12.4) es la gráfica de

$$\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq a - x, \quad 0 \leq x \leq a\}.$$

Al usar (14) tenemos

$$M = hk \iint_R (x^2 + y^2) dA = hk \int_0^a \int_0^{a-x} (x^2 + y^2) dy dx = \frac{1}{6} hka^4$$

Si usamos (15) encontramos

$$M_{yz} = hk \iint_R x(x^2 + y^2) dA = hk \int_0^a \int_0^{a-x} x(x^2 + y^2) dy dx = \frac{1}{15} hka^5.$$

En forma semejante

$$M_{yz} = hk \iint_R y(x^2 + y^2) dA = hk \int_0^a \int_0^{a-x} y(x^2 + y^2) dy dx = \frac{1}{15} hka^3.$$

Finalmente por (16) vemos que el centro de masa de la lámina es el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ para el cual

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{2}{5}a, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{2}{5}a, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{h}{2}.$$

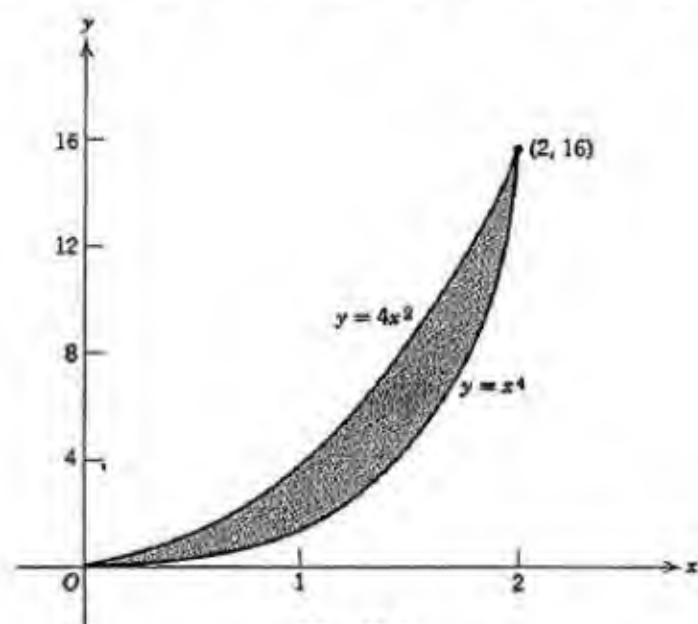


Fig. 12.5

Ejemplo 2. La cara de una lámina homogénea de espesor h y de densidad constante k es la región R en el plano xy limitada por las gráficas de $y = 4x^2$ y $y = x^4$. Encuentre el centro de masa de la lámina.

Solución. La región R es la gráfica de

$$\{(x, y) \mid x^4 \leq y \leq 4x^2, \quad 0 \leq x \leq 2\}$$

y se muestra en la Fig. 12.5. Si usamos (14) tenemos que

$$M = hk \iint_R dA = hk \int_0^2 \int_{x^4}^{4x^2} dy dx = \frac{64}{15} hk.$$

Al usar (15) obtenemos

$$M_{yz} = hk \iint_R x dA = hk \int_0^2 \int_{x^4}^{4x^2} x dy dx = \frac{16}{3} hk$$

y

$$M_{xz} = hk \iint_R y dA = hk \int_0^2 \int_{x^4}^{4x^2} y dy dx = \frac{1024}{45} hk.$$

Entonces si usamos (16) vemos que el centro de masa de la lámina es el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ para el cual

$$\bar{x} = \frac{16/3 hk}{64/15 hk} = \frac{5}{4}, \quad \bar{y} = \frac{1024/45 hk}{64/15 hk} = \frac{16}{3}, \quad \bar{z} = \frac{h}{2}.$$

Note que en el ejemplo 2, en el cual la lámina era homogénea, las coordenadas x y y son independientes de los valores del grueso h y de la densidad k . Esto es cierto para cualquier lámina homogénea, ya que, si en (17) ponemos $\rho(x, y) = k$, encontramos

$$\bar{x} = \frac{k \iint_R x dA}{k \iint_R dA} = \frac{\iint_R x dA}{A}, \quad (18)$$

$$\bar{y} = \frac{k \iint_R y dA}{k \iint_R dA} = \frac{\iint_R y dA}{A}.$$

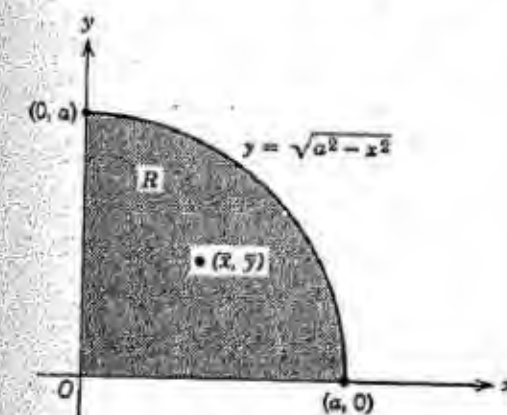


Fig. 12.6

Esto es, para una lámina homogénea, las coordenadas \bar{x} y \bar{y} del centro de masa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ dependen solamente de la forma de la región R que forma una de las caras planas de la lámina. En este caso podemos llamar **centroide de la región (plana) R** al punto (\bar{x}, \bar{y}) en el plano xy cuyas coordenadas están dadas por (18).

Ejemplo 3. Encuentre el centroide de la región en el plano xy que es la gráfica de

$$\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}, \quad x \in [0; a]\}.$$

Solución. Aquí R es la región en el primer cuadrante limitada por el eje x , el eje y y un arco de círculo con centro en el origen y radio a (vea Fig. 12.6). Tenemos

$$\iint_R x dA = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} x dy dx = \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{(a^2 - x^2)^{3/2}}{3/2} \Big|_0^a = \frac{a^3}{3}.$$

$$\iint_R y dA = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} y dy dx = \int_0^a \frac{a^2 - x^2}{2} dx = \left[\frac{a^2 x}{2} - \frac{x^3}{6} \right]_0^a = \frac{a^3}{3}.$$

Sabemos que $A = \pi a^2/4$, y en consecuencia si usamos (18) obtenemos $\bar{x} = 4a/3\pi$, $\bar{y} = 4a/3\pi$.

EJERCICIOS

1. Una lámina de grueso h tiene como base la región R en el plano xy que es la gráfica de

$$\{(x, y) \mid -\sqrt{2ax - x^2} \leq y \leq \sqrt{2ax - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2a\}.$$

Si la densidad $\rho(x, y)$ en $P(x, y, z)$ es proporcional a la distancia de P al eje z , encuentre la masa de la lámina.

Sugerencia: Use coordenadas polares y note que en coordenadas polares la región R es la gráfica de

$$\{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2a \cos \theta, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2\}.$$

2. Una lámina de grueso h tiene por base la región R en el plano xy que es la gráfica de

$$\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}, \quad -a \leq x \leq a\}.$$

Si la densidad $\rho(x, y)$ en $P(x, y, z)$ es proporcional a la distancia de P al eje z , encuentre el centro de masa de la lámina.

3. Una lámina de grueso h tiene por base la región R del ejercicio 2. Si la densidad $\rho(x, y)$ en $P(x, y, z)$ es proporcional al cuadrado de la distancia de P al eje z , encuentre el centro de masa de la lámina.

4. Una lámina de grueso h tiene por base la región en el plano xy limitada por las gráficas de $3y = 4x$, $y = 0$, y $x = 3$. Si la densidad $\rho(x, y)$ en $P(x, y, z)$ es proporcional a la distancia de P a la gráfica de $x = 3$, encuentre el centro de la masa de la lámina.

5. Una lámina homogénea de grueso h y de densidad constante k tiene por base la región R en el plano xy limitada por las gráficas de $y^2 = x$ y $y = x$. Encuentre el centro de masa de la lámina.

6. Una lámina de grueso h y de densidad constante k tiene por base la región R en el plano xy limitada por las gráficas de $y = 2 - x^2$, $y = x^2$, y $x = 0$. Encuentre el centro de masa de la lámina.

En cada uno de los ejercicios del 7 al 12 encuentre el centroide de la región en el plano xy que es gráfica de la relación dada.

7. $\{(x, y) \mid -2\sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 4\}.$

8. $\{(x, y) \mid -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq a\}.$

9. $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq (b/a)\sqrt{a^2 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq a\}.$

10. $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi\}.$

11. $\{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 1\}.$

12. $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq b \sin(x/a), \quad 0 \leq x \leq a\pi\}.$

13. Encuentre el centroide de la región limitada por un arco de la cicloide con ecuaciones paramétricas $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ y el eje x .

14. Encuentre el centroide de la región limitada por las gráficas de $y = 2x - x^2$ y el eje x .

15. Encuentre el centroide de la región limitada por las gráficas de $x^2 = 16y$ y $x = y^2 - 2y$.

16. Encuentre el centroide de la región limitada por la gráfica de $r = 5(1 - \cos \theta)$.

17. Encuentre el centroide de la región en el primer cuadrante limitada por la parábola con ecuación $y^2 = 4ax$, el eje x y el lado recto de esta parábola.

18. Encuentre el centroide de la región limitada por las gráficas de $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $x = 0$, $y = 0$ y $x = 1$.

12.4 El centro de masa de un alambre plano. Consideremos un alambre W cuya sección transversal es de área constante. Representemos por α al área de esta sección transversal, y sean A y B los extremos del alambre. Además, supongamos que los centros de las secciones transversales circulares del alambre están en la curva plana C que es la gráfica de

$$\{(x, y) \mid y = F(x), \quad x \in [a; b]\}. \quad (19)$$

Supongamos que la curva C es rectificable. Entonces, si s representa la longitud de la parte de C entre los puntos $(a, F(a))$ y $(x, F(x))$, existirá una función de longitud de arco S , que puede expresarse por

$$S = \{(x, s) \mid s = S(x), \quad x \in [a; b]\} \quad (20)$$

(Vea Sec. 8.6), y

$$ds = \sqrt{1 + [F'(x)]^2} dx.$$

Si $s_a = S(a)$ y $s_b = S(b)$, la longitud L del alambre estará dada por

$$L = \int_{s_a}^{s_b} ds = \int_a^b \sqrt{1 + [F'(x)]^2} dx.$$

Entonces el volumen V del alambre deberá expresarse por

$$V = \alpha \int_{s_a}^{s_b} ds.$$

Supongamos que cada punto P en el alambre W está en una sección transversal de W que es perpendicular a la curva C en algún punto $Q(x, y)$ de la curva C . También supondremos que la densidad del alambre en P depende solamente del valor de s en el punto Q , y representaremos la densidad de P por $\rho(s)$. La densidad $\rho(s)$ se puede considerar como la correspondiente de s bajo una función continua ρ :

$$\rho = \{(s, u) \mid u = \rho(s), \quad s \in [s_a; s_b], \quad \rho(s) > 0\}.$$

La masa M del alambre W se define por

$$M = \alpha \int_{s_a}^{s_b} \rho(s) ds. \quad (21)$$

Los primeros momentos del alambre de masa M con respecto al plano yz y el plano zx se representan por M_{yz} y M_{zx} respectivamente, y se definen por

$$M_{yz} = \alpha \int_{s_a}^{s_b} x \rho(s) ds, \quad (22)$$

$$M_{zx} = \alpha \int_{s_a}^{s_b} y \rho(s) ds,$$

donde x , y , y z en las integrales están relacionadas por las ecuaciones (19) y (20). El primer momento del alambre con respecto al plano xy es cero.

El centro de masa del alambre W es el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ cuyas coordenadas están dadas por

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}; \quad \bar{y} = \frac{M_{zx}}{M}; \quad \bar{z} = 0. \quad (23)$$

Las coordenadas \bar{x} y \bar{y} se pueden escribir como

$$\bar{x} = \frac{\int_{s_a}^{s_b} x\rho(s) ds}{\int_{s_a}^{s_b} \rho(s) ds}, \quad \bar{y} = \frac{\int_{s_a}^{s_b} y\rho(s) ds}{\int_{s_a}^{s_b} \rho(s) ds}. \quad (24)$$

Los siguientes comentarios dan una justificación de las definiciones de M , M_{yz} y M_{zx} para un alambre W . Dividamos el arco AB descrito al principio de esta sección, en n subarcos $\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3, \dots, \Delta s_i, \dots, \Delta s_n$, por la partición P_n del intervalo $(s_a; s_b)$ especificada por el conjunto $\{s'_0, s'_1, s'_2, \dots, s'_{i-1}, s'_i, \dots, s'_n\}$.

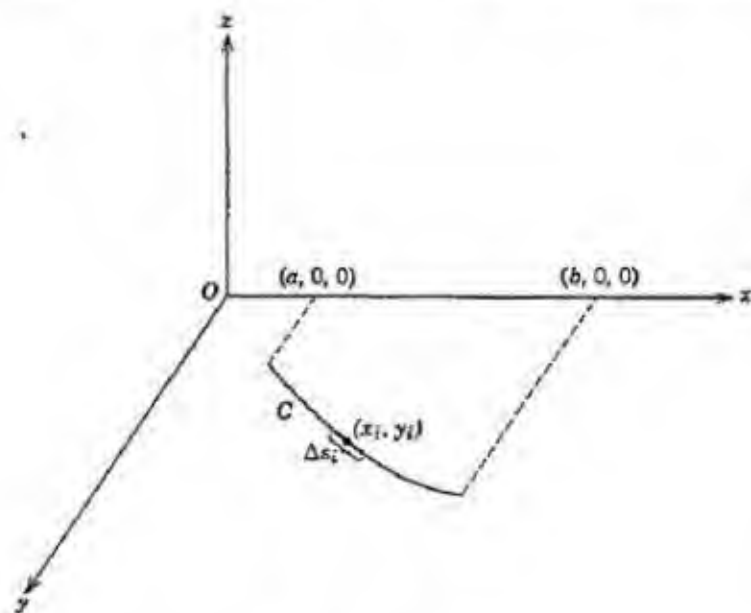


Fig. 12.7

Sean $\Delta s_i = s'_i - s'_{i-1}$ y sea $s_i \in [s'_{i-1}; s'_i]$ para $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Sea (x_i, y_i) un punto en el subarco de longitud Δs_i que corresponde al valor s_i . Entonces para la pieza de alambre de longitud Δs_i (Vea Fig. 12.7) las expresiones

$$\alpha\rho(s_i)\Delta s_i, \quad \alpha x_i\rho(s_i)\Delta s_i, \quad \alpha y_i\rho(s_i)\Delta s_i$$

son respectivamente aproximaciones de la masa, del primer momento con respecto

al plano yz , y del primer momento con respecto al plano zx . Para el alambre W las sumas

$$\alpha \sum_{i=1}^n \rho(s_i) \Delta s_i, \quad \alpha \sum_{i=1}^n x_i \rho(s_i) \Delta s_i, \quad \alpha \sum_{i=1}^n y_i \rho(s_i) \Delta s_i$$

son respectivamente aproximaciones de la masa, el primer momento con respecto al plano yz , y el primer momento con respecto al plano zx .

Ejemplo 1. Un alambre W con sección transversal α de área constante tiene la propiedad de que el centro de cualquiera de sus secciones transversales están en la curva C que es gráfica de $\{(x, y) \mid y = \sqrt{a^2 - x^2}, x \in [0; a]\}$.

Si la densidad $\rho(s)$ en $P(x, y, z)$ es proporcional a la distancia de $(x, y, 0)$ a la parte positiva del eje x , encuentre el centro de masa de W .

Solución. Aquí $\rho(s) = ky$. Es conveniente usar coordenadas polares en el plano xy , así que $\rho(s) = ka \sin \theta$. Al usar (21) tenemos:

$$M = \alpha \int_{s_a}^{s_b} \rho(s) ds.$$

Por la Sec. 8.5 sabemos que en coordenadas polares

$$ds = \sqrt{r^2 + [D_\theta r]^2} d\theta.$$

Sabemos también que en coordenadas polares C es la gráfica de

$$\{(r, \theta) \mid r = a, \quad \theta \in [0; \pi/2]\}.$$

Entonces $D_\theta r = 0$, $ds = a d\theta$ y por tanto,

$$M = ka^2\alpha \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = ka^2\alpha.$$

En forma semejante, si usamos (22) tenemos:

$$M_{yz} = ka^3\alpha \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{ka^3\alpha}{2}$$

$$M_{zx} = ka\alpha \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \frac{ka^3\alpha\pi}{4}$$

Entonces de (23) obtenemos

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{a}{2}; \quad \bar{y} = \frac{M_{zx}}{M} = \frac{a\pi}{4}; \quad \bar{z} = 0.$$

Ejemplo 2. Un alambre W con sección transversal de área constante α y densidad constante k tiene la propiedad de que el centro de cualquiera de sus secciones transversales está en la curva C del ejemplo 1. Encuentre el centro de masa de W .

Solución. Si usamos (21) y (22) obtenemos:

$$M = \alpha k \int_0^{\pi/2} a d\theta = \alpha ka \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\alpha ka\pi}{2},$$

$$M_{yz} = \alpha ka^2 \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \alpha ka^2, \quad M_{zx} = \alpha ka^2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = \alpha ka^2.$$

En consecuencia, si usamos (23) obtenemos

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\alpha k a^2}{\frac{1}{2} \alpha k a \pi} = \frac{2a}{\pi}, \quad \bar{y} = \frac{M_{zx}}{M} = \frac{\alpha k a^2}{\frac{1}{2} \alpha k a \pi} = \frac{2a}{\pi}, \quad \bar{z} = 0.$$

Notamos que en el ejemplo 2, en el cual el alambre fue homogéneo, las coordenadas \bar{x} y \bar{y} fueron independientes del valor de la densidad de k . Esto es cierto para cualquier alambre homogéneo W , ya que, si en (24) ponemos $\rho(s) = k$, encontramos que

$$\bar{x} = \frac{k \int_{s_a}^{s_b} x ds}{k \int_{s_a}^{s_b} ds} = \frac{\int_{s_a}^{s_b} x ds}{L}, \quad \bar{y} = \frac{k \int_{s_a}^{s_b} y ds}{k \int_{s_a}^{s_b} ds} = \frac{\int_{s_a}^{s_b} y ds}{L}. \quad (25)$$

Esto es, para un alambre homogéneo las coordenadas \bar{x} y \bar{y} del centro de masa dependen solamente de la curva C . En tal caso llamaremos **centroide de la curva** C al punto (\bar{x}, \bar{y}) del plano xy cuyas coordenadas están dadas por (25).

Ejemplo 3. Encuentre el centroide de la curva que es gráfica de

$$\{(x, y) \mid y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad x \in [-a; a]\}.$$

Solución. Al usar coordenadas polares, como en los ejemplos 1 y 2, obtenemos:

$$\bar{x} = \frac{\int_{s_a}^{s_b} x ds}{L} = \frac{a^2 \int_0^\pi \cos \theta d\theta}{\pi a} = \frac{a^2 \sin \theta}{\pi} \Big|_0^\pi = 0,$$

$$\bar{y} = \frac{\int_{s_a}^{s_b} y ds}{L} = \frac{a^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta}{\pi a} = \frac{a [-\cos \theta]}{\pi} \Big|_0^\pi = \frac{2a}{\pi}.$$

EJERCICIOS

1. Un alambre tiene sección transversal de área constante α , su longitud es L , uno de sus extremos es el origen, y el centro de cualquiera de sus secciones transversales está sobre el eje x . Si la densidad es constante, encuentre el centro de masa del alambre.
2. Si la densidad $\rho(s)$ en $P(x, y, z)$ del alambre del ejercicio 1 es proporcional a la distancia de $(x, 0, 0)$ al origen, encuentre el centro de masa del alambre.
3. Encuentre el centroide del arco de la cicloide con representación $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0; \pi]$.
4. Encuentre el centroide de la curva con ecuación $y = \frac{1}{2}a(e^{x/a} + e^{-x/a})$ entre los puntos donde $x = 0$ y $x = a$.
5. Encuentre el centroide de la curva que es la gráfica en coordenadas polares del conjunto de pares ordenados $\{(r, \theta) \mid r = a, -\pi/3 \leq \theta \leq \pi/3\}$.

12.5 Teoremas de Pappus. Sea C una curva rectificable, gráfica de

$$\{(x, y) \mid y = F(x), \quad x \in [a; b]\},$$

y que no cruce al eje x (Fig. 12.8). Como se vio en la Sec. 12.4, si s representa

la longitud de la parte de C entre los puntos $(a, F(a))$ y $(x, F(x))$, existirá una función \bar{S} que dará la longitud del arco;

$$\bar{S} = \{(x, s) \mid s = \bar{S}(x), \quad x \in [a; b]\}$$

$$y \quad ds = \sqrt{1 + [F'(x)]^2} dx.$$

Si establecemos $s_a = \bar{S}(a)$ y $s_b = \bar{S}(b)$ como en la Sec. 12.4, la longitud L del alambre estará dada por

$$L = \int_{s_a}^{s_b} ds = \int_a^b \sqrt{1 + [F'(x)]^2} dx.$$

Representaremos el centroide C por (\bar{x}, \bar{y}) y sea S el área de la superficie generada al girar C alrededor del eje x . Por la Sec. 8.6 obtenemos

$$S = 2\pi \int_{s_a}^{s_b} y ds,$$

y de (25) obtenemos

$$\bar{y} = \frac{\int_{s_a}^{s_b} y ds}{L}.$$

Por tanto:

$$S = L \cdot 2\pi \bar{y}.$$

Expresemos este resultado en el siguiente teorema

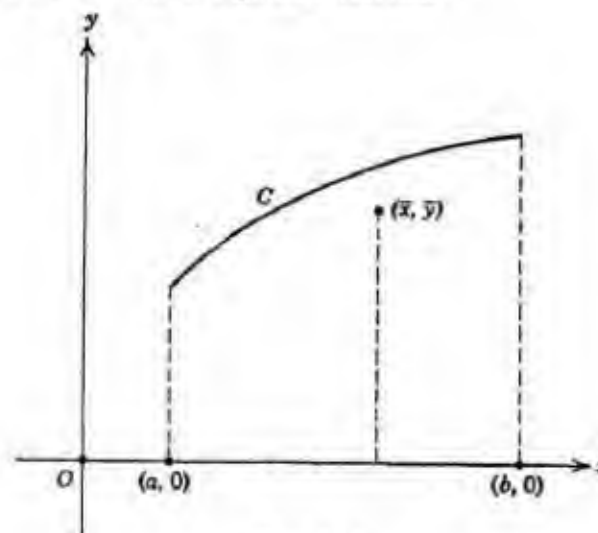


Fig. 12.8

Teorema 1. Sea C una curva plana rectificable y l una línea situada en el plano de la curva, que no corte a C . Entonces el área de la superficie de revolución que se obtiene al girar C alrededor de l es igual al producto de la longitud de la curva C por la circunferencia del círculo cuyo radio es la distancia de l al centroide de C .

Supongamos que R es una región cerrada acotada que es la gráfica de

$$\{(x, y) \mid 0 < G_1(x) \leq y \leq G_2(x), \quad a \leq x \leq b\}$$

como se muestra en la Fig. 12.9. Representaremos al área de la región R por A , al centroide de R por (\bar{x}, \bar{y}) y por V al volumen del sólido de revolución generado por R al girar alrededor del eje x . Por la Sec. 5.9 obtenemos

$$V = \pi \int_a^b \{[G_2(x)]^2 - [G_1(x)]^2\} dx.$$

Además, por (18)

$$A\bar{y} = \iint_R y \, dA = \int_a^b \int_{G_1(x)}^{G_2(x)} y \, dy \, dx = \frac{1}{2} \int_a^b \{[G_2(x)]^2 - [G_1(x)]^2\} dx.$$

Por tanto, tenemos

$$V = A \cdot 2\pi\bar{y}.$$

Este resultado se puede expresar en el siguiente teorema.

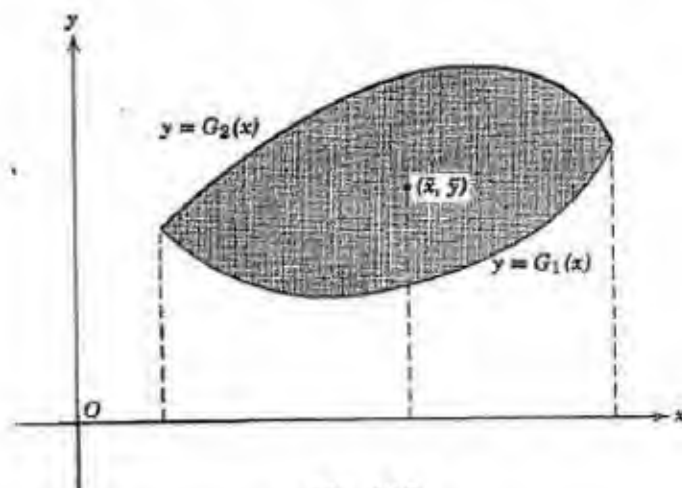


Fig. 12.9

Teorema 2. Sea R una región en un plano y sea l una línea en el plano que no tenga puntos en común con el interior de R . Entonces el volumen del sólido de revolución generado al girar R alrededor de l es igual al producto del área de la región por la circunferencia del círculo cuyo radio es la distancia de l al centroide de R .

Los teoremas 1 y 2 se conocen comúnmente como teoremas de Pappus, un matemático de la Escuela Alejandrina, que vivió en el año 300 (A.C.) (Pappus, por supuesto demostró estos teoremas sin usar cálculo). Los teoremas de Pappus se pueden usar para encontrar volúmenes de sólidos y áreas de superficies que serían difíciles de calcular usando otros métodos. También se pueden usar para determinar los centroides de regiones.

Ejemplo 1. Un toro se genera al girar un círculo de radio a , alrededor de una línea coplanaria que esté a una distancia b de su centro, $b > a$ (vea Fig. 12.10). Encuentre el volumen y el área de la superficie del toro.

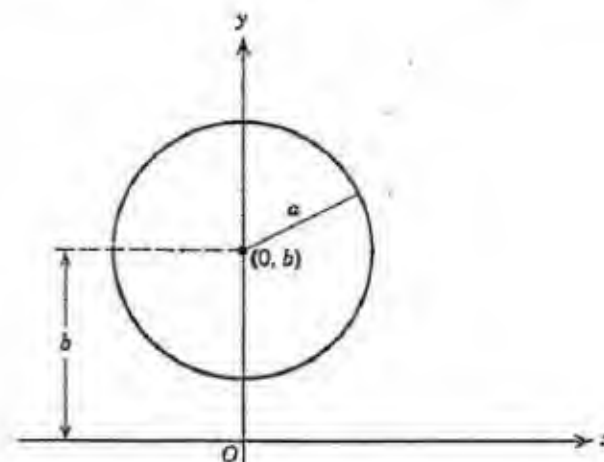


Fig. 12.10

Solución. El centroide de la región limitada por el círculo es el centro del círculo.

Escojamos el eje de rotación de tal manera que coincida con el eje x , entonces el centroide estará a una distancia b del eje de giro.

Representemos por C a la circunferencia del círculo, por S a la superficie del toro y por V al volumen del toro. Por el teorema 1 tenemos:

$$S = C \cdot 2\pi b = 2\pi a \cdot 2\pi b = 4\pi^2 ab,$$

y por el teorema 2 tenemos

$$V = A \cdot 2\pi b = \pi a^2 \cdot 2\pi b = 2\pi^2 a^2 b.$$

Ejemplo 2. Use el teorema 2 para encontrar el centroide de la región R de la Fig. 12.6 (vea el ejemplo 3 de la Sec. 12.3).

Solución. Si esta región R se gira alrededor del eje x , se genera un hemisferio.

Si A representa el área de R y V el volumen del sólido generado, entonces

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi a^3}{3} \right) = \frac{2}{3} \pi a^3 \quad \text{y} \quad A = \frac{1}{4} \pi a^2.$$

Si representamos el centroide de la región R por (\bar{x}, \bar{y}) , la distancia del centroide a la línea alrededor de la cual gira R es \bar{y} , y por el teorema 2 tenemos:

$$V = A \cdot 2\pi\bar{y}.$$

Por tanto

$$\frac{2}{3}\pi a^3 = \frac{1}{4}\pi a^2 \cdot 2\pi \bar{y},$$

de donde

$$\bar{y} = \frac{4a}{3\pi}.$$

Por simetría, \bar{x} tiene el mismo valor de \bar{y} , y así $\bar{x} = 4a/3\pi$. Note que hemos obtenido el resultado del ejemplo 3 de la Sec. 12.3 pero por un método distinto.

EJERCICIOS

1. Un triángulo equilátero cuyos lados miden 6 unidades gira alrededor de una línea que se encuentra en su mismo plano, esta línea es paralela a la base y está a 8 unidades de ella. Use el teorema de Pappus para encontrar el área de la superficie y el volumen del sólido generado.

2. Use los teoremas de Pappus, para encontrar (a) el centroide de un arco semicircular de radio a , (b) el centroide del semicírculo.

3. El círculo con ecuación $(x-1)^2 + y^2 = 1$ gira alrededor del eje y . Encuentre el volumen y el área de la superficie del sólido generado.

12.6 Momentos de inercia. Dado un sistema de n partículas de masas, m_1, m_2, \dots, m_n a distancias respectivas r_1, r_2, \dots, r_n de una línea L , el **momento de inercia** de dicho sistema con respecto a la línea mencionada (algunas veces llamado "segundo momento") se define como

$$\sum_{i=1}^n r_i^2 m_i.$$

El momento de inercia de un sistema de n partículas de masa situadas a distancias r_1, r_2, \dots, r_n respectivamente de un plano se define en forma semejante.

La definición del momento de inercia con respecto a una línea de un sistema de n partículas de masa, sugiere una definición del momento de inercia de un cuerpo continuo con respecto a una línea. Antes de establecer estas definiciones observaremos que en un sistema rectangular de coordenadas los cuadrados de las distancias de un punto $P(x, y, z)$ a los ejes x, y, z son $y^2 + z^2, x^2 + z^2$, y $x^2 + y^2$, respectivamente.

Para un cuerpo continuo B con volumen V , que ocupa una región cerrada R^3 , y con densidad $\rho(x, y, z)$ en el punto $P(x, y, z)$, los **momentos de inercia** con respecto al eje x , eje y y eje z , se representan por I_x, I_y e I_z respectivamente y se definen por:

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_{R^3} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV, \\ I_y &= \iiint_{R^3} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV, \\ I_z &= \iiint_{R^3} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV. \end{aligned} \quad (26)$$

Para un cuerpo continuo B los **momentos de inercia** con respecto al plano xy , el plano xz y el plano yz se representan por I_{xy}, I_{xz} , e I_{yz} respectivamente y se definen por:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \iiint_{R^3} x^2 y^2 \rho(x, y, z) dV, \\ I_{xz} &= \iiint_{R^3} x^2 z^2 \rho(x, y, z) dV, \\ I_{yz} &= \iiint_{R^3} y^2 z^2 \rho(x, y, z) dV. \end{aligned} \quad (27)$$

Por las igualdades (26) y (27) se deduce que:

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, \quad I_y = I_{xy} + I_{yz}, \quad I_z = I_{xz} + I_{yz}. \quad (28)$$

Estas tres igualdades ilustran la proposición: El momento de inercia de un cuerpo con respecto a una línea es igual a la suma de los momentos de inercia de ese cuerpo con respecto a dos planos perpendiculares que se intersectan en la línea.

Ejemplo 1. Un cuerpo B ocupa un cono circular recto de altura h y radio en la base r . Encuentre el momento de inercia de este cuerpo con respecto a su eje si la densidad $\rho(x, y, z)$ en el punto $P(x, y, z)$ es proporcional a la distancia de P al eje del cono.

Solución. Orientamos el cono como en el ejemplo 1 de la Sec. 12.2 (Vea Fig 12.2) y usamos coordenadas cilíndricas. La región R^3 ocupada por el cuerpo B es la gráfica de

$$\{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq \frac{a}{h}(h-z); \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi; \quad 0 \leq z \leq h\}.$$

De (26) tenemos

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_{R^3} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV = \int_0^h \int_0^{(a/h)(h-z)} \int_0^{2\pi} r^2 k r r d\theta dr dz \\ &= 2\pi k \int_0^h \int_0^{(a/h)(h-z)} r^4 dr dz = \frac{2\pi k a^5}{5h^5} \int_0^h (h-z)^5 dz, \end{aligned}$$

entonces

$$I_z = \frac{\pi k a^5 h}{15}.$$

Si un cuerpo tiene la forma de una lámina de grueso h y tiene por base una región R en el plano xy , los momentos de inercia de L con respecto a los planos yz y xz respectivamente, están dados por

$$I_{yz} = h \iint_R x^2 \rho(x, y) dA, \quad I_{xz} = h \iint_R y^2 \rho(x, y) dA. \quad (29)$$

El momento de inercia I_z de esta lámina con respecto al eje z está dado por

$$I_z = h \iint_R (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA.$$

Ejemplo 2. Una lámina L de grueso h tiene por base la región en el primer cuadrante limitada por la gráfica de $y = 4 - x^2$ y los ejes de coordenadas. Si la densidad es una constante k , encuentre el momento de inercia de L con respecto al plano yz y con respecto al plano xz .

Solución. Al usar (29) tenemos

$$I_{yz} = h \iint_R x^2 \rho(x, y) dA = kh \int_0^2 \int_0^{4-x^2} x^2 dy dx = \frac{64}{15} hk,$$

$$I_{xz} = h \iint_R y^2 \rho(x, y) dA = kh \int_0^2 \int_0^{4-x^2} y^2 dy dx = \frac{2048}{105} hk.$$

EJERCICIOS

1. Un cuerpo B ocupa un cilindro circular recto con altura h y radio a . (a) Encuentre el momento de inercia de B con respecto al eje del cilindro si la densidad $\rho(x, y, z)$ en un punto $P(x, y, z)$ es proporcional al cuadrado de la distancia de P a este eje. (b) Encuentre la masa de B .

2. Si la densidad del cuerpo B del ejercicio 1 es una constante k , (a) encuentre el momento de inercia de B con respecto al eje del cilindro; (b) la masa de B .

3. Si la densidad del cuerpo B del ejemplo 1 de esta sección es una constante k , encuentre el momento de inercia de B con respecto al eje del cono.

4. Un cuerpo B ocupa la región cerrada R^3 limitada por la gráfica de $z = xy$, el plano xy y los planos con ecuaciones $x = 2$ y $y = 2$. Si la densidad $\rho(x, y, z)$ en el punto $P(x, y, z)$ es proporcional a la distancia de P al plano xy , encuentre el momento de inercia de B con respecto al eje z .

5. Una lámina L de grueso h , tiene por base la región en el plano xy limitada por el círculo con radio a y centro en el origen. Si la densidad es una constante k , encuentre el momento de inercia de L con respecto al eje z .

6. Una lámina L de grueso h tiene por base la región en el primer cuadrante del plano xy limitada por la gráfica de $y = 4x - x^2$ y el eje x . Encuentre los momentos de inercia de L con respecto a los planos yz y xz si la densidad es una constante k .

7. Un cuerpo homogéneo B con densidad constante k ocupa el elipsoide con ecuación $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1$. Encuentre I_x , I_y y I_z para B . *Sugerencia.* Encuentre primero I_{xy} , I_{xz} y I_{yz} ; entonces use las igualdades (28) para encontrar I_x , I_y y I_z .

8. Si la densidad $\rho(x, y)$ en el punto $P(x, y, z)$ de la lámina del ejercicio 5 es proporcional a la distancia de $(x, y, 0)$ al origen, encuentre (a) el momento de inercia de la lámina con respecto al eje z ; (b) la masa de la lámina.

EJERCICIOS ADICIONALES AL CAPITULO 12

En cada uno de los ejercicios del 1 al 4 se dan un conjunto de pares ordenados y un eje. Cuando la región R , que es gráfica del conjunto de pares orde-

nados, gira alrededor del eje se genera una superficie de revolución. Encuentre el centro de masa del cuerpo homogéneo limitado por esta superficie de revolución.

1. $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$, eje x .

2. $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq e^{-x}, 0 \leq x \leq 1\}$; eje x .

3. $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{x}{4}; 1 \leq x \leq 4\}$; eje x .

4. $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq a\}$; eje x .

En cada uno de los ejercicios del 5 al 8 encuentre el centroide de la región que es gráfica del conjunto de pares ordenados

5. $\{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq a, -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$.

6. $\{(x, y) \mid \frac{y^2}{4} \leq x \leq 5 - y^2; 0 \leq y \leq 2\}$.

7. $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x - x^3, 0 \leq x \leq 1\}$.

8. $\{(x, y) \mid x^3 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$.

9. Encuentre el centroide de la región limitada por las gráficas de $y = 2\sqrt{ax}$, $x = 2a$ y el eje x .

10. Encuentre el centroide de la región limitada por la gráfica de $r = a(1 - \cos \theta)$.

11. Un cuerpo B ocupa la región R^3 cerrada y acotada por la gráfica de $z = 4 - x^2 - y^2$ y el plano xy . Si la densidad es una constante k , encuentre el momento de inercia de B con respecto al plano xy .

12. Una lámina de espesor h tiene por base la región en el plano xy limitada por las gráficas de $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, y $y = e^x$. Si la densidad $\rho(x, y)$ en el punto $P(x, y, z)$ es proporcional a la distancia de $(x, y, 0)$ al eje x , encuentre el centro de masa de la lámina.

13. Un cuerpo B ocupa una esfera de radio a . Encuentre el momento de inercia de B con respecto al diámetro de la esfera si la densidad en cada punto es proporcional a la distancia de ese punto al centro de la esfera.

14. Un cuerpo B ocupa una esfera de radio a . Encuentre la masa de B si la densidad en cada punto es proporcional a la distancia de dicho punto a un punto fijo de la esfera.

Sugerencia: Use coordenadas esféricas, con $r = 2a \cos \theta$ para expresar la ecuación de la esfera y use el origen como punto fijo.

15. Encuentre el centroide de la curva con ecuación $9y^2 = 4x^3$ entre los puntos $(1, -\frac{2}{3})$ y $(1, \frac{2}{3})$.

Reglas de L'Hopital.

Asíntotas.

Integrales generalizadas

13.1 Reglas de L'Hopital. Consideremos las funciones

$$F = \{(x, y) \mid y = F(x), x \in D_1\}, \quad G = \{(x, y) \mid y = G(x), x \in D_2\},$$

y sea

$$Q(x) = \frac{F(x)}{G(x)}.$$

Supongamos que $a \in D_1 \cap D_2$ y que $F(a) = 0$ y $G(a) = 0$; entonces $Q(a)$ está indefinida. Aunque $Q(a)$ está indefinida cuando $F(a) = 0$ y $G(a) = 0$, sin embargo $\lim_{x \rightarrow a} Q(x)$ puede existir.

Por ejemplo, en el ejemplo 1 de la Sec. 2.1 observamos que si

$$Q(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3},$$

entonces $Q(3)$ está indefinida. Sin embargo, como vimos en el ejemplo 5 de la Sec. 2.1 por el teorema 7

$$\lim_{x \rightarrow 3} Q(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6,$$

por tanto, aunque $Q(3)$ está indefinido $\lim_{x \rightarrow 3} Q(x)$ existe y es igual a 6.

Consideremos $Q(x)$ donde $F(x) = \ln x$ y $G(x) = x - 1$;

$$Q(x) = \frac{\ln x}{x - 1}.$$

Aquí $F(1) = 0$ y $G(1) = 0$, entonces $Q(1)$ está indefinida. Deseamos averiguar si existe o no

$$\lim_{x \rightarrow 1} Q(x)$$

y determinar su valor en caso de que exista. Para proceder como se hizo para $Q(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ tendríamos que eliminar el factor común $(x-1)$ del numerador y denominador de $\frac{\ln x}{x-1}$; pero esto no se puede efectuar con este cociente. Necesitamos otro método para el cálculo de éste y otros límites semejantes. El siguiente teorema nos da un método.

Teorema 1. Sean

$$F = \{(x, y) \mid y = F(x), x \in D_1\} \text{ y } G = \{(x, y) \mid y = G(x), x \in D_2\}$$

dos funciones y sea $a \in D_1 \cap D_2$. Supongamos que

$$\begin{aligned} F(a) = F'(a) = F''(a) = \cdots = F^{(k-1)}(a) = 0, \\ G(a) = G'(a) = G''(a) = \cdots = G^{(k-1)}(a) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

y que $F^{(k)}$ y $G^{(k)}$ son continuas en un intervalo $S \subseteq D_1 \cap D_2$ que contiene a a . Si $G^{(k)}(a) \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F^{(k)}(a)}{G^{(k)}(a)}.$$

Demostración. Ya que $G^{(k)}(a) \neq 0$ y $G^{(k)}$ es continua en un intervalo que contiene a a , existe un intervalo $(c; d)$ con la propiedad de que $a \in (c; d) \subseteq S$ y $G^{(k)}(x) \neq 0$ para $x \in (c; d)$ (Vea Sec. 2.3). Si usamos la fórmula de Taylor con residuo para $F(x)$ y $G(x)$ (vea Sec. 8.9), por (1) tenemos

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{(x-a)^k F^{(k)}(z_1)}{(x-a)^k G^{(k)}(z_2)}, \quad x \in (c; d), \quad x \neq a,$$

donde $a < z_1 < x$ ó $x < z_1 < a$, y $a < z_2 < x$ ó $x < z_2 < a$. Entonces para $x \in (c; d)$ y $x \neq a$, tenemos

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F^{(k)}(z_1)}{G^{(k)}(z_2)}$$

En consecuencia

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F^{(k)}(z_1)}{G^{(k)}(z_2)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} F^{(k)}(z_1)}{\lim_{x \rightarrow a} G^{(k)}(z_2)}; \quad (2)$$

siempre que $\lim_{x \rightarrow a} F^{(k)}(z_1)$ y $\lim_{x \rightarrow a} G^{(k)}(z_2)$ existan y $\lim_{x \rightarrow a} G^{(k)}(z_2) \neq 0$. Ya que $F^{(k)}$ y $G^{(k)}$ son continuas en a y $\lim_{x \rightarrow a} z_1 = a$, $\lim_{x \rightarrow a} z_2 = a$, sabemos por el teorema 14 de la Sec. 2.3 que

$$\lim_{x \rightarrow a} F^{(k)}(z_1) = F^{(k)}(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} G^{(k)}(z_2) = G^{(k)}(a).$$

Por tanto, (2) es válida y

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F^{(k)}(a)}{G^{(k)}(a)}$$

Regresemos al problema original, encontrar $\lim_{x \rightarrow 1} Q(x)$ cuando $Q(x) = \frac{\ln x}{x-1}$. Aquí,

$$F(x) = \ln x, \quad F'(x) = \frac{1}{x} \quad G(x) = x-1, \quad G'(x) = 1.$$

F, F', G y G' son continuas en un intervalo $(c; d)$ tal que $1 \in (c; d)$. Vemos además que $F'(1) = 1$ y $G'(1) = 1 \neq 0$. Por tanto, por el teorema 1 tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \frac{F'(1)}{G'(1)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ejemplo 1. Encuentre $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

Solución. Sea $F(x) = x - \sin x$ y $G(x) = x^3$. Observemos que $F(0) = 0$ y $G(0) = 0$. Por tanto $Q(0)$ es indefinido, si

$$Q(x) = \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

Además $F'(x) = 1 - \cos x$ y $G'(x) = 3x^2$, entonces $F'(0) = 0$ y $G'(0) = 0$; $F''(x) = \sin x$ y $G''(x) = 6x$, por tanto $F''(0) = 0$ y $G''(0) = 0$. Sin embargo $F'''(x) = \cos x$ y $G'''(x) = 6$, entonces $F'''(0) = 1$ y $G'''(0) = 6 \neq 0$. Al usar el teorema 1 con $k = 3$ obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{F'''(0)}{G'''(0)} = \frac{1}{6}.$$

Ejemplo 2. Encuentre $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x}$.

Solución. Sea $F(x) = x \cos x - \sin x$ y $G(x) = x$. Observe que $F(0) = 0$ y $G(0) = 0$, por tanto $Q(0)$ está indefinida, donde

$$Q(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x}.$$

Sin embargo, $F'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x$, y $G'(x) = 1$, así que $F'(0) = 0$ y $G'(0) = 1 \neq 0$. Al usar el teorema 1 con $k = 1$ obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x} = \frac{F'(0)}{G'(0)} = \frac{0}{1} = 0.$$

El teorema 1 no proporciona un método para investigar un límite como

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}. \quad (3)$$

Si $F(x) = \sin x$ y $G(x) = \sqrt{x}$, tenemos $F'(x) = \cos x$ y $G'(x) = 1/(2\sqrt{x})$. Observamos que F y G son continuas en el intervalo $[0; h]$ para $h > 0$, pero G' no es continua en $[0; h]$, ya que $G'(0)$ no está definida; el teorema 1 no es

útil en este caso. El teorema 2 proporciona un método para investigar límites como el (3).

Teorema 2. Sean las funciones

$$F = \{(x, y) \mid y = F(x), x \in D_1\} \quad y \quad G = \{(x, y) \mid y = G(x), x \in D_2\}$$

continuas en el intervalo $[a; a+h] \subseteq D_1 \cap D_2$ para un número positivo h , y derivables en $(a; a+h)$ con $G'(x) \neq 0$ para $x \in (a; a+h)$. Si $F(a) = 0$, $G(a) = 0$, y si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F'(x)}{G'(x)} = L,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x)}{G(x)} = L.$$

Demostración. Las funciones F y G satisfacen la hipótesis de la generalización del teorema del valor medio (ejercicio 12, Sec. 3.10). Por tanto, existe un número z , $a < z < x$, con la propiedad de que para $x \in (a; a+h)$

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(z)}{G'(z)}.$$

Ya que por hipótesis $F(a) = 0$ y $G(a) = 0$, esta igualdad se reduce a

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(z)}{G'(z)},$$

y por tanto

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F'(z)}{G'(z)}$$

Por hipótesis $\lim_{z \rightarrow a^+} \frac{F'(z)}{G'(z)} = L$; además como $a < z < x$, vemos que $\lim_{x \rightarrow a^+} z = a$.

Entonces se puede aplicar el teorema 13 de la Sec. 2.3 (con $V(x) = z$, $b = a$,

$U(u) = \frac{F'(u)}{G'(u)}$) y obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F'(z)}{G'(z)} = \lim_{z \rightarrow a^+} \frac{F'(z)}{G'(z)} = L.$$

En consecuencia

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x)}{G(x)} = L,$$

y el teorema queda demostrado. ■

Ahora podemos encontrar el límite (3). Sea $F(x) = \sin x$ y $G(x) = \sqrt{x}$, entonces

$$F'(x) = \cos x \quad y \quad G'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

F y G son continuas en el intervalo $[0; h]$ para $h > 0$, y son derivables en $(0; h)$ con $G'(x) \neq 0$ para $x \in (0; h)$. Encontramos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F'(x)}{G'(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{1/(2\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \cos x \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Ahora se puede aplicar el teorema 2 y obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{1/(2\sqrt{x})} = 0.$$

El teorema 3 es semejante al teorema 2,

Teorema 3. Sean las funciones

$$F = \{(x, y) \mid y = F(x), x \in D_1\} \quad y \quad G = \{(x, y) \mid y = G(x), x \in D_2\}$$

continuas en el intervalo $[a-h; a] \subseteq D_1 \cap D_2$ para un número positivo h , y derivables en $(a-h; a)$, con $G'(x) \neq 0$ para $x \in (a-h; a)$. Si $F(a) = 0$, $G(a) = 0$, y

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{F'(x)}{G'(x)} = L,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{F(x)}{G(x)} = L.$$

La demostración del teorema 3 es semejante a la del teorema 2, y se pide al estudiante que la desarrolle en el ejercicio 22 de esta sección.

Ejemplo 3. Encuentre $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x}{\sqrt{\pi-x}}$.

Solución. Sea

$$F(x) = \sin x \quad y \quad G(x) = \sqrt{\pi-x},$$

entonces

$$F'(x) = \cos x \quad y \quad G'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi-x}}.$$

Las funciones F y G son continuas en el intervalo $[\pi-h; \pi]$ para $h > 0$, y son derivables en $(\pi-h; \pi)$ con $G'(x) \neq 0$ para $x \in (\pi-h; \pi)$. Ya que

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cos x}{-1/(2\sqrt{\pi-x})} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} (-2\sqrt{\pi-x} \cos x) = 0,$$

podemos usar el teorema 3, y encontramos que

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x}{\sqrt{\pi-x}} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cos x}{-1/(2\sqrt{\pi-x})} = 0$$

Si los teoremas 2 y 3 son combinados entonces resulta el siguiente teorema:

Teorema 4. Sean las funciones

$$F = \{(x, y) \mid y = F(x), x \in D_1\} \quad y \quad G = \{(x, y) \mid y = G(x), x \in D_2\}$$

continuas en el intervalo $[a-h; a+h] \subseteq D_1 \cap D_2$ para un número $h > 0$, y derivables con $G'(x) \neq 0$ en el intervalo $(a-h; a) \cup (a; a+h)$. Si $F(a) = 0$, $G(a) = 0$, y

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{G'(x)} = L,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)} = L.$$

Demostración. Ya que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{G'(x)} = L$ vemos que (vea Sec. 2.1)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{F'(x)}{G'(x)} = L.$$

Entonces, de los teoremas 2 y 3 obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x)}{G(x)} = L \quad y \quad \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{F(x)}{G(x)} = L,$$

y el teorema queda demostrado.

Ejemplo 4. Encuentre $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$

Solución. Sea

$$F(x) = \tan x - x \quad y \quad G(x) = x - \sin x;$$

entonces

$$F'(x) = \sec^2 x - 1 \quad y \quad G'(x) = 1 - \cos x.$$

Notamos que $F(0) = 0$ y $G(0) = 0$. Consideremos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x}$$

Notamos que para $x \in (-\pi/2; 0) \cup (0; \pi/2)$

$$\frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x (1 - \cos x)} = \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x}.$$

Por tanto (vea teorema 7 de la Sec. 2.1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{1} = 2.$$

En consecuencia, por el teorema 4 tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} = 2.$$

Ejemplo 5. Encuentre $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^{3/2}}$

Solución. Sea $F(x) = x - \sin x$ y $G(x) = x^{3/2}$. Vemos que $F(0) = 0$, $G(0) = 0$ y que F y G son continuas en \mathbb{R} . Vemos además que $G'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$, no es cero para $x \neq 0$; y por tanto consideraremos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{3}{2}x^{1/2}}$$

Si definimos $U(x) = 1 - \cos x$ y $V(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$, vemos que $U(0) = 0$, $V(0) = 0$, y $V'(x) = \frac{3}{4}x^{-1/2}$ es diferente de cero para $x \neq 0$. Consideraremos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{U'(x)}{V'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\frac{3}{4}x^{-1/2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{3} x^{1/2} \sin x = 0.$$

Por tanto, por el teorema 4 tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{3}{2}x^{1/2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\frac{3}{4}x^{-1/2}} = 0;$$

y aplicando el teorema 4 por segunda vez encontramos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^{3/2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{3}{2}x^{1/2}} = 0.$$

Las aplicaciones repetidas del teorema 4, como en el ejemplo 5, conducen al teorema 5.

Teorema 5. Sean

$$F = \{(x, y) \mid y = F(x), x \in D_1\} \quad y \quad G = \{(x, y) \mid y = G(x), x \in D_2\}$$

dos funciones con $a \in D_1 \cap D_2$ para las cuales $F^{(k-1)}$ y $G^{(k-1)}$ son continuas en $[a-h; a+h]$ si $h > 0$ y además $F^{(k)}(x)$ y $G^{(k)}(x)$ existen, en el mismo intervalo siendo $G^{(k)}(x) \neq 0$ en $(a-h; a) \cup (a; a+h)$. Si

$$F(a) = F'(a) = F''(a) = \cdots = F^{(k-1)}(a) = 0,$$

$$G(a) = G'(a) = G''(a) = \cdots = G^{(k-1)}(a) = 0,$$

y

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F^{(k)}(x)}{G^{(k)}(x)} = L,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F^{(k)}(x)}{G^{(k)}(x)}.$$

Los teoremas 2, 3, 4 y 5 se denominan *reglas de L'Hôpital*. Es muy importante tener presente que estos teoremas solamente se pueden aplicar para calcular

el $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)}$ cuando $F(a) = 0$ y $G(a) = 0$.

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 21 encuentre el límite indicado.

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$
3. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 + \cos 4x}{\sec^2 x - 2 \tan x}$
4. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{x \sin x}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 3^x}{4x}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\ln \cos x}$
8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x^2 + x}{(x-1)^2}$
9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x - x}{x^3}$
11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \sin \pi x + \pi(x^2 - 1)}{(x-1)^2}$
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x - \arcsen x}$
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$
14. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin 10x}{\sin 4x}$
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 5x^{3/2}}{25x^{2/3} - 4x^2}$
16. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x} - \sqrt{8-x}}{3x - 2\sqrt{15-3x}}$
17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{1}{2}x)}{x^2}$
18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 3x^{3/2}}{6x^{1/2} - 5x}$
19. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{3/2} - 1 + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$
20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2 \ln(1+x)}{x \sin x}$
21. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$
22. Demuestre el teorema 3.

13.2 Límites cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$. Como preparación para extender las reglas de L'Hôpital, consideraremos "límites cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$ ".

Observe que si

$$F(x) = \frac{x}{x+2}$$

podemos hacer a $F(x)$ tan próxima a 1 como se quiera haciendo x suficientemente grande. Por ejemplo $F(999,998) = 0.999,998$.

Consideremos la función $F = \{(x, y) \mid y = F(x), x \in X\}$ cuyo dominio X tiene la propiedad de que para cualquier número a existen elementos de X en el intervalo $[a; +\infty)$. El límite de $F(x)$ cuando x tiende a infinito es b , lo cual se representa

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = b, \quad (4)$$

si para toda $\varepsilon > 0$ existe un número N tal que

$$|F(x) - b| < \varepsilon$$

para toda $x \in X$ y $x > N$.

Demostraremos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+2} = 1.$$

Vemos que

$$\left| \frac{x}{x+2} - 1 \right| = \left| \frac{x - x - 2}{x+2} \right| = \left| \frac{-2}{x+2} \right| = \frac{2}{|x+2|}.$$

Por tanto, para $x > -2$, tenemos

$$\left| \frac{x}{x+2} - 1 \right| = \frac{2}{x+2},$$

y en consecuencia, dado $\varepsilon > 0$

$$\left| \frac{x}{x+2} - 1 \right| < \varepsilon$$

si y sólo si

$$\frac{2}{x+2} < \varepsilon \quad \text{ó} \quad x > \frac{2}{\varepsilon} - 2.$$

Si escogemos $N = (2/\varepsilon) - 2$ tenemos

$$\left| \frac{x}{x+2} - 1 \right| < \varepsilon$$

para toda $x > N$.

Consideremos la función $F = \{(x, y) \mid y = F(x), x \in X\}$, cuyo dominio tiene la propiedad de que para cualquier número a existen elementos de X en el intervalo $(-\infty; a]$. El límite de $F(x)$ cuando x tiende a menos infinito es b , el cual se representa

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = b, \quad (5)$$

si para toda $\varepsilon > 0$ existe un número N tal que

$$|F(x) - b| < \varepsilon$$

para toda $x \in X$ y $x < N$.

Los teoremas 6 y 7 son de vital importancia cuando se manejan límites de la forma (4) ó (5).

Teorema 6. Si $p > 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^p} = 0$.

Demostración. Para demostrar el teorema debemos hacer ver que para cualquier $\varepsilon > 0$ dado existe un número N con la propiedad de que

$$\left| \frac{1}{x^p} - 0 \right| = \left| \frac{1}{x^p} \right| < \varepsilon$$

para toda $x > N$. Si $x > 0$, $\left| \frac{1}{x^p} \right| = \frac{1}{x^p}$, y $\frac{1}{x^p} < \varepsilon$ si y sólo si $x^p > \frac{1}{\varepsilon}$. Además,

$x^p > \frac{1}{\varepsilon}$ si y solo si $x > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/p}$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, si escogemos

$N = \left|\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/p}\right|$ entonces $\left|\frac{1}{x^p} - 0\right| < \varepsilon$ para toda $x > N$. Esto demuestra el teorema. ■

Teorema 7. Si p es un número positivo tal que x^p es un número real para $x < 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^p} = 0$.

La demostración del teorema 7 es semejante a la demostración del teorema 6, y se pide al estudiante que la desarrolle en el ejercicio 21 de esta sección.

El teorema básico sobre límites, teorema 6 de la Sec. 2.1 también se verifica para límites de la forma (4) y (5), esto es, este teorema sigue siendo cierto cuando $x \rightarrow a$ se sustituye por $x \rightarrow +\infty$ ó por $x \rightarrow -\infty$. Una demostración de esto requiere ligeras modificaciones de la demostración del teorema 6 de la Sec. 2.1, y no se dan aquí los detalles. Los teoremas 8, 13 y 14 del capítulo 2 también se pueden extender en forma semejante.

Ejemplo 1. Encuentre $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-x+4x^2}{2+x^2}$

Solución. Primero dividimos el numerador y denominador de la fracción por la máxima potencia de x que aparece, en este caso x^2 , después usamos el teorema 6 de la Sec. 2.1 y obtenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-x+4x^2}{2+x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3/x^2) - (1/x) + 4}{(2/x^2) + 1} \\ &= \frac{3 \lim_{x \rightarrow +\infty} (1/x^2) - \lim_{x \rightarrow +\infty} (1/x) + 4}{2 \lim_{x \rightarrow +\infty} (1/x^2) + 1} \end{aligned}$$

Por el teorema 6,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

y por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-x+4x^2}{2+x^2} = \frac{4}{1} = 4.$$

En la Sec. 13.3 se dará otro procedimiento para calcular este límite, así como el límite del ejemplo 2.

Ejemplo 2. Encuentre $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+5x}{2x^3+x}$

Solución. Primero dividimos el numerador y el denominador por x^3 y obtenemos

$$\frac{x^2+5x}{2x^3+x} = \frac{1+(5/x^2)}{2+(1/x^2)}$$

Si usamos el teorema 6 de la Sec. 2.1 tenemos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+5x}{2x^3+x} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} [1+(5/x^2)]}{\lim_{x \rightarrow -\infty} [2+(1/x^2)]} = \frac{1+5 \lim_{x \rightarrow -\infty} (1/x^2)}{2+\lim_{x \rightarrow -\infty} (1/x^2)}.$$

Por el teorema 7, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; por tanto

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+5x}{2x^3+x} = \frac{1}{2}.$$

El siguiente teorema nos da un método para investigar límites de la forma

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{G(x)} \quad \text{cuando} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0.$$

Teorema 8. Sean las funciones

$$F = \{(x, y) \mid y = F(x)\} \quad \text{y} \quad G = \{(x, y) \mid y = G(x)\}$$

derivables (y por tanto continuas) en $[h; +\infty)$ para algún número positivo h , y además $G'(x) \neq 0$ para $x \in [h; +\infty)$. Si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0,$$

y si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F'(x)}{G'(x)} = L,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{G(x)} = L.$$

Demostración. Primero demostraremos que si $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(1/t)}{G(1/t)}$ existe, entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(1/t)}{G(1/t)}.$$

Sea $\frac{F(1/t)}{G(1/t)} = U(t)$ y $t = V(x) = 1/x$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = 0$ y $V(x) > 0$ para $x \in [h; +\infty)$. Si $\lim_{t \rightarrow 0^+} U(t)$ existe, entonces por el teorema 13 de la Sec. 2.3 (generalizando), tendremos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} U[V(x)] = \lim_{t \rightarrow 0^+} U(t);$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(1/t)}{G(1/t)} \quad (6)$$

siempre y cuando el último límite exista. Demostraremos que este límite existe.

Consideraremos la expresión $\frac{K(t)}{H(t)}$ donde

$$K(t) = \begin{cases} F\left(\frac{1}{t}\right); & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases} \quad H(t) = \begin{cases} G\left(\frac{1}{t}\right); & t > 0 \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Por la generalización del teorema 13 de la Sec. 2.3 tenemos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} F\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$$

y

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} G\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0.$$

Entonces K y H son continuas en 0 y también en $(0; 1/h]$; por tanto son continuas en $[0; 1/h]$. Se deduce del teorema 2 que si

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{K'(t)}{H'(t)} = L,$$

entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{K(t)}{H(t)} = L$$

Ahora

$$K'(t) = F'(x) D_t\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \in \left(0; \frac{1}{h}\right),$$

y

$$H'(t) = G'(x) D_t\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \in \left(0; \frac{1}{h}\right).$$

Entonces

$$K'(t) = F'(x) \left(-\frac{1}{t^2}\right), \quad H'(t) = G'(x) \left(-\frac{1}{t^2}\right),$$

y

$$\frac{K'(t)}{H'(t)} = \frac{F'(x)}{G'(x)}, \quad t \in \left(0; \frac{1}{h}\right), \quad x \in (h; +\infty).$$

Por el teorema 13 de la Sec. 2.3, si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F'(x)}{G'(x)}$ existe, entonces $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{K'(t)}{H'(t)}$ existe y tiene el mismo valor. Pero por la hipótesis

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F'(x)}{G'(x)} = L,$$

y por tanto

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{K'(t)}{H'(t)} = L$$

y

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{K(t)}{H(t)} = L.$$

Ya que $\frac{K(t)}{H(t)} = \frac{F(1/t)}{G(1/t)}$; $t \in (0; +\infty)$, tenemos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(1/t)}{G(1/t)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{G(x)} = L.$$

Combinando este resultado con (6) tendremos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{G(x)} = L.$$

Ejemplo 3. Encuentre $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\tan(1/x)}{(1/x)}$.

Solución. Sea

$$F(x) = \tan \frac{1}{x} \quad y \quad G(x) = \frac{1}{x}.$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \tan \frac{1}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Si usamos el teorema 8, obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\tan(1/x)}{(1/x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-[\sec^2(1/x)](1/x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sec^2 \frac{1}{x} = 1.$$

El teorema 9 es semejante al teorema 8.

Teorema 9. Sean las funciones

$$F = \{(x, y) \mid y = F(x)\} \quad y \quad G = \{(x, y) \mid y = G(x)\}$$

derivables (y por tanto continuas) en $(-\infty; h]$ para algún número negativo h y además $G'(x) \neq 0$ para $x \in (-\infty; h]$. Si

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad y \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = 0$$

y

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F'(x)}{G'(x)} = L,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F(x)}{G(x)} = L.$$

La demostración del teorema 9 es semejante a la del 8. La demostración se deja al estudiante en el ejercicio 22 de esta sección.

Ejemplo 4. Encuentre $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{e^{1/x} - 1}$.

Solución. Sea

$$F(x) = \frac{1}{x} \quad y \quad G(x) = e^{1/x} - 1.$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{1/x} - 1) = 0.$$

Ahora

$$F'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{y} \quad G'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{1/x}.$$

Al usar el teorema 9, obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1/x}{e^{1/x} - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-(1/x^2)}{-(1/x^2) e^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{1/x}} = 1.$$

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 4 demuestre las igualdades dadas.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x} = 2.$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 - \frac{3}{x}\right) = 4.$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(7 + \frac{4}{x^3}\right) = 7.$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1.$

En cada uno de los ejercicios del 5 al 20 calcule los límites indicados.

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-5}{6-5x^2}.$

6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+4}{x^2-9}.$

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2-9}.$

8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12x^2+7}{x^2-9}.$

9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax+b}{cx+d}.$

10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2-5x+2}{5x^2+7x+6}.$

11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+a^3}{x^3+b^3}.$

12. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(3x-2)}{(x-1)^2(4-x)}.$

13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-1)^2}{x(x+3)^2}.$

14. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 10^x.$

15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 10^{1/x}.$

16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x.$

17. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x.$

18. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{x}.$

19. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \frac{1}{x}.$

20. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x^2}{1-e^{1/x}}.$

21. Demuestre el teorema 7.

22. Demuestre el teorema 9.

13.3 Correspondientes que tienden a infinito o menos infinito.

Ahora consideraremos situaciones en las cuales $F(x)$ tiende a infinito o menos infinito, cuando x tiende a a .

En las definiciones (7), (8), (9) y (10) nos referiremos a la función

$$F = \{(x, y) \mid y = F(x), x \in X\},$$

y a un número real a , no necesariamente en el dominio X de F , pero con la propiedad de que cada intervalo abierto que contiene a a contiene números de X distintos de a .Decimos que $F(x)$ **tiende a $+\infty$ cuando x tiende a a** , y escribimos

$$F(x) \rightarrow +\infty \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow a, \quad (7)$$

si para todo número real K (sin importar la magnitud) existe $\delta > 0$ con la propiedad de que

$$F(x) > K$$

para toda $x \in X$ que satisfaga

$$0 < |x - a| < \delta.$$

Ejemplo 1. Demuestre que $\frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow 0$.*Solución.* Para demostrar esto debemos establecer el hecho de que dado K existe $\delta > 0$ con la propiedad de que $(1/x^2) > K$ si $0 < |x| < \delta$. $(1/x^2) > K$ si y solo si $|x| < (1/\sqrt{K})$. Por tanto, dada $K > 0$, si escogemos $\delta = (1/\sqrt{K})$, se satisface que $(1/x^2) > K$ cuando $0 < |x| < \delta$.Decimos que $F(x)$ **tiende a menos infinito cuando x tiende a a** , y escribimos

$$F(x) \rightarrow -\infty \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow a, \quad (8)$$

si para todo número K (sin importar lo pequeño *) existe $\delta > 0$ con la propiedad de que

$$F(x) < K$$

para toda $x \in X$ que satisfaga

$$0 < |x - a| < \delta.$$

Del mismo modo que en la Sec. 2.1, ahora consideraremos límites por la izquierda y derecha de $F(x)$, es decir consideraremos el comportamiento de $F(x)$ cuando $x \rightarrow a^+$ y cuando $x \rightarrow a^-$.Decimos que $F(x)$ **tiende a infinito cuando x tiende a a por la derecha**, para lo cual usaremos la notación

$$F(x) \rightarrow +\infty \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow a^+, \quad (9)$$

si para todo número K existe $\delta > 0$ con la propiedad de que

$$F(x) > K$$

para toda $x \in X$ que satisfaga

$$a < x < a + \delta.$$

* En este capítulo usaremos la palabra "pequeño" en el sentido algebraico.

Definiciones semejantes se pueden hacer para

$$\begin{aligned} F(x) &\rightarrow +\infty \text{ cuando } x \rightarrow a^-, \\ F(x) &\rightarrow -\infty \text{ cuando } x \rightarrow a^+, \\ F(x) &\rightarrow -\infty \text{ cuando } x \rightarrow a^-. \end{aligned} \quad (10)$$

Si $F(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$, entonces $F(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow 3$.

Si $F(x) = \frac{1}{x+2}$, entonces $\lim_{x \rightarrow -2} F(x)$ no existe y ni $F(x) \rightarrow +\infty$ ni

$F(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow -2$. Sin embargo, $F(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow -2^+$ y $F(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow -2^-$.

Si $F(x) = \frac{1}{(x-4)^{2/3}}$, entonces $\lim_{x \rightarrow 4} F(x)$ no existe y ni $F(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow 4$, ni $F(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow 4$. Sin embargo, $F(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow 4^+$ y $F(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow 4^-$.

Las siguientes expresiones son formas generalizadas de las situaciones (9) y (10).

Si k es un entero positivo, entonces

$$\frac{1}{(x-a)^{2k}} \rightarrow +\infty \text{ cuando } x \rightarrow a, \quad (11)$$

$$\frac{1}{(x-a)^{2k-1}} \rightarrow +\infty \text{ cuando } x \rightarrow a^+, \quad (12)$$

$$\frac{1}{(x-a)^{2k-1}} \rightarrow -\infty \text{ cuando } x \rightarrow a^-. \quad (13)$$

Si p y q son enteros positivos y si p es par y q impar, entonces

$$\frac{1}{(x-a)^{p/q}} \rightarrow +\infty \text{ cuando } x \rightarrow a, \quad (14)$$

si p es impar y q impar, entonces

$$\frac{1}{(x-a)^{p/q}} \rightarrow +\infty \text{ cuando } x \rightarrow a^+; \quad (15)$$

$$\frac{1}{(x-a)^{p/q}} \rightarrow -\infty \text{ cuando } x \rightarrow a^-. \quad (16)$$

Las siguientes 5 proposiciones son de uso frecuente y las establecemos sin demostración.

$$\tan x \rightarrow +\infty \text{ cuando } x \rightarrow \frac{\pi^-}{2},$$

$$\tan x \rightarrow -\infty \text{ cuando } x \rightarrow \frac{\pi^+}{2},$$

$$\ln x \rightarrow +\infty \text{ cuando } x \rightarrow +\infty,$$

$$e^x \rightarrow +\infty \text{ cuando } x \rightarrow +\infty,$$

$$e^x \rightarrow 0 \text{ cuando } x \rightarrow -\infty.$$

Teorema 10. Sean F y G funciones con dominios D_1 y D_2 respectivamente, y sea a un número con la propiedad de que todo intervalo abierto que contenga a a , contenga números distintos de a en $D_1 \cap D_2$. Si $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = b$ y $G(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow a$, entonces

$$(i) [F(x) + G(x)] \rightarrow +\infty \text{ cuando } x \rightarrow a;$$

$$(ii) [F(x)G(x)] \rightarrow +\infty \text{ cuando } x \rightarrow a \text{ si } b > 0;$$

$$(iii) [F(x)G(x)] \rightarrow -\infty \text{ cuando } x \rightarrow a \text{ si } b < 0;$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)} = 0.$$

Demostración. (i) Para demostrar el teorema necesitamos hacer ver, que para todo número K (sin importar que tan grande) existe $\delta > 0$ con la propiedad de que

$$[F(x) + G(x)] > K \text{ cuando } 0 < |x - a| < \delta.$$

Ya que $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = b$, para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|F(x) - b| < \varepsilon \text{ cuando } 0 < |x - a| < \delta_1.$$

Además, si $G(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow a$, dado K_1 existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$G(x) > K_1 \text{ cuando } 0 < |x - a| < \delta_2.$$

Sea δ el menor de δ_1 y δ_2 . Entonces las desigualdades

$$F(x) > b - \varepsilon \text{ y } G(x) > K_1$$

se satisfacen si $0 < |x - a| < \delta$. En consecuencia

$$F(x) + G(x) > b - \varepsilon + K_1 \text{ cuando } 0 < |x - a| < \delta.$$

El teorema 10(i) queda demostrado ya que K_1 es arbitrariamente grande ■

Las demostraciones de las partes (ii), (iii) y (iv) son semejantes a la de la parte (i). Estas demostraciones se dejan al estudiante en los ejercicios 35, 36 y 37 de esta sección.

El teorema 11 es semejante al teorema 10.

Teorema 11. Sean F y G funciones y sea a un número con la propiedad descrita en el teorema 10. Si $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = b$ y $G(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow a$, entonces

$$(i) [F(x) + G(x)] \rightarrow -\infty \text{ cuando } x \rightarrow a;$$

$$(ii) [F(x)G(x)] \rightarrow -\infty \text{ cuando } x \rightarrow a \text{ si } b > 0;$$

$$(iii) [F(x)G(x)] \rightarrow +\infty \text{ cuando } x \rightarrow a \text{ si } b < 0;$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)} = 0.$$

La demostración del teorema 11 no se da aquí por ser muy similar a la del 10.

Teorema 12. Si F y G son funciones tales que $F(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow a$ y $G(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow a$, entonces

$$(i) [F(x) + G(x)] \rightarrow +\infty \text{ cuando } x \rightarrow a.$$

$$(ii) [F(x)G(x)] \rightarrow +\infty \text{ cuando } x \rightarrow a.$$

Teorema 13. Si F y G son funciones tales que $F(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow a$ y $G(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow a$, entonces

$$(i) [F(x) + G(x)] \rightarrow -\infty \text{ cuando } x \rightarrow a.$$

$$(ii) [F(x)G(x)] \rightarrow +\infty \text{ cuando } x \rightarrow a.$$

Las demostraciones de los teoremas 12 y 13 se dejan al estudiante en los ejercicios 38 y 39 de esta sección.

Teorema 14. Si F y G son funciones tales que $F(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow a$ y $G(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow a$, entonces

$$[F(x)G(x)] \rightarrow -\infty \text{ cuando } x \rightarrow a.$$

Demostración. Para demostrar este teorema necesitamos hacer ver que, dado K (sin importar lo pequeño) existe $\delta > 0$ tal que

$$[F(x)G(x)] < K \text{ si } 0 < |x - a| < \delta.$$

Ya que $F(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow a$, dada K_1 (sin importar su magnitud) existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$F(x) > K_1 \text{ si } 0 < |x - a| < \delta_1.$$

Además, ya que $G(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow a$, dada K_2 (sin importar lo pequeño) existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$G(x) < K_2 \text{ si } 0 < |x - a| < \delta_2.$$

Sin perder generalidad podemos suponer que $F(x) > 0$, $G(x) < 0$, $K_1 > 0$ y $K_2 < 0$. Se deduce que

$$F(x)K_2 < K_1K_2 \text{ si } 0 < |x - a| < \delta_1,$$

y en consecuencia

$$F(x)G(x) < K_1K_2 \text{ si } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ y } 0 < |x - a| < \delta_2.$$

Sea δ el mínimo de δ_1 y δ_2 . Entonces

$$F(x)G(x) < K_1K_2 \text{ si } 0 < |x - a| < \delta.$$

Ya que K_2 puede ser arbitrariamente pequeña (y por tanto negativa) y K_1 puede ser arbitrariamente grande (y por tanto positiva), entonces K_1K_2 puede ser arbitrariamente pequeña. Con esto el teorema queda demostrado. ■

Se debe notar que si

$$F(x) \rightarrow +\infty \text{ cuando } x \rightarrow a$$

y

$$G(x) \rightarrow -\infty \text{ cuando } x \rightarrow a,$$

nada se ha afirmado respecto al comportamiento de $[F(x) + G(x)]$ cuando $x \rightarrow a$. Lo mismo si

$$F(x) \rightarrow +\infty \text{ cuando } x \rightarrow a$$

y

$$G(x) \rightarrow +\infty \text{ cuando } x \rightarrow a,$$

nada se afirma acerca del comportamiento de $F(x)/G(x)$ cuando $x \rightarrow a$.

Finalmente consideraremos las situaciones en las que $F(x)$ tiende a infinito o tiende a menos infinito, cuando $x \rightarrow +\infty$ ó cuando $x \rightarrow -\infty$. Decimos que $F(x)$ **tiende a infinito cuando x tiende a infinito**, para lo cual se usa la notación

$$F(x) \rightarrow +\infty \text{ cuando } x \rightarrow +\infty, \quad (17)$$

si para todo número K existe un número k con la propiedad de que $F(x) > K$ si $x > k$.

Esta definición sugiere la forma en que se definen las proposiciones

$$\begin{aligned} F(x) &\rightarrow +\infty \text{ cuando } x \rightarrow -\infty, \\ F(x) &\rightarrow -\infty \text{ cuando } x \rightarrow +\infty, \\ F(x) &\rightarrow -\infty \text{ cuando } x \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (18)$$

Algunos autores simbolizan (7) (la proposición de que $F(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow a$) con la notación

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = +\infty$$

y expresan (8), (9), (10), (17) y (18) en forma semejante, hablando de "límites infinitos" cuando se refieren a estos límites. Sin embargo, nosotros no usaremos esta terminología.

Ejemplo 2. Demuestre que $x^3 \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$.

Solución. Para demostrar esto, necesitamos establecer el hecho de que para cualquier número K (sin importar su magnitud) existe $k > 0$ tal que $x^3 > K$ si $x > k$. $x^3 > K$ si y sólo si $x > \sqrt[3]{K}$. Por tanto, para cualquier $K > 0$, si escogemos $k = \sqrt[3]{K}$ vemos que $x^3 > K$ cuando $x > k$.

Algunas veces encontraremos que es conveniente usar la notación

$$|F(x)| \rightarrow +\infty \text{ cuando } x \rightarrow a$$

para representar

$$F(x) \rightarrow +\infty \text{ cuando } x \rightarrow a$$

o también

$$F(x) \rightarrow -\infty \text{ cuando } x \rightarrow a.$$

En forma similar, usaremos la notación

$$|F(x)| \rightarrow +\infty, \text{ cuando } x \rightarrow +\infty \text{ (o cuando } x \rightarrow -\infty),$$

para representar-

$$F(x) \rightarrow +\infty, \text{ cuando } x \rightarrow +\infty \text{ (o cuando } x \rightarrow -\infty),$$

$$F(x) \rightarrow -\infty, \text{ cuando } x \rightarrow +\infty \text{ (o cuando } x \rightarrow -\infty).$$

Cuando $x \rightarrow a$ se reemplaza por $x \rightarrow +\infty$ ó $x \rightarrow -\infty$ en los teoremas 10, 11, 12, 13 y 14, los teoremas que se obtienen son válidos.

Los teoremas 15, 16 y 17 describen el comportamiento de $\frac{F(x)}{G(x)}$ para el caso de que $|F(x)| \rightarrow +\infty$ y $|G(x)| \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow a$, ó cuando $x \rightarrow +\infty$, ó cuando $x \rightarrow -\infty$.

Teorema 15. Sean F y G funciones que satisfagan la hipótesis del teorema 4 si $|F(x)| \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow a$ y $|G(x)| \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow a$, y si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{G'(x)} = L,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)} = L.$$

Teorema 16. Sean F y G funciones que satisfagan la hipótesis del teorema 8. Si $|F(x)| \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$ y $|G(x)| \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$ y si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F'(x)}{G'(x)} = L,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{G(x)} = L.$$

Teorema 17. Sean F y G funciones que satisfagan la hipótesis del teorema 9. Si $|F(x)| \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$ y $|G(x)| \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$, y si

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F'(x)}{G'(x)} = L,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F(x)}{G(x)} = L.$$

No demostraremos los teoremas 15, 16 y 17. Las demostraciones se pueden encontrar en libros de cálculo avanzado.*

Ejemplo 3. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Solución. Sea $F(x) = \ln x$ y $G(x) = \sqrt{x}$; entonces $F'(x) = 1/x$ y $G'(x) = 1/(2\sqrt{x})$. Ya que $F(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$ y $G(x) \rightarrow +\infty$ cuando

* Por ejemplo, vea J. M. H. Olmsted, *Intermediate Analysis*, Appleton-Century-Crofts, New York, 1956, p. 118.

$x \rightarrow +\infty$, usamos el teorema 16, y obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{1/2}}$$

Por el teorema 6, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{1/2}} = 0$. Por tanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 2 \cdot 0 = 0.$$

Ejemplo 4. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x \ln x)$.

Solución. Observe que $-\ln x \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$ y $x \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 0^+$. Ninguno de los teoremas de esta sección se puede aplicar directamente aquí. Sin embargo, escribimos

$$-x \ln x = \frac{-\ln x}{1/x}$$

sea $F(x) = -\ln x$ y $G(x) = 1/x$. Entonces $F(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$ y $G(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$. Aquí $F'(x) = -(1/x)$ y $G'(x) = -(1/x^2)$. Al usar el teorema 15, tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-(1/x)}{-(1/x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0.$$

Ejemplo 5. Calcule $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\sec x - \tan x)$.

Solución. Observe que $\sec x \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$ y $\tan x \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$. Como en el ejemplo 4, ninguno de los teoremas de esta sección se aplica directamente. Sin embargo, si escribimos

$$\sec x - \tan x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x},$$

y hacemos $F(x) = 1 - \sin x$ y $G(x) = \cos x$, entonces $F'(x) = -\cos x$ y $G'(x) = -\sin x$. Podemos usar el teorema 2 para obtener

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

Por tanto

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\sec x - \tan x) = 0.$$

EJERCICIOS

¿Cuáles de los límites indicados en los ejercicios del 1 al 4 existen y cuáles no? Justifique su respuesta. Si el límite existe, calcúlelo.

1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2}{4}$
2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4}{(x+1)^2}$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2}{4}$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{(x+1)^2}$

En cada uno de los ejercicios del 5 al 10 justifique la proposición dada.

5. Si $F(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$, entonces $F(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow 3$.
6. Si $F(x) = 4 + \frac{1}{x^2}$, entonces $F(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow 0$.
7. Si $F(x) = \frac{7}{x^2}$, entonces $F(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow 0$.
8. Si $F(x) = x^4$, entonces $F(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$.
9. Si $F(x) = \frac{3}{2-x}$, entonces $F(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow 2^+$.
10. Si $F(x) = \frac{3}{2-x}$, entonces $F(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow 2^-$.

En cada uno de los ejercicios del 11 al 30 calcule el límite indicado

11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$
12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$
13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}$
14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$
15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{1/x}) 3x$
16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \tan \frac{1}{x} \right)$
17. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 1}{e^x + e^{-x}}$
18. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$
19. $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \csc x \cot x)$
20. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$
21. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln \tan x}$
22. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x)$
23. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cot x}$
24. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sec x + 1}{\tan x}$
25. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(1-x)}{\cot \pi x}$
26. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan x}{\tan 3x}$
27. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right)$
28. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$
29. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$
30. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (1 - \sin x) \tan x$

Si en el teorema 15 sustituimos la hipótesis $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{G'(x)} = L$ por $\frac{F'(x)}{G'(x)} \rightarrow$

$+\infty$ cuando $x \rightarrow a$, y reemplazamos la conclusión $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)} = L$ por $\frac{F(x)}{G(x)} \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow a$, entonces el teorema que se obtiene (teorema 15') es válido. Adaptaciones semejantes de los teoremas 16 y 17 nos dan los teoremas 16' y 17'.

31. Use el teorema 15' para demostrar que $\frac{\sec x}{\ln \sec x} \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$.
32. Demuestre que $\frac{x \ln x}{x + \ln x} \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$.
33. Demuestre que $\frac{\cot x}{\ln x} \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$.
34. Demuestre que $\frac{e^x}{x^2} \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$.
35. Demuestre el teorema 10(ii).
36. Demuestre el teorema 10(iii).
37. Demuestre el teorema 10(iv).
38. Demuestre el teorema 12.
39. Demuestre el teorema 13.

13.4 Asíntotas. Supongamos que la función $F = \{(x, y) \mid y = F(x), x \in D\}$ tiene la gráfica G . Si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = b \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = b$$

entonces la línea con ecuación $y = b$ es una **asíntota horizontal** de G .

Por ejemplo, la línea con ecuación $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de la gráfica de $y = e^{-x^2}$ (Vea Fig. 6.18), ya que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$. La línea con ecuación $y = 2$ es una asíntota horizontal de la hipérbola con ecuación $y = 2 + \frac{1}{x}$, ya que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{1}{x} \right) = 2$.

Ejemplo 1. Investigue la gráfica G de

$$y = F(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

y construya esta gráfica. Identifique las asíntotas horizontales.

Solución. Observe que $-1 \leq \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} < 1$, y entonces $-1 \leq y < 1$ para $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, G está entre las líneas con ecuaciones $y = 1$ y $y = -1$. Observe que

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - (1/x^2)}{1 + (1/x^2)} = 1$$

* Vea las demostraciones de estos teoremas en *Intermediate Analysis* de Olmsted, p. 118.

y además

$$(ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - (1/x^2)}{1 + (1/x^2)} = 1.$$

Del caso (i) ó (ii) concluimos que la gráfica de $y = 1$ es una asíntota horizontal de G .

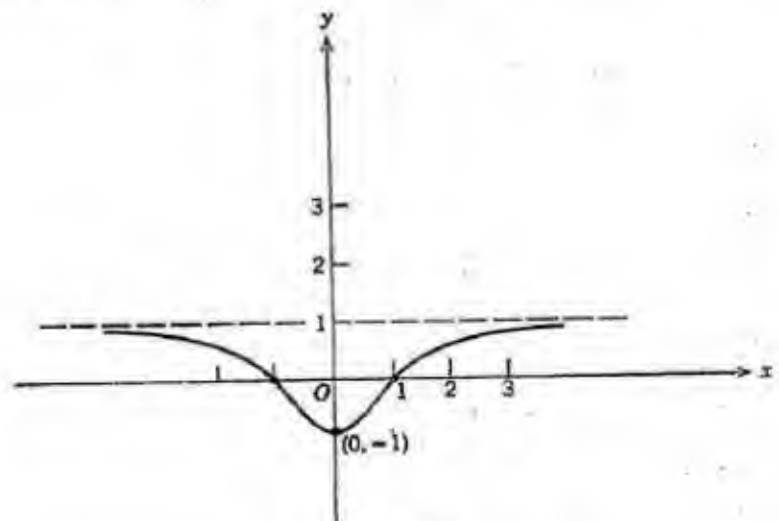


Fig. 13.1

Encontramos que

$$F'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \quad \text{y} \quad F''(x) = \frac{4(1 - 3x^2)}{(x^2 + 1)^3},$$

al usar estos resultados vemos que $F(0) = -1$ es un valor mínimo relativo de $F(x)$, y que $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2})$ y $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2})$ son puntos de inflexión de G . Esta gráfica aparece en la Fig. 13.1, la asíntota horizontal se indica con la línea punteada.

La línea con ecuación $x = a$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de G de la función F cuando se verifica uno de los siguientes casos:

- (i) $F(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow a^+$;
- (ii) $F(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow a^+$;
- (iii) $F(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow a^-$;
- (iv) $F(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow a^-$.

Está claro que si la línea con ecuación $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de una función F , entonces F es discontinua en a .

Si $F = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{H(x)}{(x-a)^r} \right\}$, donde r tiene la forma $\frac{p}{q}$; p entero positivo, q entero positivo impar y $H(a) \neq 0$, entonces la línea con ecuación $x = a$

es una asíntota vertical de la gráfica de F si H es continua en a . Esto se deduce de (14), (15), (16) y de los teoremas 10(ii) y 11(ii).

Ejemplo 2. Investigue la gráfica

$$y = F(x) = \frac{x}{x^2 - 1},$$

y trace esta gráfica. Identifique todas las asíntotas horizontales y verticales.

Solución. Observe que

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0 \quad \text{y} \quad (ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0.$$

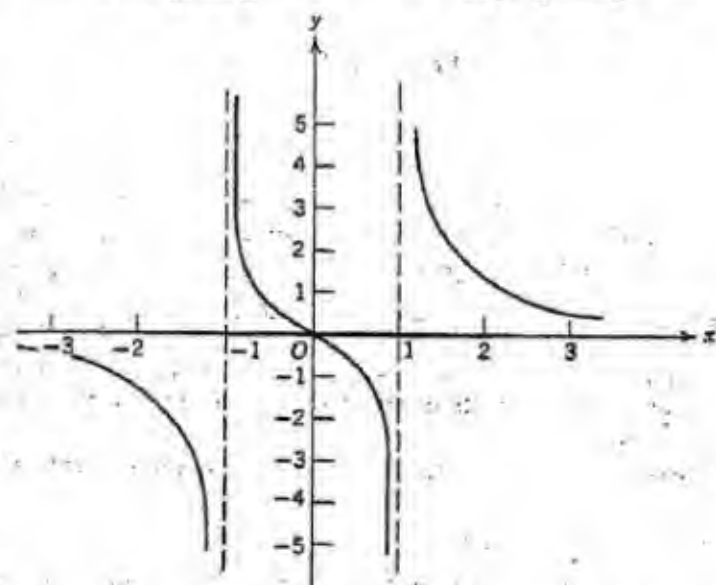


Fig. 13.2

De (i) ó (ii) concluimos que el eje x es una asíntota horizontal.

Sea $U(x) = x$ y $V(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$, entonces $F(x) = U(x)V(x)$. Observe que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} U(x) = 1 \quad \text{y} \quad V(x) \rightarrow +\infty \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow 1^+.$$

Por tanto, por el teorema 10(ii)

$$(iii) F(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \rightarrow +\infty \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow 1^+.$$

En forma similar demostramos que

$$(iv) \frac{x}{x^2 - 1} \rightarrow -\infty \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow 1^-;$$

$$(v) \frac{x}{x^2 - 1} \rightarrow +\infty \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow -1^+;$$

$$(vi) \frac{x}{x^2 - 1} \rightarrow -\infty \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow -1^-.$$

De (iii) ó (iv) concluimos que la gráfica de $x = 1$ es una asíntota vertical de G , y de (v) ó (vi) concluimos que la gráfica de $x = -1$ es una asíntota vertical de G .

Para $F(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$, encontramos que

$$F'(x) = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} \quad \text{y} \quad F''(x) = \frac{2x^2 + 6x}{(x^2 - 1)^3}.$$

Vemos que $F(x)$ no tiene valor máximo relativo ni valor mínimo relativo. El único punto de inflexión de G es $(0, 0)$. La gráfica se muestra en la Fig. 13.2. Las asíntotas verticales se indican con líneas punteadas.

EJERCICIOS

1. Sea $y = F(x) = \frac{1 - x^2}{x^2 - 4}$.

(a) Demuestre para la gráfica de F que intersecta al eje x en 1 y -1 ; al eje y en $-\frac{1}{4}$; la gráfica de $y = -1$ es una asíntota horizontal; las gráficas de $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

(b) Demuestre que $F'(x) = \frac{6x}{(x^2 - 4)^2}$ y $F''(x) = -\frac{6(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}$.

(c) Demuestre que $F(0) = -\frac{1}{4}$ es el único valor mínimo relativo de $F(x)$ y que $F(x)$ no tiene un valor máximo relativo. Demuestre que la gráfica de F no tiene puntos de inflexión.

(d) Construya la gráfica de F , e indique las asíntotas horizontales y verticales con líneas punteadas.

2. Sea $y = F(x) = \ln \sqrt{x^2 - 4}$.

(a) Demuestre que la gráfica de F intersecta al eje x en $\sqrt{5}$ y $-\sqrt{5}$; que no intersecta al eje y ; que las gráficas de $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales; y que no hay asíntota horizontal.

(b) Demuestre que $F'(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ y $F''(x) = -\frac{4 + x^2}{(x^2 - 4)^2}$.

(c) Demuestre que $F(x)$ no tiene valor máximo relativo ni valor mínimo relativo. Demuestre que la gráfica de F no tiene puntos de inflexión.

(d) Construya la gráfica de F e indique por medio de líneas punteadas las asíntotas verticales.

En cada uno de los ejercicios del 3 al 12 investigue la gráfica de la función descrita, y constrúyala. Identifique todas las asíntotas horizontales y verticales.

3. $F(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$.

5. $F(x) = \frac{x+2}{(x-1)(x+3)}$.

7. $F(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

9. $F(x) = \frac{x^2-4}{x^2-2}$.

4. $F(x) = \frac{x}{1-x^2}$.

6. $F(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2(x-2)}$.

8. $F(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$.

10. $F(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x-3)}$.

11. $F(x) = \frac{1}{x^2-1}$.

12. $F(x) = \frac{x-1}{x^2(x-2)}$.

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} [F(x) - (mx + b)] = 0$ ó si $\lim_{x \rightarrow -\infty} [F(x) - (mx + b)] = 0$, entonces la línea con ecuación $y = mx + b$ es una asíntota de la gráfica de la función F . Use este resultado en los ejercicios 13 y 14.

13. Si $F(x) = x + e^x$, demuestre que la línea con ecuación $y = x$ es una asíntota de la gráfica de F . Construya esta gráfica e indique la asíntota.

14. Si $F(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x-1}$, demuestre que las líneas con ecuaciones $y = 2x + 5$ y $x = 1$ son asíntotas de la gráfica de F . Construya la gráfica de F y las gráficas de las asíntotas.

Sugerencia. Escriba $F(x) = 2x + 5 + \frac{3}{x-1}$.

13.5 Integrales generalizadas. Para una función F cuyo dominio contiene al intervalo cerrado $[a; b]$, hemos definido (Sec. 5.4) la integral definida de F en $[a; b]$.

$$\int_a^b F(x) dx.$$

No hemos asignado significado a los símbolos

$$\int_a^{+\infty} F(x) dx, \int_{-\infty}^b F(x) dx, \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx.$$

Ni a $\int_a^b F(x) dx$ cuando $F(x)$ no está definida en todos los puntos del intervalo $[a; b]$. Daremos definiciones, que en algunas situaciones darán significado a los símbolos anteriores.

Sea F una función continua en $[a; t]$ para todo número $t > a$. Sabemos, por el teorema 1 del capítulo 5 que $\int_a^t F(x) dx$ existe. Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t F(x) dx$ existe, designaremos a este límite como la **integral generalizada de F en $[a; +\infty)$** y la representaremos por $\int_a^{+\infty} F(x) dx$:

$$\int_a^{+\infty} F(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t F(x) dx. \quad (19)$$

Si la función F es continua en $[t; b]$ para cada $t < b$, y si $\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b F(x) dx$ existe, designaremos a este límite como la **integral generalizada de F en $(-\infty; b]$** y la representaremos por $\int_{-\infty}^b F(x) dx$:

$$\int_{-\infty}^b F(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b F(x) dx. \quad (20)$$

Si F es continua en todo intervalo finito y si ambas integrales generalizadas

$\int_{-\infty}^a F(x) dx$ e $\int_0^{+\infty} F(x) dx$ existen, su suma se llama **integral generalizada de F en \mathbb{R}** , y se presenta por $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = \int_{-\infty}^0 F(x) dx + \int_0^{+\infty} F(x) dx,$$

ó

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \int_{t_1}^0 F(x) dx + \lim_{t_2 \rightarrow +\infty} \int_0^{t_2} F(x) dx. \quad (21)$$

Ejemplo 1. Calcule $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$; ó demuestre que está indefinida.

Solución. Observe que si $F(x) = \frac{1}{x^2}$, entonces F es continua en $[2; t]$ y

$$\int_2^t F(x) dx = \int_2^t \frac{dx}{x^2} = \int_2^t x^{-2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_2^t = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}$$

Ahora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t F(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Por tanto,

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 2. Calcule $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$; ó demuestre que está indefinida.

Solución. Observe que si $F(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$; entonces F es continua en $[1; t]$ e

$$\int_1^t \frac{dx}{x^{3/2}} = \int_1^t x^{-3/2} dx = \left[-2x^{-1/2} \right]_1^t = 2 - 2t^{-1/2}.$$

$(2 - 2t^{-1/2}) \rightarrow +\infty$ cuando $t \rightarrow +\infty$, entonces $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{dx}{x^{3/2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (2 - 2t^{-1/2})$

no existe e $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ no está definida

A los resultados de los ejemplos 1 y 2 se les pueden dar interpretaciones geométricas. En el ejemplo 1, $F(x) = 1/x^2$. Observe que $F(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$ y $F(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow +\infty$. Por tanto, la línea con ecuación $x=0$ (el eje y) es una asíntota vertical de la gráfica de F . Además, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$. Entonces vemos que la línea con ecuación $y=0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de la gráfica de F . Esta gráfica se muestra en la Fig. 13.3.

Ya que $\int_2^t F(x) dx = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}$ es el área A de la región limitada superiormente

por la gráfica de F , por la izquierda por la gráfica de $x=2$, a la derecha por la gráfica de $x=t$, e inferiormente por el eje x , y ya que hemos encontrado que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t F(x) dx = \frac{1}{2},$$

tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} A = \frac{1}{2}.$$

En el ejemplo 2, $F(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$. Observe que $F(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$, entonces el eje y es una asíntota vertical. También, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$, y en consecuencia el eje x es una asíntota horizontal. La gráfica de F se muestra en la Fig. 13.4. Aquí $\int_1^t \frac{dx}{x^{3/2}}$ es el área A de la región limitada superiormente por la gráfica de F , a la izquierda por la gráfica de $x=1$, a la derecha por la gráfica de $x=t$, e inferiormente por el eje x . Sin embargo, en contraste con el ejemplo 1, $\lim_{t \rightarrow +\infty} A$ no existe, más bien $A \rightarrow +\infty$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Esto es, en este caso el área A tiende a infinito cuando t tiende a infinito.

Ejemplo 3. Calcule $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ ó demuestre que es indefinida.

Solución. Observe que si $F(x) = \frac{1}{1+x^2}$, entonces F es continua en cualquier intervalo finito cerrado es

$$\int_{t_1}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{t_1}^0 = -\arctan t_1, \quad t_1 \in (-\infty; 0];$$

$$\int_0^{t_2} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^{t_2} = \arctan t_2, \quad t_2 \in [0; +\infty).$$

Ahora

$$\lim_{t_1 \rightarrow -\infty} (-\arctan t_1) = -\lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \arctan t_1 = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{t_2 \rightarrow +\infty} \arctan t_2 = \frac{\pi}{2};$$

Por tanto, por (21)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Sea F una función que es continua en todo intervalo $[a; t]$ donde $a < t < b$.

Si $|F(x)| \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow b^-$ y si $\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t F(x) dx$ existe, designaremos a este

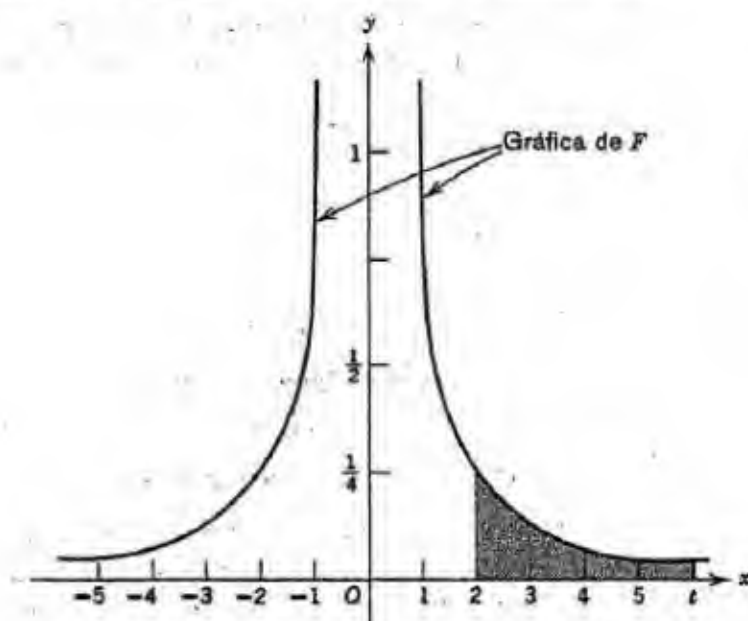


Fig. 13.3

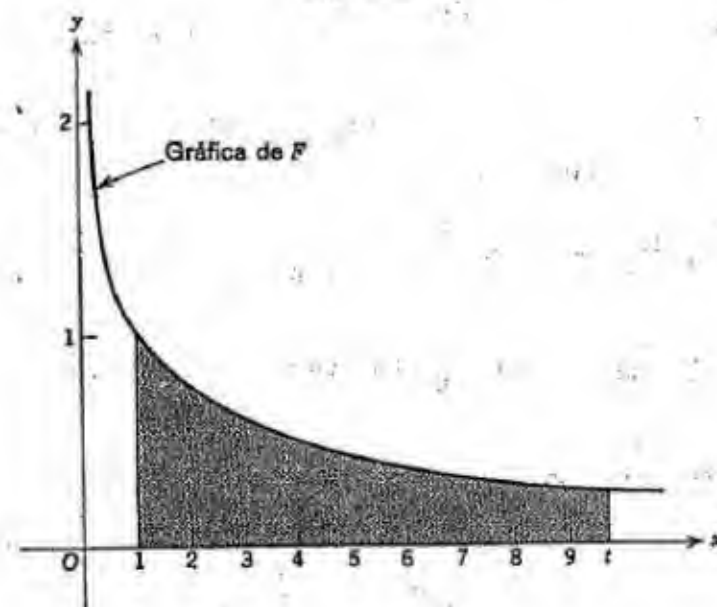


Fig. 13.4

límite como la integral generalizada de F en $[a; b]$ y la representaremos por

$$\int_a^b F(x) dx:$$

$$\int_a^b F(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t F(x) dx. \quad (22)$$

Sea F una función continua en todo intervalo $[t; b]$ donde $a < t < b$. Si $|F(x)| \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow a^+$ y si $\lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b F(x) dx$ existe, designaremos a este límite como la **integral generalizada de F en $[a; b]$** y la representaremos por $\int_a^b F(x) dx$:

$$\int_a^b F(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b F(x) dx. \quad (23)$$

Supongamos que c es un número tal que $a < c < b$ y $|F(x)| \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow c$. Si las integrales generalizadas $\int_a^c F(x) dx$ e $\int_c^b F(x) dx$ existen, entonces su suma se llama **integral generalizada de F en $[a; b]$** y se representa por $\int_a^b F(x) dx$:

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^c F(x) dx + \int_c^b F(x) dx,$$

ó

$$\int_a^b F(x) dx = \lim_{t_1 \rightarrow c^-} \int_a^{t_1} F(x) dx + \lim_{t_2 \rightarrow c^+} \int_{t_2}^b F(x) dx. \quad (24)$$

Note que en (22), (23) y (24) el símbolo $\int_a^b F(x) dx$ se usa para la integral generalizada de cada uno de los tres casos; aunque esté el mismo símbolo que usamos para la integral definida introducida en la Sec. 5.4, las integrales definidas en (22), (23) y (24) son diferentes de la integral definida de la Sec. 5.4. Sin

embargo cuando encontremos el símbolo $\int_a^b F(x) dx$, para a , b y F dados, deberemos examinar el comportamiento de $F(x)$ en $[a; b]$. Si $|F(x)| \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow a^+$ ó cuando $x \rightarrow b^-$, ó cuando $x \rightarrow c$ para $c \in (a; b)$, entonces debemos usar una de las definiciones (22), (23) ó (24) para determinar si $\int_a^b F(x) dx$ tiene un valor.

Ejemplo 4. Calcule $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, o demuestre que es indefinida.

Solución. Sea $F(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$: Note que F es continua en $[0; 1)$ y que $F(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow 1^-$. Además note que

$$\int_0^t F(x) dx = \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen x \Big|_0^t = \arcsen t, \quad t \in [0; 1).$$

Ahora bien

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \arcsen t = \frac{\pi}{2}:$$

Por tanto

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Ejemplo 5. Calcule $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^2}$, ó demuestre que es indefinida.

Solución. Sea $F(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. Observe que F es continua en $[0; 1)$, que $F(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow 1^-$, y que además

$$\int_0^t F(x) dx = \int_0^t \frac{dx}{(1-x)^2} = \left[\frac{1}{1-x} \right]_0^t = \frac{1}{1-t} - 1.$$

Pero $\left[\frac{1}{1-t} - 1 \right] \rightarrow +\infty$ cuando $t \rightarrow 1^-$, así que $\lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{dx}{(1-x)^2} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \left[\frac{1}{1-t} - 1 \right]$ no existe, e $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^2}$ no está definida.



Fig. 13.5

inferiormente por el eje x , y ya que encontramos que $\lim_{t \rightarrow 1^-} (\arcsen t) = \pi/2$, tenemos $\lim_{t \rightarrow 1^-} A = \pi/2$.

En el ejemplo 5, $F(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$: Observe que $F(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow 1^-$, así que la gráfica de $x = 1$ es una asíntota vertical. La gráfica de

$$F = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{1}{(1-x)^2} \right\} \quad \text{para } x \in [0; 1)$$

A los resultados de los ejemplos 4 y 5 se les puede dar interpretación geométrica. En el ejemplo 4, $F(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Observe que $F(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow 1^-$, entonces la línea con ecuación $x = 1$ es una asíntota vertical. La gráfica de

$$F = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right\}$$

para $x \in [0; 1)$

se muestra en la Fig. 13.6. Como $\int_0^t F(x) dx = \arcsen t$ es el área A de la región limitada superiormente por la gráfica de F , por la izquierda por el eje y , por la derecha por la gráfica de $x = t$, e

se muestra en la Fig. 13.6. En este caso $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^2}$ es el área de la región limitada superiormente por la gráfica de F , por la izquierda por el eje y , por la derecha

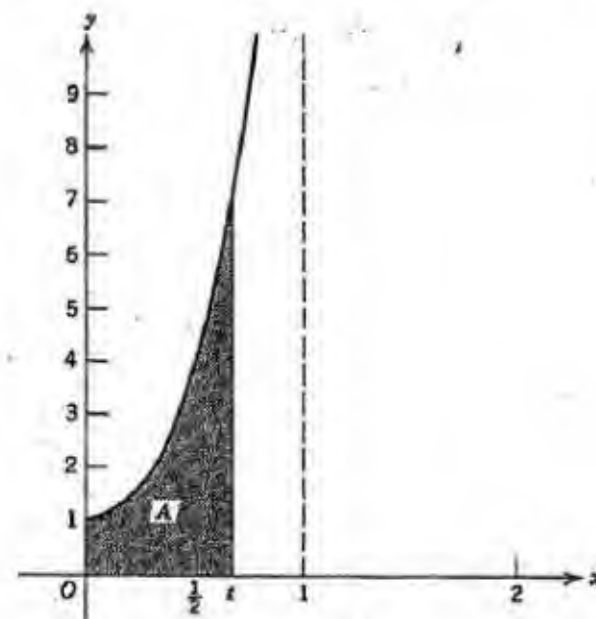


Fig. 13.6

por la gráfica de $x = t$, e inferiormente por el eje x . Sin embargo, en contraste al ejemplo 4, $\lim A$ no existe aquí; más bien $A \rightarrow +\infty$ cuando $t \rightarrow 1^-$. Esto es, en este caso el área A tiende a infinito cuando t tienda a 1 por la izquierda.

Ejemplo 6. Calcule $\int_2^4 \frac{dx}{(x-3)^{2/3}}$; o demuestre que no está definida.

Solución. Observamos que si $F(x) = \frac{1}{(x-3)^{2/3}}$; entonces F es discontinua en 3 y $F(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow 3$; además

$$\int_2^{t_1} \frac{dx}{(x-3)^{2/3}} = 3(x-3)^{1/3} \Big|_2^{t_1} = 3(t_1-3)^{1/3} + 3, \quad t_1 \in (2; 3);$$

$$\int_{t_2}^4 \frac{dx}{(x-3)^{2/3}} = 3(x-3)^{1/3} \Big|_{t_2}^4 = 3 - 3(t_2-3)^{1/3}, \quad t_2 \in (3; 4).$$

Vemos que

$$\lim_{t_1 \rightarrow 3^-} \int_2^{t_1} \frac{dx}{(x-3)^{2/3}} = \lim_{t_1 \rightarrow 3^-} [3(t_1-3)^{1/3} + 3] = 3$$

$$\lim_{t_2 \rightarrow 3^+} \int_{t_2}^4 \frac{dx}{(x-3)^{2/3}} = \lim_{t_2 \rightarrow 3^+} [3 - 3(t_2-3)^{1/3}] = 3.$$

Por tanto, por (24) tenemos

$$\int_2^3 \frac{dx}{(x-3)^{2/3}} = 3 + 3 = 6.$$

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 24 calcule la integral dada, o demuestre que es indefinida.

1. $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx.$

3. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}.$

5. $\int_{-\infty}^4 e^x dx.$

7. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}.$

9. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}.$

11. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}.$

13. $\int_0^2 \frac{2x}{(x^2-1)^{3/2}} dx.$

15. $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$

17. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - a^2}.$

19. $\int_0^a \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$

21. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{x dx}{(3+x^2)^{3/2}}.$

23. $\int_0^2 \frac{dx}{(2-x)^{1/2}}.$

25. Dé una interpretación geométrica del resultado del ejemplo 3.

26. Dé una interpretación geométrica del resultado del ejemplo 6.

27. Demuestre que cada una de las siguientes expresiones es indefinida $\int_a^{+\infty} \cos x dx$, $\int_{-\infty}^b \cos x dx$, e $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x dx$.

28. Dé una interpretación geométrica del resultado del ejercicio 11.

29. Encuentre $\pi \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ y relaciónelo con el volumen de una superficie de revolución.

30. Calcule $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^3 dx}{x^2 + a^2}$ si está definida. Si esta expresión tiene un valor, asócielo con el área limitada superiormente por la gráfica de $y = a^3/(x^2 + a^2)$.

2. $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2}.$

4. $\int_{-\infty}^2 e^{x^2} dx.$

6. $\int_0^{+\infty} e^x dx.$

8. $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}.$

10. $\int_0^2 \frac{dx}{2-x}.$

12. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{2/3}}.$

14. $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$

16. $\int_0^1 \ln x dx.$

18. $\int_0^{\pi/2} \tan \theta d\theta.$

20. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3}.$

22. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2+x}}.$

24. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$

31. Demuestre que la expresión $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^k}$, donde $a < b$, tiene un valor para $k < 1$ y es indefinida para $k \geq 1$.

32. Demuestre que $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = 2$.

33. (a) Encuentre una expresión para el área A (en función de t) de la región R limitada superiormente por la gráfica de $y = 1/x$, por la izquierda por la gráfica de $x = 1$, por la derecha por la gráfica de $x = t$ ($t > 1$) e inferiormente por el eje x .

(b) ¿Existe $\lim_{t \rightarrow +\infty} A$? Si existe, ¿cuál es su valor?

(c) Encuentre una expresión para el volumen V (en términos de t) del sólido generado al girar la región R de (a) alrededor del eje x .

(d) ¿Existe $\lim_{t \rightarrow +\infty} V$? Si existe, ¿cuál es su valor?

34. (a) Encuentre una expresión para el área A de la región R limitada superiormente por la gráfica de $y = e^{-x}$, por la izquierda por el eje y , por la derecha por la gráfica de $x = t$, e inferiormente por el eje x .

(b) ¿Existe $\lim_{t \rightarrow +\infty} A$? Si existe, ¿cuál es su valor?

(c) Encuentre una expresión para el volumen V del sólido generado al girar la región R de (a) alrededor del eje x .

(d) ¿Existe $\lim_{t \rightarrow +\infty} V$? Si existe, ¿cuál es su valor?

35. Demuestre que $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a}$ donde $a > 0$.

36. Demuestre que $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a^2}.$

37. Use coordenadas rectangulares para encontrar la longitud total de la curva con ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Sugerencia: La parte de esta curva C que está en el primero y segundo cuadrantes tiene una gráfica semejante a la gráfica de la Fig. 8.39. La longitud total de C es cuatro veces la longitud L del arco en el primer cuadrante, donde $L = a^{1/3} \int_0^a x^{-1/3} dx$. Note que esta integral es una integral generalizada en $[0; a]$.

Por tanto $L = a^{1/3} \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^a x^{-1/3} dx$.

38. Encuentre el centroide de la curva que es la gráfica de $\{(x, y) \mid x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, 0 \leq x \leq a\}$.

39. Demuestre el siguiente teorema: Sea F una función que es continua en todo intervalo $[a; t]$ donde $a < t < b$, y supongamos que $|F(x)| \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow b^-$. Si existe una función G con las propiedades de que (i) $G'(x) = F(x)$ para $x \in [a; b)$ y (ii) G es continua en $[a; b]$, entonces la integral generalizada $\int_a^b F(x) dx$ de F en $[a; b]$ existe e

$$\int_a^b F(x) dx = G(b) - G(a).$$

40. Use el teorema del ejercicio 39 para encontrar la longitud de la gráfica de $y = \sqrt{16 - x^2}$, $x \in [-4; 4]$.

13.6 Integrales curvilíneas. En el capítulo 5, encontramos por primera vez la integral definida, definimos la integral de una función de una variable independiente en un intervalo finito cerrado. Después generalizamos este concepto básico de varias maneras. La definición se extendió a funciones de dos variables independientes en una región cerrada y acotada en el espacio 2, después a funciones de tres variables independientes en una región cerrada y acotada en el espacio 3. En la sección anterior el concepto de integral se generaliza para funciones de una variable independiente en intervalos no finitos. En esta sección discutiremos una generalización más, la cual se denomina integral curvilínea, y extiende el concepto de integral a una función de dos variables independientes sobre una curva en el espacio-2.

Para discutir esta generalización es útil definir cierto tipo de curvas.

La gráfica del sistema

$$x = U(t), \quad y = V(t) \quad t \in [t_1; t_2],$$

donde U' y V' son continuas en $[t_1; t_2]$ y $[U'(t)]^2 + [V'(t)]^2 \neq 0$ para $t \in [t_1; t_2]$ se llama **arco regular** con la representación paramétrica anterior, entonces en cualquier punto de C_1 existen una (o ambas) de las derivadas

$$D_y y = \frac{V'(t)}{U'(t)} = Q_1(t)$$

ó

$$D_x x = \frac{U'(t)}{V'(t)} = Q_2(t).$$

Por tanto, hay una línea tangente a C_1 en cada uno de sus puntos (Sec. 8.2). Para

cualquier $t_3 \in [t_1; t_2]$ al menos una de las funciones Q_1 ó Q_2 es continua en t_3 . La interpretación geométrica de esta proposición es que cuando un punto p se mueve sobre un arco regular C_1 , la tangente a C_1 en p gira en forma continua. Describiremos esta situación diciendo que un arco regular es **uniforme**.

Una **curva regular** C es una curva que consiste de un número finito de arcos regulares unidos sucesivamente extremo con extremo. Una curva regular C es **uniforme por tramos** si está formada por un número finito de arcos uniformes, esto es, un número finito de arcos en cada uno de los cuales la tangente gira en forma continua. Una curva regular C puede no tener tangente que gire en forma continua en un punto de unión de dos de sus componentes. La gráfica de una curva regular C , que consiste de los arcos regulares, $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ y C_7 se muestra en la Fig. 13.7. La curva C tiene tangente que gira en forma continua en cada punto excepto en p_1 (donde se unen C_1 y C_2) en p_2 (donde se unen C_2 y C_3) y en p_4 (donde se unen C_4 y C_5).

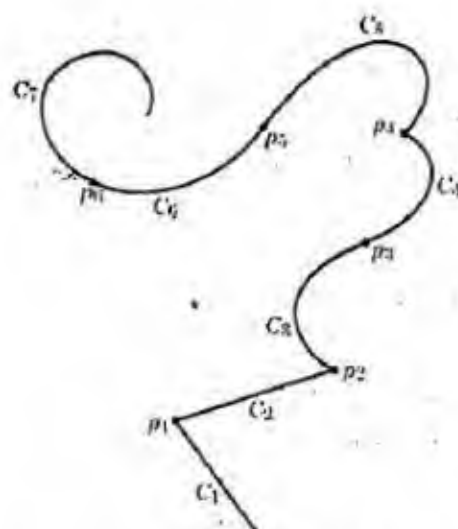


Fig. 13.7

Sea $P = \{(x, y; z) \mid z = P(x, y)\}$ una función* de dos variables independientes cuyo dominio contiene una región cerrada R , y sea C una curva continua rectificable en R para la cual

$$x = U(t), \quad y = V(t), \quad t \in [t_1; t_2], \quad (25)$$

es una representación paramétrica. Los puntos de C están ordenados, $A[U(t_1), V(t_1)]$ el primero y $B[U(t_2), V(t_2)]$ el último. Sea

$$\{A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1}), A_i(x_i, y_i), \dots, A_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})\}$$

un conjunto de $n-1$ puntos de C ordenados entre A y B como se muestra en la Fig. 13.8, con esto la curva C queda dividida en n subcurvas a las que designa

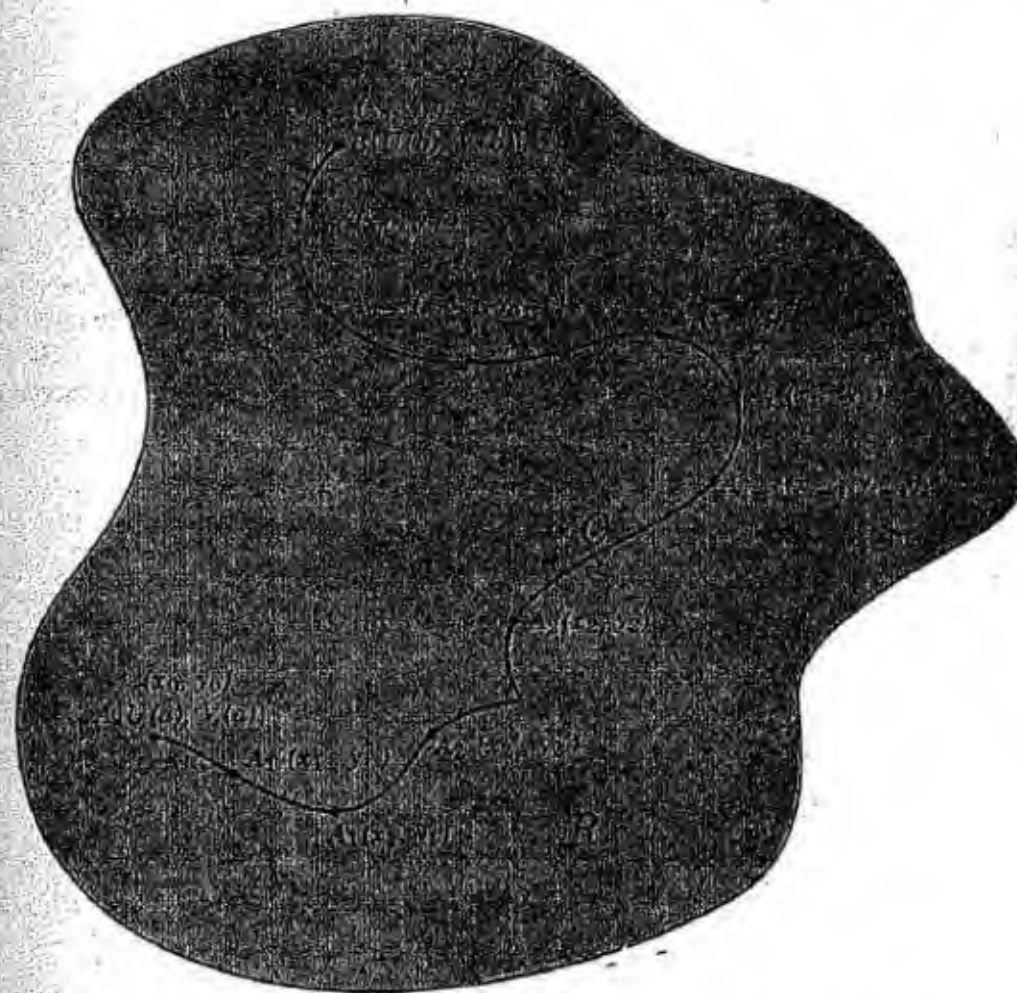


Fig. 13.8

*El estudiante debe tener presente que en esta sección y en la siguiente usamos $P(x, y)$ para representar la correspondiente de (x, y) bajo la función P , y $Q(x, y)$ para representar la correspondiente de (x, y) bajo la función Q . Esto contrasta con la representación usual de puntos con la notación $P(x, y)$ y $Q(x, y)$.

remos por $C_1, C_2, \dots, C_i, \dots, C_n$. Seleccionemos un punto de cada subcurva y sea $A_i'(x_i', y_i')$ el punto seleccionado en la subcurva C_i . Hagamos $x_0 = U(t_1), y_0 = V(t_1), x_n = U(t_2), y_n = V(t_2), \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, y formemos las sumas

$$\sum_{i=1}^n P(x_i', y_i') \Delta x_i \quad (26)$$

y

$$\sum_{i=1}^n P(x_i', y_i') \Delta y_i. \quad (27)$$

Supongamos que existen números I_x e I_y con la propiedad de que dado $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^n P(x_i', y_i') \Delta x_i - I_x \right| < \varepsilon$$

y

$$\left| \sum_{i=1}^n P(x_i', y_i') \Delta y_i - I_y \right| < \varepsilon$$

para todas las subdivisiones de C y para todas las selecciones de puntos (x_i', y_i') que satisfagan la condición de que la longitud máxima de la subcurva de C sea menor que δ . Entonces

I_x es la integral curvilínea de $P(x, y)$ con respecto a x sobre la curva C de A a B .

I_y es la integral curvilínea de $P(x, y)$ con respecto a y sobre la curva C de A a B .

Si la integral I_x existe, la representaremos por

$$I_x = \int_a^b P(x, y) dx$$

y análogamente si la integral I_y existe, la representaremos por

$$I_y = \int_a^b P(x, y) dy.$$

El teorema 18, que se establece sin demostración, es un teorema básico sobre la existencia de integrales curvilíneas.

Teorema 18. Si C es una curva regular y si $P = \{(x, y; z) \mid z = P(x, y)\}$ es una función que es continua en alguna región cerrada R que contenga a C , entonces las integrales curvilíneas

$$\int_a^b P(x, y) dx \quad \text{e} \quad \int_a^b P(x, y) dy$$

existen.

Los teoremas 19, 20 y 21 se deducen directamente de las definiciones de I_x e I_y .

Teorema 19. Si C es un segmento de línea paralelo al eje y , entonces

$$\int_a^b P(x, y) dx = 0.$$

Teorema 20. Si C es un segmento de línea paralelo al eje x , entonces

$$\int_a^b P(x, y) dy = 0.$$

Teorema 21. Si $\int_a^b P(x, y) dx$ e $\int_a^b P(x, y) dy$ existen, entonces

$$\int_a^b P(x, y) dx = - \int_a^b P(x, y) dx$$

$$\int_a^b P(x, y) dy = - \int_a^b P(x, y) dy.$$

El teorema 22, que se establece sin demostración, es útil para el cálculo de integrales curvilíneas.

Teorema 22. Sea $P = \{(x, y; z) \mid z = P(x, y)\}$ una función, C_1 una curva que una los puntos D y E , y C_2 una curva que una E y F . Si $\int_{C_1} P(x, y) dx$ e

$\int_{C_2} P(x, y) dx$ existen, entonces

$$\int_{C_1 \cup C_2} P(x, y) dx = \int_{C_1} P(x, y) dx + \int_{C_2} P(x, y) dx.$$

Un teorema semejante se verifica para $\int_{C_1 \cup C_2} P(x, y) dy$.

Si C es un arco regular con representación paramétrica (25) y si la función P es continua en una región R que contenga a C , se puede demostrar usando las

sumas (26) y (27), que $\int_a^b P(x, y) dx$ e $\int_a^b P(x, y) dy$ existen, y que

$$\int_a^b P(x, y) dx = \int_{t_1}^{t_2} P[U(t), V(t)] U'(t) dt, \quad (28)$$

$$\int_a^b P(x, y) dy = \int_{t_1}^{t_2} P[U(t), V(t)] V'(t) dt. \quad (29)$$

Se le pide al estudiante que demuestre la expresión (28) en el ejercicio 13 de esta sección.

Por lo anterior se ve que, el cálculo de una integral curvilínea de una función continua de dos variables independientes sobre un arco regular se reduce al cálculo de una integral definida de una función de una variable independiente en un intervalo.

Como una curva regular se forma con un número finito de arcos regulares unidos por los extremos sucesivamente, se deduce de las igualdades (28) y (29) y el teorema 22, que el valor de una integral curvilínea sobre una curva regular se puede expresar como una suma de integrales definidas.

entonces (28) y (29) se transforma en

$$\int_C^{A, B} P(x, y) dx = \int_c^d P[H(y), y] H'(y) dy \quad (32)$$

existan, es usual expresar la suma de estas dos integrales curvilíneas como una simple integral curvilínea:

$$\int_a^b P(x, y) dx + \int_a^b Q(x, y) dy = \int_a^b [P(x, y) dx + Q(x, y) dy]. \quad (34)$$

En las aplicaciones de las integrales curvilíneas, las integrales se expresan muy a menudo en la forma del segundo miembro de la ecuación (34).

Si C es un arco regular con la representación paramétrica (25), entonces por las ecuaciones (28), (29) y (34) se deduce que

$$\int_a^b [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = \int_{t_1}^{t_2} [P[U(t), V(t)]U'(t) + Q[U(t), V(t)]V'(t)] dt. \quad (35)$$

Si C tiene la representación paramétrica

$$x = x, \quad y = G(x), \quad x \in [a; b],$$

entonces (35) se transforma en

$$\int_a^b [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = \int_a^b [P[x, G(x)] + Q[x, G(x)]G'(x)] dx. \quad (36)$$

En forma semejante, si C tiene la representación paramétrica

$$x = H(y), \quad y = y, \quad y \in [c; d],$$

entonces (35) se transforma en

$$\int_a^b [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = \int_c^d [P[H(y), y]H'(y) + Q[H(y), y]] dy. \quad (37)$$

Ejemplo 5. Calcule $\int_a^b [(x+y) dx + x^2 dy]$ donde:

(a) C es la parte de la parábola con ecuación $y = x^2$ entre los puntos $A(0, 0)$ y $B(1, 1)$.

(b) C es la parte de la gráfica de $y = x^3$ entre los puntos $A(0, 0)$ y $B(1, 1)$.

Solución. (a) Al usar (36) tenemos para $y = G(x) = x^2$,

$$\int_a^b [(x+y) dx + x^2 dy] = \int_0^1 [x + x^2 + x^2(2x)] dx = \int_0^1 (x + x^2 + 2x^3) dx = \frac{4}{3}.$$

(b) En forma semejante, para $y = x^3$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b [(x+y) dx + x^2 dy] &= \int_0^1 [x + x^3 + x^2(3x^2)] dx = \\ &= \int_0^1 (x + x^3 + 3x^4) dx = \frac{27}{10}. \end{aligned}$$

Ejemplo 6. Calcule $\int_a^b [3x^2 + 6xy] dx + (3x^2 - y^2) dy]$ donde:

(a) C es la parte de la parábola con ecuación $y = 2x^2$ entre los puntos $A(0, 0)$ y $B(1, 2)$.

(b) C es la parte de la gráfica de $y = 2x$ entre los puntos $A(0, 0)$ y $B(1, 2)$.

Solución. (a) para $y = 2x^2$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b [(3x^2 + 6xy) dx + (3x^2 - y^2) dy] &= \int_0^1 (3x^2 + 24x^3 - 32x^7) dx \\ &= [x^3 + 6x^4 - 4x^8]_0^1 = 3. \end{aligned}$$

(b) Para $y = 2x$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b [(3x^2 + 6xy) dx + (3x^2 - y^2) dy] &= \int_0^1 (21x^2 - 16x^3) dx = \\ &= [7x^3 - 4x^4]_0^1 = 3. \end{aligned}$$

Note en el ejemplo 5, que la integral curvilínea de la forma

$$\int_a^b [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] \quad (38)$$

tiene dos valores diferentes para dos curvas que unen los mismos puntos $A(0, 0)$ y $B(1, 1)$. Además, en el ejemplo 6 la integral curvilínea de la forma (38) tiene el mismo valor para cada una de las dos curvas que unen los puntos $A(0, 0)$ y $B(1, 2)$. El teorema 26 de la siguiente sección establece las condiciones para que una integral curvilínea de la forma (38) sea independiente de la curva C que une los puntos A y B . Una de las condiciones es que $P_y(x, y) = Q_x(x, y)$ en la región R . Observe en el ejemplo 5 que $P_y(x, y) = 1$ y $Q_x(x, y) = 2x$ sin embargo en el ejemplo 6 $P_y(x, y) = 6x$ y $Q_x(x, y) = 6x$.

Supongamos que R sea una región cerrada y acotada. Si un punto p se mueve sobre la frontera de R , en tal forma que la región R esté a la izquierda, se dice que p recorre la frontera de R en *sentido positivo*. Si un punto P se mueve sobre la frontera de R de tal manera que la región R esté a la derecha, el punto recorre la frontera de R en *sentido negativo*.

Si una curva cerrada simple C es la frontera de una región cerrada y acotada R , y si se calcula una integral curvilínea sobre la curva cerrada C en el sentido positivo de R , esta integral la representaremos como

$$\oint_C [P(x, y) dx + Q(x, y) dy].$$

Si la integral se calcula sobre la curva cerrada C en el sentido negativo de R entonces la representaremos por

$$\oint_C^- [P(x, y) dx + Q(x, y) dy].$$

Es evidente que

$$\oint_C [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = - \oint_C [P(x, y) dx + Q(x, y) dy].$$

Ejemplo 7. Sea C la gráfica de $x^2 + y^2 = a^2$. Calcule cada una de las siguientes integrales curvilíneas:

$$(a) \oint_C (y dx + x dy); \quad (b) \oint_C (y dx - x dy).$$

Solución. Usaremos la representación paramétrica

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad t \in [0; 2\pi]$$

para la curva C . Note que si deseamos integrar sobre C en sentido negativo, debemos usar

$$x = a \cos t, \quad y = -a \sin t, \quad t \in [0; 2\pi].$$

(a) Tenemos

$$\begin{aligned} \oint_C (y dx + x dy) &= \int_0^{2\pi} [(a \sin t)(-a \sin t) + (a \cos t)(a \cos t)] dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin^2 t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} \cos 2t dt = 0. \end{aligned}$$

(b) Aquí

$$\begin{aligned} \oint_C (y dx - x dy) &= \int_0^{2\pi} [(a \sin t)(-a \sin t) - (a \cos t)(a \cos t)] dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (-1) dt = -2\pi a^2. \end{aligned}$$

EJERCICIOS

$$1. \text{ Calcule } \int_C (x^2 dx - xy dy) \text{ para } A(0, 0) \text{ y } B(1, 1).$$

(a) donde C es un segmento de la gráfica de $y = x$.

(b) donde C es un arco de la gráfica de $y = \sqrt{x}$;

(c) donde C está formada por un segmento de la gráfica de $x = 1$, y un segmento del eje x .

$$2. \text{ Calcule } \int_C (y^2 dx + x dy) \text{ para } A(2, 1) \text{ y } D(6, 3).$$

(a) donde C es el segmento de la recta AD ;

(b) donde C está formada por los segmentos de recta AE y ED , y E es (6, 1).

$$3. \text{ Calcule } \int_C [(x + 2y) dx + xy dy] \text{ para } A(0, 0) \text{ y } B(1, -1).$$

(a) donde C es un arco de la gráfica de $y = -x^2$.

(b) donde C es un arco de la gráfica de $x = t^2, y = t^3$.

$$4. \text{ Calcule } \int_C (x + y) dx \text{ para } A(1, 0) \text{ y } B(0, 1).$$

(a) donde C es un arco de la gráfica de $x = \cos t, y = \sin t$;

(b) donde C está formada por los segmentos de recta AO y OB , y O es el origen.

$$5. \text{ Calcule } \int_C [(x + y) dx + (x - y) dy].$$

(a) donde C es la curva del ejercicio 4(a);

(b) donde C es la curva del ejercicio 4(b).

$$6. \text{ Calcule } \int_C [(x^2 + 2xy) dx + (x^2 - y) dy] \text{ donde}$$

(a) C es la gráfica de $x = t^2, y = 2t^2, t \in [0; 1]$;

(b) C es la gráfica de $x = \sin t, y = 1 - \cos 2t, t \in [0; \pi/2]$.

$$7. \text{ Calcule } \int_C [(x - y^2) dx + 2xy dy] \text{ para } A(0, 0) \text{ y } B(1, 1).$$

(a) donde C es un arco de la gráfica de $y = x$;

(b) donde C es un arco de la gráfica de $y = x^2$.

$$8. \text{ Calcule } \int_C [(2y^2 dx - 3xy dy)] \text{ para } A(0, 0) \text{ y } B(2, 4).$$

(a) donde C es un arco de la gráfica de $y = 2x$;

(b) donde C es un arco de la gráfica de $y = \sqrt{8x}$.

$$9. \text{ Calcule } \oint_C (4y dx + 2x dy) \text{ donde } C \text{ es la gráfica de } x = \cos t, y = \sin t, t \in [0; 2\pi].$$

$$10. \text{ Calcule } \oint_C (2y dx - 5x dy) \text{ donde } C \text{ es la gráfica de } x = 4 \cos t, y = 2 \sin t, t \in [0; 2\pi].$$

$$11. \text{ Calcule } \oint_C (3y dx + x dy) \text{ donde } C \text{ es la frontera del cuadrado con vértices en } (0, 0), (1, 0), (1, 1) \text{ y } (0, 1).$$

12. Sea R la región limitada por las gráficas de $x=0, y=0, y=\frac{1}{2}(x-4)^2$, y $y=\frac{1}{2}x+1$. Sea C la frontera de R , calcule

$$\oint_C [(x^2 + 2y) dx + (y - x) dy].$$

13. Demuestre la igualdad (28). *Sugerencia:* Haga $x_i = U(\bar{t}_i), y_i = V(\bar{t}_i), x'_i = U(t'_i), y'_i = V(t'_i)$ y use estos valores en la suma (26). Entonces use el teorema del valor medio para derivadas en la expresión $\Delta x_i = U(\bar{t}_i) - U(\bar{t}_{i-1})$, con lo que la suma (26) se transforma en

$$\sum_{i=1}^n P[U(t'_i), V(t'_i)] U'(\bar{t}_i) \Delta t_i$$

donde $\bar{t}_i \in [\bar{t}_{i-1}, \bar{t}_i], \Delta t_i = \bar{t}_i - \bar{t}_{i-1}$. Después use el teorema 10 de la Sec. 5.7

para demostrar que la integral del segundo miembro de (28) existe y que (28) es verdadera.

13.7 Teorema de Green. El siguiente teorema, que se conoce comúnmente como teorema de Green, establece las condiciones, bajo las cuales existe una relación entre una integral doble y una integral curvilínea.

Teorema 23. Sea R una región cerrada y acotada cuya frontera sea una curva simple cerrada regular C . Si $P = \{(x, y; z) \mid z = P(x, y)\}$ y $Q = \{(x, y; z) \mid z = Q(x, y)\}$ son funciones tales que P , Q , P_x y Q_y son continuas en R , entonces

$$\oint_C [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = \iint_R [Q_x(x, y) - P_y(x, y)] dA. \quad (39)$$

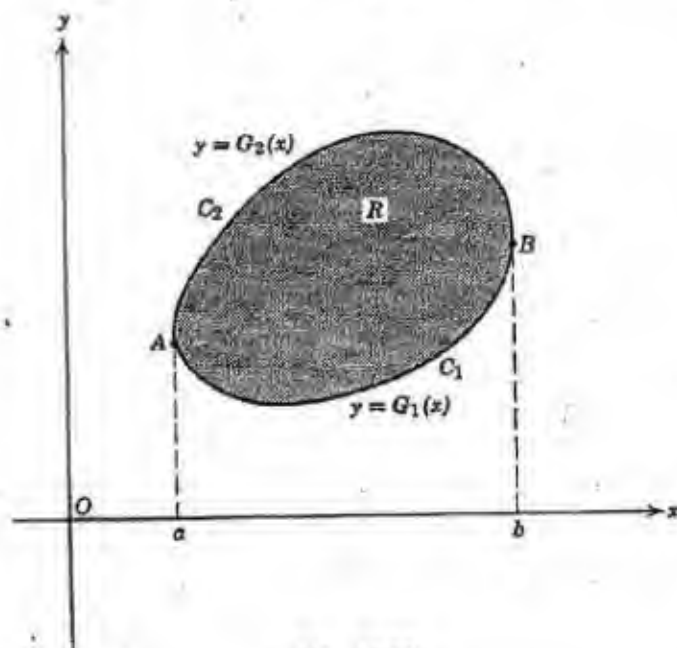


Fig. 13.10

Demostración. Solamente daremos la demostración para el caso en que R sea una región del tipo $T_{1,2}$ (vea Sec. 11.2) como la indicada en la Fig. 13.10. Sean C_1 y C_2 dos partes de C , como las indicadas en la figura. La parte C_1 es la gráfica de $y = G_1(x)$, $x \in [a; b]$ y C_2 es la gráfica de $y = G_2(x)$, $x \in [a; b]$. Por la igualdad entre integrales dobles e integrales iteradas (vea teorema 2 de la Sec. 11.3), tenemos

$$\begin{aligned} \iint_R P_y(x, y) dA &= \int_a^b \int_{G_1(x)}^{G_2(x)} P_y(x, y) dy dx \\ &= \int_a^b P[x, G_2(x)] dx - \int_a^b P[x, G_1(x)] dx. \end{aligned} \quad (40)$$

Además por el teorema 22, tenemos

$$\oint_{C_1} P(x, y) dx = \int_a^b P(x, y) dx + \int_b^a P(x, y) dx. \quad (41)$$

Pero

$$\int_a^b P(x, y) dx = \int_a^b P[x, G_1(x)] dx, \quad (42)$$

$$\int_b^a P(x, y) dx = - \int_a^b P(x, y) dx = - \int_a^b P[x, G_2(x)] dx. \quad (43)$$

Si combinamos (41), (42) y (43) obtenemos

$$\oint_C P(x, y) dx = \int_a^b P[x, G_1(x)] dx - \int_a^b P[x, G_2(x)] dx, \quad (44)$$

y entonces por (40) y (44) se deduce que

$$- \iint_R P_y(x, y) dA = \oint_C P(x, y) dx. \quad (45)$$

En forma semejante, si consideramos las dos partes de C como las gráficas de $x = H_1(y)$, $y \in [c; d]$ y $x = H_2(y)$, $y \in [c; d]$ respectivamente, podemos demostrar que

$$\iint_R Q_x(x, y) dA = \oint_C Q(x, y) dy. \quad (46)$$

Entonces la igualdad (39) se deduce de (45) y (46).

Si la región R no es del tipo $T_{1,2}$ pero es la unión de un número finito de regiones del tipo $T_{1,2}$, el teorema 23 se cumple todavía. ■

Del teorema de Green se deducen varios teoremas importantes.

Teorema 24. El área A de una región cerrada y acotada R cuya frontera es una curva simple regular C está dada por

$$A = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx). \quad (47)$$

Demostración. Sea $P(x, y) = -(y/2)$ y $Q(x, y) = x/2$. Entonces $P_y(x, y) = -1/2$ y $Q_x(x, y) = 1/2$; y por la igualdad (39) del teorema de Green obtenemos

$$\oint_C \left(-\frac{y}{2} dx + \frac{x}{2} dy \right) = \iint_R \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) dA,$$

$$\frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx) = \iint_R dA,$$

con lo cual el teorema queda demostrado. ■

Supongamos que la curva simple cerrada C del teorema 24 tiene la representación paramétrica.

$$x = U(t), \quad y = V(t), \quad t \in [t_1; t_2].$$

Como C es cerrada, los puntos $(U(t_1), V(t_1))$ y $(U(t_2), V(t_2))$ coinciden, y

$$U(t_1) = U(t_2) \quad \text{y} \quad V(t_1) = V(t_2).$$

Bajo estas condiciones la fórmula (47) se transforma en

$$A = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} [U(t)V'(t) - V(t)U'(t)] dt. \quad (48)$$

Ejemplo 1. Use (48) para encontrar el área A de la elipse con representación paramétrica $x = U(t) = a \cos t$, $y = V(t) = b \sin t$, $t \in [0; 2\pi]$.

Solución. $U'(t) = -a \sin t$, $V'(t) = b \cos t$, y al usar (48) obtenemos

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

Ejemplo 2. Encuentre el área A de la región limitada por la gráfica de $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $t \in [0; \pi/2]$ y la gráfica de $x + y = a$.

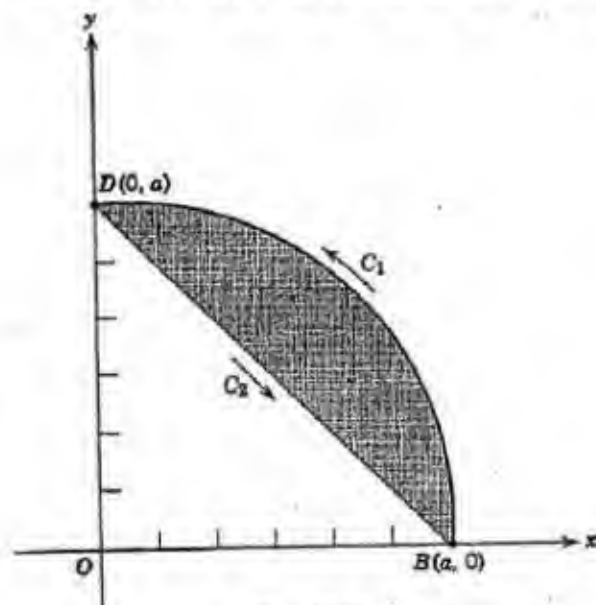


Fig. 13.11

Solución. La región cuya área se desea calcular es la parte sombreada de la Fig. 13.11. Por conveniencia dividiremos la frontera C en dos partes, el arco C_1 y el segmento de línea C_2 . Entonces

$$A = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_{C_1} (x dy - y dx) + \frac{1}{2} \int_{C_2} (x dy - y dx) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} a^2 dt + \frac{1}{2} \int_a^0 (-a dx) = \frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

El teorema de Green nos capacita para calcular una integral doble usando una integral curvilínea, o recíprocamente, una integral curvilínea usando una integral doble.

Ejemplo 3. Use el teorema de Green para encontrar $\oint_C [(2x - y) dx + (x + 3y) dy]$ donde C es la elipse con ecuación $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$.

Solución. Por el teorema de Green esto es, por la fórmula (39), tenemos

$$\oint_C [(2x - y) dx + (x + 3y) dy] = \iint_R (1 + 1) dA = 2 \iint_R dA,$$

donde R es la región cerrada limitada por la elipse C . Por el ejemplo 1, sabemos

que $2 \iint_R dA = 2\pi ab$. Por tanto

$$\oint_C [(2x - y) dx + (x + 3y) dy] = 2\pi ab.$$

Para establecer los teoremas 25, 26 y 27, necesitamos definir el concepto de región simplemente conexa. Una región se llama *simplemente conexa* si toda curva simple cerrada en la región contiene solamente puntos de dicha región. Si una región no es simplemente conexa, se dice que es *múltiple conexa*.

Ejemplos, el interior de un cuadrado es una región simplemente conexa, el interior de una elipse también es una región simplemente conexa. Generalizando, el interior de cualquier curva cerrada simple forma una región simplemente conexa. La región entre dos círculos concéntricos de radios r_1 y r_2 , $r_1 < r_2$ es un ejemplo de una región múltiple conexa. Una región con uno o mas "agujeros" es una región múltiple conexa.

Teorema 25. Si $P = \{(x, y; z) \mid z = P(x, y)\}$ y $Q = \{(x, y; z) \mid z = Q(x, y)\}$ son dos funciones tales que P , Q , P_y y Q_x son continuas en una región cerrada acotada y simplemente conexa R , entonces una condición necesaria y suficiente para que

$$\oint_C [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = 0 \quad (49)$$

sobre toda curva cerrada simple regular C contenida en R es que

$$P_y(x, y) = Q_x(x, y) \quad \text{para} \quad (x, y) \in R. \quad (50)$$

Demostración. Por el teorema 23 sabemos que, para cualquier curva cerrada

simple regular C contenida en R ,

$$\oint_C [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = \iint_{R_1} [Q_x(x, y) - P_y(x, y)] dA.$$

donde $R_1 \subseteq R$ es la región cuya frontera es C . Si la condición (50) se satisface, entonces la integral doble del segundo miembro de esta igualdad es cero, en consecuencia la integral curvilínea $\oint_C [P(x, y) dx + Q(x, y) dy]$ es cero. Por tanto queda establecida la condición suficiente de (50).

Para demostrar la condición necesaria de (50), supongamos que $Q_x(x, y) - P_y(x, y)$ es distinta de cero en algún punto interior $p(a, b)$ de R . Como Q_x y P_y son continuas en R , $Q_x - P_y$ es también continua en R . Por tanto, existe una región $R_2 \subseteq R$, limitada por una curva cerrada simple D , para la cual $p \in R_2$ y $Q_x(x, y) - P_y(x, y)$ tiene el mismo signo de $Q_x(a, b) - P_y(a, b)$ para $(x, y) \in R_2$. En consecuencia,

$$\oint_D [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = \iint_{R_2} [Q_x(x, y) - P_y(x, y)] dA \neq 0.$$

Esto contradice la hipótesis de que la integral curvilínea $\oint_C [P(x, y) dx + Q(x, y) dy]$ es cero sobre cada curva cerrada simple contenida en R . Por tanto, $Q_x(x, y) - P_y(x, y) = 0$, ó $P_y(x, y) = Q_x(x, y)$, para $(x, y) \in R$. ■

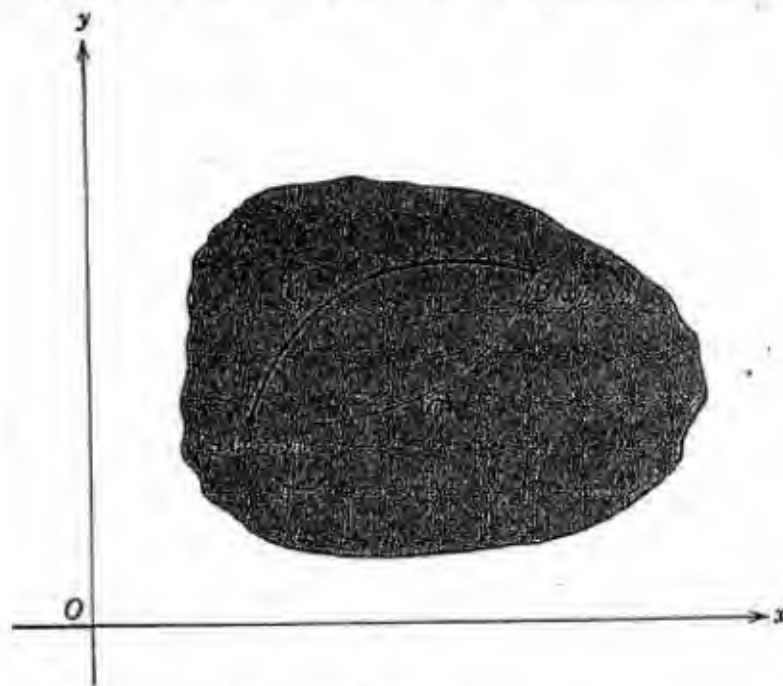


Fig. 13.12

Teorema 26. Sean P y Q dos funciones que satisfagan la hipótesis del teorema 25, y sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos puntos cualesquiera de una región simplemente conexa R . Entonces una condición necesaria y suficiente para que

$$\int_{C_1}^{A, B} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = \int_{C_2}^{A, B} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] \quad (51)$$

para todo par de curvas regulares C_1 y C_2 contenidas en R que unen A y B es que

$$P_y(x, y) = Q_x(x, y) \text{ para } (x, y) \in R. \quad (52)$$

Demostración. Para demostrar que (52) implica (51), consideraremos tres casos.

(i) C_1 está debajo de C_2 excepto en los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, como se indica en la Fig. 13.12. Sea C la unión de C_1 y C_2 . Por el teorema 25 sabemos que si $P_y(x, y) = Q_x(x, y)$ para $(x, y) \in R$, entonces

$$\oint_C [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = 0. \quad (53)$$

Como una consecuencia del teorema 22, tenemos

$$\int_{C_1}^{A, B} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] + \int_{C_2}^{B, A} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = 0,$$

ó

$$\int_{C_1}^{A, B} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] - \int_{C_2}^{A, B} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = 0,$$

con esto queda demostrada (51).

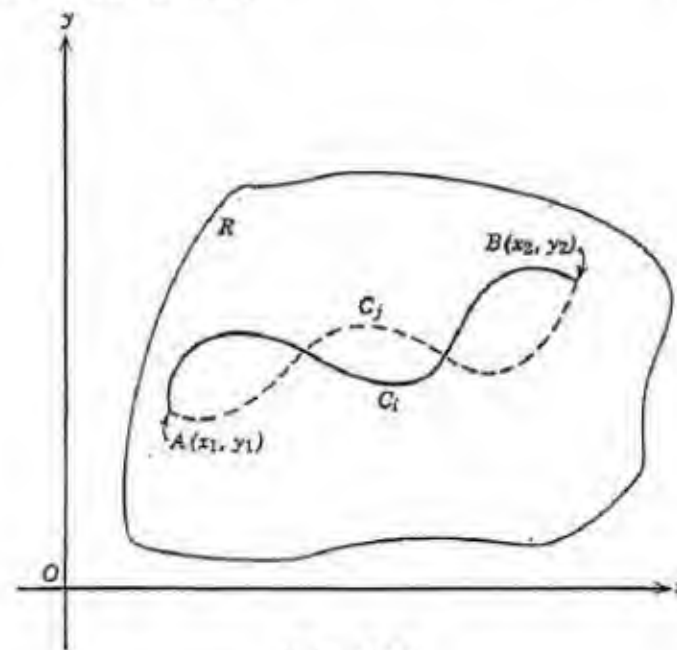


Fig. 13.13

(ii) Para la situación en que C_1 está arriba de C_2 , la demostración es semejante a la del caso (i).

(iii) Si C_1 y C_2 se intersectan en un número finito de puntos, C la unión de C_1 y C_2 no es una curva cerrada simple (vea Fig. 13.13), en este caso podemos considerar separadamente los pares de arcos C_1 y C_2 cuya unión forma una curva cerrada simple, y después aplicar lo deducido para el caso (i) o caso (ii).

Hemos demostrado que la condición (52) implica que (51) se verifica para cada par de curvas regulares C_1 y C_2 .

Necesitamos demostrar que (51) implica (52). Supongamos que (51) se satisface para todo par de curvas regulares C_1 y C_2 . Sea C cualquier curva cerrada simple regular contenida en R , y seleccionemos dos puntos A' y B' sobre C de tal manera que estos puntos dividan a C en dos arcos C_1 y C_2 . Entonces

$$\begin{aligned} \oint_C [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] \\ &= \int_{C_1}^{A', B'} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] + \int_{C_2}^{B', A'} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] \\ &= \int_{C_1}^{A', B'} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] - \int_{C_2}^{A', B'} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy]. \end{aligned}$$

Por (51) se deduce que esta diferencia es cero, entonces

$$\oint_C [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = 0$$

para cualquier curva cerrada simple regular C contenida en R . Por tanto, por el teorema 25, $P_y(x, y) = Q_x(x, y)$, para $(x, y) \in R$. ■

Enfatizamos que la región R de los teoremas 25 y 26 es una región simplemente conexa. Si R es una región múltiplemente conexa, los teoremas correspondientes no son en general ciertos. En una región múltiple conexa podemos tener una curva cerrada que contenga puntos que no pertenezcan a la región, y en uno de estos puntos $P_y(x, y)$ puede ser distinto de $Q_x(x, y)$ ó $P_y(x, y)$ y $Q_x(x, y)$ pueden no existir.

Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x, y)$ dos puntos de una región simplemente conexa R . Si $P = \{(u, v; z) \mid z = P(u, v)\}$ y $Q = \{(u, v; z) \mid z = Q(u, v)\}$ son funciones tales que P , Q , P_v y Q_u son continuas y además $P_v(u, v) = Q_u(u, v)$ en R , entonces por el teorema 26

$$\int_0^{A, B} [P(u, v) du + Q(u, v) dv]$$

tiene el mismo valor para cualquier curva regular C que esté en R . Por tanto, el valor de la integral depende solamente de la selección de los puntos A y B , y para un punto dado $A(x_1, y_1)$ existe una función

$$F = \{(x, y; z) \mid z = F(x, y), (x, y) \in R\}$$

tal que

$$F(x, y) = \int_0^{A, B} [P(u, v) du + Q(u, v) dv]$$

donde C es cualquier curva regular de R . En esta situación podemos escribir

$$F(x, y) = \int_{(x_1, y_1)}^{(x, y)} [P(u, v) du + Q(u, v) dv]. \quad (54)$$

Ejemplo 4. (a) Demuestre que para dos puntos A y B cualesquiera, el valor de la integral curvilínea

$$\int_C [(3u^2 - v^2) du - 2uv dv]$$

es independiente de la curva regular C .

(b) Encuentre una especificación para la función $F = \{(x, y; z) \mid z = F(x, y)\}$, que tenga la propiedad de que

$$F(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} [(3u^2 - v^2) du - 2uv dv].$$

Solución. (a) $P(u, v) = 3u^2 - v^2$ y $Q(u, v) = -2uv$, $P_v(u, v) = Q_u(u, v) = -2v$. Por tanto, como P , Q , P_v y Q_u son continuas en $Re \times Re$ y $P_v = Q_u$ para $(u, v) \in Re \times Re$, se deduce por el teorema 26 que para dos puntos A y B cualesquiera, el valor de la integral es independiente de la curva regular C que une los puntos A y B .

(b) Como podemos escoger cualquier curva C que una $A(0, 0)$ y $B(x, y)$, escogamos la curva C formada por el segmento C_1 del eje u determinado por $A(0, 0)$ y $D(x, 0)$ y el segmento C_2 de la recta con ecuación $u = x$ entre $D(x, 0)$ y $B(x, y)$ como se muestra en la Fig. 13.14. Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^{A, B} [(3u^2 - v^2) du - 2uv dv] &= \int_{C_1}^{A, B} [(3u^2 - v^2) du - 2uv dv] \\ &\quad + \int_{C_2}^{D, B} [(3u^2 - v^2) du - 2uv dv] \\ &= \int_0^x 3u^2 du + \int_0^y -2xv dv = x^3 - xy^2. \end{aligned}$$

Vemos que la función

$$F = \{(x, y; z) \mid z = x^3 - xy^2, (x, y) \in Re \times Re\}$$

es la que satisface las condiciones del problema.

Note en el ejemplo 4 que la función F , donde $F(x, y) = x^3 - xy^2$ tiene la propiedad de que

$$\begin{aligned} F_x(x, y) &= 3x^2 - y^2 = P(x, y) \\ F_y(x, y) &= -2xy = Q(x, y). \end{aligned}$$

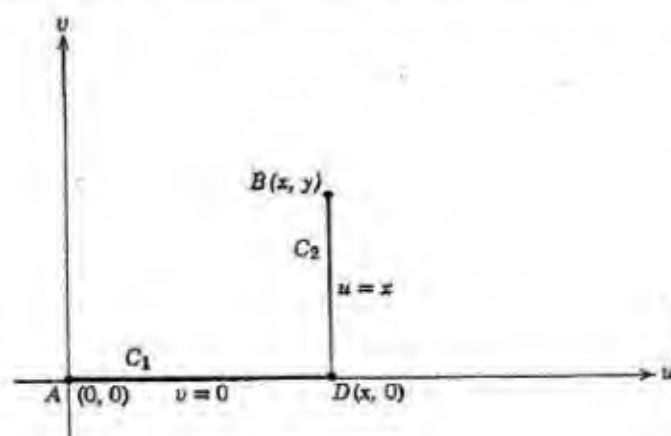


Fig. 13.11

Esto es, para las funciones P y Q del ejemplo 4, hemos encontrado una función F con la propiedad de que $F_x(x, y) = P(x, y)$ y $F_y(x, y) = Q(x, y)$. Estas condiciones hacen posible aplicar el teorema 27, que estableceremos sin demostración.*

Teorema 27. Sea R una región simplemente conexa y sean P y Q funciones tales que P , Q , P_y y Q_x son continuas en R . Entonces una condición necesaria y suficiente para que exista una función F con la propiedad de que

$$F_x(x, y) = P(x, y), \quad F_y(x, y) = Q(x, y), \quad (x, y) \in R$$

es que $P_y(x, y) = Q_x(x, y)$ para $(x, y) \in R$.

Además la expresión para F es

$$F(x, y) = \int_{(x_1, y_1)}^{(x, y)} [P(u, v) du + Q(u, v) dv] \quad (55)$$

donde (x_1, y_1) es cualquier punto de R .

Si recordamos la definición de diferencial de z Sec. 10.9, donde $z = F(x, y)$; observaremos que dadas las funciones P y Q no siempre existe una función $F = \{(x, y; z) \mid z = F(x, y)\}$ con la propiedad de que

$$dz = dF(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (56)$$

Si existe una función F que satisfaga (56) diremos que

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

es una **forma diferencial exacta** o **diferencial exacta** y denominaremos a $F(x, y)$ **antidiferencial** de $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$. Por ejemplo cada una de las formas

$$x dx + y dy, \quad x dy + y dx, \quad \frac{y dx - x dy}{y^2}$$

* Una demostración se puede encontrar en J. M. H. Olmsted, *Advanced Calculus*, Appleton-Century-Crofts, New York 1961.

es una diferencial exacta, ya que

$$d\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) = x dx + y dy, \quad d(xy) = x dy + y dx,$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y dx - x dy}{y^2}.$$

Sin embargo, $y dx - x dy$ no es una diferencial exacta.

Como una consecuencia inmediata del teorema 27 y de la definición de diferencial exacta, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 28. Sea R una región simplemente conexa y sean P y Q funciones tales que P , Q , P_y y Q_x sean continuas en R . Entonces una condición necesaria y suficiente para que $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ sea una diferencial exacta es que

$$P_y(x, y) = Q_x(x, y) \quad \text{para } (x, y) \in R.$$

Además si

$$F(x, y) = \int_{(x_1, y_1)}^{(x, y)} [P(u, v) du + Q(u, v) dv],$$

entonces

$$dF(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Supongamos que $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ es una forma diferencial exacta en la región R , y que G es cualquier función con la propiedad de que

$$dG(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Entonces, si $F(x, y)$ se expresa por (55), tenemos

$$dG(x, y) = dF(x, y)$$

ó

$$d[F(x, y) - G(x, y)] = 0.$$

por tanto

$$F(x, y) - G(x, y) = k \quad \text{ó} \quad F(x, y) = G(x, y) + k$$

donde k es un número real, esto es

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x, y)} [P(u, v) du - Q(u, v) dv] = G(x, y) + k.$$

Pero

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_1, y_1)} [P(u, v) du - Q(u, v) dv] = 0,$$

entonces

$$G(x_1, y_1) + k = 0 \quad \text{ó} \quad k = -G(x_1, y_1).$$

Por tanto, podemos establecer que

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x, y)} [P(u, v) du + Q(u, v) dv] = G(x, y) - G(x_1, y_1),$$

ó

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = G(x_2, y_2) - G(x_1, y_1), \quad (57)$$

donde G es cualquier función con la propiedad de que

$$dG(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (58)$$

Una expresión para una función G con la propiedad de que la ecuación (58) se verifique se puede encontrar usando la igualdad (55) y escogiendo la curva regular C como describiremos. Sea C la curva formada por el segmento de recta C_1 , paralelo al eje u con ecuación $v = y_1$, entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $D(x, y_1)$ y el segmento de recta C_2 paralelo al eje v , con ecuación $u = x$, entre los puntos $D(x, y_1)$ y $B(x, y)$; vea la Fig. 13.15. Para esta selección de C_1 y C_2 tenemos

$$\int_{A, D} [P(u, v) du + Q(u, v) dv] = \int_{x_1}^x P(u, y_1) du$$

e

$$\int_{D, B} [P(u, v) du + Q(u, v) dv] = \int_{y_1}^y Q(x, v) dv.$$

Por tanto

$$G(x, y) = \int_{(x_1, y_1)}^{(x, y)} [P(u, v) du + Q(u, v) dv] = \int_{x_1}^x P(u, y_1) du + \int_{y_1}^y Q(x, v) dv.$$

El punto $A(x_1, y_1)$ se puede escoger de tal manera que simplifique las integrales lo más posible; la única restricción es que el punto $A(x_1, y_1)$ y los segmentos C_1 y C_2 deben estar en la región simplemente conexa R en la cual P , Q , P_v y Q_u son continuas y $P_v = Q_u$.

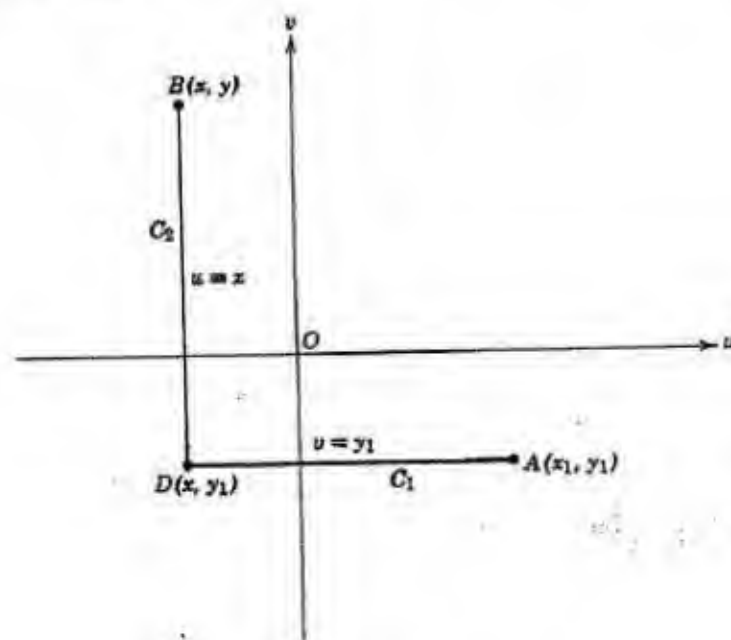


Fig. 13.15

Ejemplo 5. Demuestre que $2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy$ es una diferencial exacta, encuentre $G(x, y)$ donde

$$G(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (2uv^3 du + 3u^2v^2 dv), \quad (59)$$

y use este resultado para calcular la integral curvilínea

$$\int_{(1,2)}^{(3,4)} (2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy). \quad (60)$$

Solución. En este caso $P(x, y) = 2xy^3$, $Q(x, y) = 3x^2y^2$, $P_v(x, y) = 6xy^2$ y $Q_u(x, y) = 6xy^2$. Como P , Q , P_v y Q_u son continuas en $Re \times Re$ y $P_v(x, y) = Q_u(x, y)$ para $(x, y) \in Re \times Re$, sabemos por el teorema 28 que la diferencial dada es exacta en $Re \times Re$. De acuerdo con lo que acabamos de explicar, para calcular la integral (59) desde $A(0, 0)$ a $B(x, y)$, procederemos a lo largo del segmento de recta con ecuación $v = 0$ desde $A(0, 0)$ a $D(x, 0)$ y después a lo largo del segmento de recta con ecuación $u = x$ desde $D(x, 0)$ a $B(x, y)$. Al seguir este procedimiento tenemos

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (2uv^3 du + 3u^2v^2 dv) \\ &= \int_0^x 2u(0)^3 du + \int_0^y 3x^2v^2 dv = 0 + 3x^2 \int_0^y v^2 dv = x^2y^3. \end{aligned}$$

Para calcular la integral curvilínea (60) usamos la igualdad (57) y obtenemos

$$\int_{(1,2)}^{(3,4)} (2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy) = G(3, 4) - G(1, 2) = (9)(64) - (1)(8) = 568.$$

Ejemplo 6. Demuestre que $(2x - y) dx + (2y - x) dy$ es una forma diferencial exacta y encuentre una antidiferencial exacta.

Solución. $P(x, y) = 2x - y$, $Q(x, y) = 2y - x$, $P_v(x, y) = -1$, $Q_u(x, y) = -1$. Como las condiciones del teorema 28 se verifican en $Re \times Re$, $(2x - y) dx + (2y - x) dy$ es una forma diferencial exacta en $Re \times Re$.

Sabemos por el teorema 28 que

$$F(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} [(2u - v) du + (2v - u) dv]$$

es un antidiferencial de la diferencial exacta dada. Al usar el método del ejercicio 5 tenemos

$$\begin{aligned} \int_{(0,0)}^{(x,y)} [(2u - v) du + (2v - u) dv] &= \int_0^x 2u du + \\ &\quad \int_y^0 (2v - x) dv = x^2 + y^2 - xy. \end{aligned}$$

Por tanto, $x^2 + y^2 - xy$ es un antidiferencial de $(2x - y) dx + (2y - x) dy$, como el lector puede verificar.

Ya que, si $F(x, y)$ y $G(x, y)$ son dos antidiferenciales de la misma diferen-

cial exacta, entonces $G(x, y) = F(x, y) + k$, donde k es un número real, llamaremos a $F(x, y) + k$ **antidiferencial general** de la forma dada.

Cabe mencionar, que tenemos ahora un método mejorado para tratar las situaciones consideradas en la Sec. 10.3. Como ejemplo, considere el ejemplo 2(a) de la Sec. 10.3, que se puede expresar de la siguiente forma: encuentre una función $F = \{(x, y; z) \mid z = F(x, y)\}$ (si existe) que satisfaga al sistema de derivadas parciales

$$F_x(x, y) = x + y, \quad F_y(x, y) = x.$$

Esta proposición es equivalente, por supuesto, a: Encuentre una función F (si existe) con la propiedad

$$dF(x, y) = (x + y) dx + x dy. \quad (61)$$

Vemos que la diferencial del segundo miembro de (61) es exacta en $Re \times Re$ entonces existirá una función F con la propiedad deseada. Podemos usar el método del ejemplo 5 para encontrar $F(x, y)$, y

$$F(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} [u + v] du + u dv = \int_0^x u du + \int_0^y x dv = \frac{x^2}{2} + xy.$$

Entonces $F = \{(x, y; z) \mid z = \frac{1}{2}x^2 + xy, (x, y) \in Re \times Re\}$ es una función que satisface al sistema de derivadas parciales dado. Además, cualquier función G que satisfaga al sistema se expresará por

$$G(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + k.$$

Ejemplo 7. Encuentre una expresión de una función G , (si existe) con la propiedad de que

$$G_x(x, y) = x + \cos y, \quad G_y(x, y) = y - x \sin y. \quad (62)$$

Solución. Considere la forma diferencial

$$(x + \cos y) dx + (y - x \sin y) dy,$$

y hagamos $P(x, y) = x + \cos y$, $Q(x, y) = y - x \sin y$. Vemos que $P_y(x, y) = Q_x(x, y) = -\sin y$, entonces por el teorema 28, $(x + \cos y) dx + (y - x \sin y) dy$ es una diferencial exacta en $Re \times Re$ y

$$F(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} [(u + \cos v) du + (v - u \sin v) dv]$$

es un antidiferencial de la misma. Al calcular la integral como se indicó antes encontramos que

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_0^x (u + 1) du + \int_0^y (v - x \sin v) dv \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \frac{y^2}{2} + x \cos y - x \end{aligned}$$

es una antidiferencial de $(x + \cos y) dx + (y - x \sin y) dy$. Por tanto

$$G(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + x \cos y + k$$

expresa una función que satisface (62).

Ejemplo 8. Demuestre que $\frac{x^2 - y^2}{x^2 y} dx + \frac{y^2 - x^2}{xy^2} dy$ es una forma dife-

rencial exacta y encuentre su antidiferencial general.

Solución. Sea $P(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 y}$ y $Q(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{xy^2}$. Entonces

$$P_y(x, y) = \frac{-x^2 - y^2}{x^2 y^2} \quad \text{y} \quad Q_x(x, y) = \frac{-x^2 - y^2}{x^2 y^2},$$

P, Q, P_y y Q_x son continuas excepto en $\{(x, y) \mid x = 0 \text{ y/o } y = 0\}$. Por tanto la diferencial dada es exacta en cualquier región R que no contenga puntos del eje x o del eje y . Sabemos que

$$F(x, y) = \int_{(x_1, y_1)}^{(x, y)} \left(\frac{u^2 - v^2}{u^2 v} du + \frac{v^2 - u^2}{uv^2} dv \right)$$

es un antidiferencial de la expresión dada. En este caso no podemos tomar el punto (x_1, y_1) como $(0, 0)$; sin embargo podemos escoger $x_1 = 1, y_1 = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{(1,1)}^{(x,y)} \left(\frac{u^2 - v^2}{u^2 v} du + \frac{v^2 - u^2}{uv^2} dv \right) \\ &= \int_1^x \frac{u^2 - 1}{u^2} du + \int_1^y \frac{v^2 - x^2}{xv^2} dv = \left[u + \frac{1}{u} \right]_1^x + \left[\frac{v}{x} + \frac{x}{v} \right]_1^y \\ &= x + \frac{1}{x} - 2 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} - \frac{1}{x} - x = \frac{y^2 + x^2}{xy} - 2. \end{aligned}$$

Entonces la antidiferencial general de la forma diferencial dada es

$$G(x, y) = \frac{y^2 + x^2}{xy} + k$$

en $\{(x, y) \mid x \neq 0 \text{ y } y \neq 0\}$.

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 4 encuentre el área de la región descrita usando la fórmula (47).

1. La región limitada por las gráficas de $y = x^2 - 2$, $y = 6 - x^2$.
2. La región limitada por las gráficas de $x = y^2 - 10$, $x = 8 - y^2$.
3. La región limitada por las gráficas de $x - y + 2 = 0$, $y = x^2$.
4. La región limitada por las parábolas con ecuaciones $y^2 = 8x$ y $x^2 = 8y$.

5. Verifique el teorema de Green para $\oint_C (x^2y \, dx + xy^2 \, dy)$ donde C es la frontera de la región R en el primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = x$, $y^3 = x^2$.

6. Verifique el teorema de Green para $\oint_C [(x+y) \, dx + x^2y \, dy]$ donde C es la frontera de la región R en el primer cuadrante limitada por las gráficas de $x = 0$, $y = 0$, $y = 1 - x^2$.

7. Use el teorema de Green para demostrar que

$$\oint_C (ay \, dx + bx \, dy) = (b-a)\Delta,$$

donde C es la frontera de la región cuya área es Δ .

8. Use el resultado del ejercicio 7 para encontrar $\oint_C (3y \, dx + x \, dy)$ donde C es la frontera del cuadrado con vértices $(0,0)$, $(k,0)$, $(0,k)$ y (k,k) .

9. Encuentre $\oint_C [(x^2 + y^2) \, dx + (2x + y^2) \, dy]$ donde C es la frontera del cuadrado con vértices $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,2)$ y $(1,2)$. Verifique su resultado usando el teorema de Green.

10. Demuestre que $2xy \, dx + (x^2 + 2y) \, dy$ es una forma diferencial exacta, encuentre $G(x,y)$, donde

$$G(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} [2uv \, du + (u^2 + 2v) \, dv],$$

y calcule la integral curvilínea

$$\int_{A,B}^{(4,5)} [2xy \, dx + (x^2 + 2y) \, dy].$$

11. Demuestre que $\int_C [(3x^2y - y^2) \, dx + (x^3 - 2xy) \, dy]$ es independiente de la selección de la curva regular C que une los puntos $A(0,0)$ y $B(2,3)$. Verifique este resultado seleccionando dos curvas regulares que unan A y B y calcule la integral sobre cada una de las curvas.

En los ejercicios de 12 al 15 verifique que la forma diferencial que aparece en cada uno de ellos es exacta, y calcule la integral curvilínea.

$$12. \int_{(0,2)}^{(2,3)} [(x+y) \, dx + (x-y) \, dy].$$

$$13. \int_{(0,0)}^{(1,1)} \left[\frac{1-y^2}{(1+x)^3} \, dx + \frac{y}{(1+x)^2} \, dy \right].$$

$$14. \int_{(0,0)}^{(\pi/2, \pi/2)} (y \cos x \, dx + \sin x \, dy).$$

$$15. \int_{(1,1)}^{(2,3)} [(x+1) \, dx + (y+1) \, dy].$$

En cada uno de los ejercicios del 16 al 25 determine si la forma diferencial dada es exacta; si es exacta, encuentre su antiderivada general.

$$16. 2xy \, dx + x^2 \, dy.$$

$$17. \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2}.$$

$$18. y^2 \, dx + \frac{x}{y} \, dy.$$

$$20. 2xy \, dx + (x^2 + 1) \, dy.$$

$$22. y^2 \, dx = \frac{dx}{x}.$$

$$23. (3x^2 + 2xy^2) \, dx + (3x^2y^2 + 2y) \, dy.$$

$$24. \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \left(-1 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \, dy.$$

$$25. (2xy - y^2) \, dx + (x^2 - 3xy^2) \, dy.$$

26. Use la fórmula (47) para deducir la fórmula $A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\theta$ que nos da el área de la región que es gráfica de $\{(r, \theta) \mid r = H(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$ siendo r y θ coordenadas polares.

27. El argumento que nos condujo a la fórmula (47) para el área A de la región cerrada R cuya frontera es la curva regular simple cerrada C se basaba en la elección de un sistema de coordenadas.

(a) Demuestre que la fórmula (47) es independiente de la translación de ejes.

(b) Demuestre que la fórmula (47) es independiente de la rotación de ejes.

28-31. Resuelva los ejercicios del 5 al 8 de la Sec. 10.3 usando el método expuesto en el ejemplo 7.

En cada uno de los ejercicios del 32 al 35 use el teorema de Green para calcular la integral curvilínea especificada.

$$32. \oint_C (x^2 + 2y^2) \, dy, \text{ donde } C \text{ es la gráfica de } (x-2)^2 + y^2 = 1.$$

$$33. \oint_C [(x-y)^2 \, dx + (x-y)^2 \, dy] \text{ donde } C \text{ es la gráfica de } x^2 + y^2 = a^2.$$

$$34. \oint_C (xy^2 \, dx + 2x^2y \, dy) \text{ donde } C \text{ es la gráfica de } 4x^2 + 9y^2 = 36.$$

$$35. \oint_C (e^x \sin y \, dx + e^x \cos y \, dy) \text{ donde } C \text{ es una curva regular cerrada cualquiera que pase por los puntos } (0,0) \text{ y } (a,b).$$

EJERCICIOS ADICIONALES AL CAPITULO 13

En cada uno de los ejercicios del 1 al 6 calcule el límite indicado.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right).$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \cot x.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a}, a > 0.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{x}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^4 - 8x^3 + 3x^2 + 2x - 2}{4x^3 - 6x^2 - 2x + 4}.$$

7. Demuestre que $\frac{\cos x}{\ln \sin x} \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$.

8. Investigue y construya la gráfica de $y = F(x) = \frac{x^4}{4(x^2 - 2)}$. Identifique las asíntotas horizontales y verticales.

9. (a) Demuestre que la recta con ecuación $y = x - 1$ es una asíntota de la gráfica de $y = \frac{x^2}{x + 1}$, construya esta gráfica. Identifique las asíntotas horizontales y verticales.

(b) Encuentre los valores máximo y mínimo relativo de $F(x) = \frac{x^2}{x + 1}$.

En cada uno de los ejercicios del 10 al 13 calcule la integral dada o demuestre que no está definida.

10. $\int_0^{10} \frac{dx}{(2-x)^{1/3}}$

11. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

12. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-8)^{2/3}}$

13. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

14. Dé una interpretación geométrica del resultado del ejercicio 12.

15. Dé una interpretación geométrica del resultado del ejercicio 13.

16. (a) Encuentre una expresión para el área A de la región R , limitada superiormente por la gráfica de $y = \frac{1}{x+2}$, por la izquierda por la gráfica de $x = 2$, por la derecha por la gráfica de $x = t$, e inferiormente por el eje x .

(b) ¿Existe $\lim_{t \rightarrow +\infty} A$? Si existe, ¿cuál es su valor?

(c) Encuentre una expresión para el volumen V del sólido generado al girar la región R de la parte (a) alrededor del eje x .

(d) ¿Existe $\lim_{t \rightarrow +\infty} V$? Si existe, ¿cuál es su valor?

En cada uno de los ejercicios del 17 al 21 determine si la forma diferencial dada es exacta y encuentre su antidiferencial general.

17. $(x^3 + 12x^2y) dx + (2y + 4x^3) dy$.

18. $e^y dx + x(e^y + 1) dy$.

19. $(x^2 + y^2)^2 (x dx + y dy)$.

20. $(e^x + e^y) dx + (1 + x) e^y dy$.

21. $\frac{-y dx + x dy}{4x^2 - y^2}$

22. Demuestre que $\oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ es igual a 2π si C es el círculo con representación paramétrica $x = a \cos t, y = a \sin t$, y es igual a cero si C es el círculo con representación paramétrica $x - 2a = a \cos t, y = a \sin t$.

23. Calcule $\int_0^{A,B} [y^2 dx + (xy - x^2) dy]$ para los puntos $A(0, 0)$ y $B(1, 3)$.

(a) cuando C es un arco de la gráfica de $y = 3x$;

(b) cuando C es un arco de la gráfica de $y = 3\sqrt{x}$;

(c) cuando C está formado por un segmento del eje x y un segmento del eje y .

24. Demuestre que $\int_C \left(\frac{1+y^2}{x^3} dx - \frac{1+x^2}{y^2} y dy \right)$ es independiente de la selección de la curva regular C que una los puntos $A(1, 0)$ y $B(2, 1)$. Verifique calculando esta integral curvilínea a lo largo de dos curvas diferentes que unan A y B .

En los ejercicios 25 y 26 verifique que la forma diferencial que aparece es exacta, y calcule la integral curvilínea dada.

25. $\int_{(0,0)}^{(1,2)} [(x+y^2) dx + 2xy dy]$.

26. $\int_{(0,0)}^{(1,2)} [3x(x+2y) dx + (3x^2 - y^3) dy]$.

27. Encuentre $H(x, y)$ donde $dH(x, y) = [2(x+y)e^{2x} + 7e^{2x} + e^{3y}] dx + [3(x-y)e^{3y} + e^{3x} + 11e^{3y}] dy$.

Sucesiones infinitas y series

14.1 Sucesiones infinitas. En el capítulo 5 hicimos algunos comentarios breves acerca del concepto de sucesión. En esta sección estudiaremos las sucesiones con más detalle; en las siguientes secciones de este capítulo aplicaremos el concepto de sucesión al estudio de las series.

Una **sucesión infinita** es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros mayores o iguales que un entero dado. Si I representa el conjunto de los enteros y k es un entero dado, entonces la función

$$F = \{(n, y) \mid y = F(n), n \in I, n \geq k\} \quad (1)$$

es una sucesión infinita. Por conveniencia, nos referiremos a las sucesiones infinitas simplemente con el nombre de *sucesiones*. En la mayoría de los casos que se considerarán, el entero k será 0 ó 1.

Es evidente que una sucesión infinita no puede ser tabulada, por tanto, para especificar una sucesión debemos poder establecer una regla o dar una fórmula por medio de la cual pueda determinarse $F(n)$ que es la correspondiente del entero n bajo la sucesión F .

Ya que el dominio de una sucesión es un conjunto de enteros, resulta natural ordenar los pares que pertenecen a F . Si F es la sucesión definida por (1), entonces el primer par ordenado de la sucesión es el par cuya primera componente es k , el segundo par ordenado es el parejo cuya primera componente es $k + 1$, y así sucesivamente.

Por ejemplo: la función

$$F = \left\{ (n, y) \mid y = 6 - \frac{3}{n^2}, n \in I, n \geq 1 \right\}$$

es una sucesión en la cual

$$F(n) = 6 - \frac{3}{n^2};$$

El primer par es $(1, 3)$, el segundo par es $(2, 2\frac{1}{4})$ y el tercer par es $(3, 7\frac{1}{3})$, etcétera.

Si F es la sucesión definida por $F = \{(n, y) \mid y = F(n), n \in I, n \geq k\}$, entonces los elementos del rango, es decir

$$F(k), F(k+1), F(k+2), \dots$$

reciben el nombre de *términos de la sucesión*; $F(k)$ es el *primer término*, $F(k+1)$ es el *segundo término* y $F(n)$ es el *enésimo término* o *término general* de la sucesión.*

Siguiendo la escritura acostumbrada, frecuentemente usaremos letras minúsculas con subíndices enteros para representar los elementos del rango de una sucesión. Es decir, escribiremos

$$F(k) = a_k, F(k+1) = a_{k+1}, \dots, F(n) = a_n, \dots$$

En lugar de (1) podemos escribir

$$F = \{(n, y) \mid y = a_n, n \in I, n \geq k\}. \quad (2)$$

Cuando resulte evidente que estamos hablando de una sucesión y cuando su dominio ya haya sido especificado, podremos usar la notación

$$\{F(n)\} \quad (3)$$

en lugar de (1), y la notación

$$\{a_n\} \quad (4)$$

en lugar de (2), para representar la sucesión.

A menudo ocurre que el listado de algunos de los primeros términos de una sucesión indica cual es la regla más probable con la que puede determinarse $F(n)$ ó a_n , en este caso la sucesión se especificará por medio de dicho listado. Por ejemplo, la lista

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

especifica la sucesión F en la cual $F(n) = 1/n$, $n = 2, 3, 4, \dots$, y la lista

$$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \dots$$

especifica la sucesión cuyos términos (elementos del rango) son 1 y $\frac{1}{2}$ alternativamente.

Ya que una sucesión es una función cuyo dominio contiene números en el intervalo $[a; +\infty)$ para cualquier número real a , entonces podemos considerar la existencia de $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n)$ si los términos de la sucesión son números reales (véase Sec. 13.2). Tanto en la presente sección como en las Secs. 14.2 y 14.3 nos limitaremos a considerar sucesiones cuyos términos son números reales. Si F es una sucesión de esta clase y si b es un número real tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = b, \quad (5)$$

entonces la sucesión F se llama **sucesión convergente**. Si F es una sucesión con

* Por razones históricas se ha usado la palabra sucesión para designar lo que en nuestra definición es el rango de una sucesión.

vergente para la cual se satisface (5), entonces decimos que el *límite del enésimo término de la sucesión* es b y que la **sucesión converge a b** .

Podemos recordar de la Sec. 13.2 que decir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = b$ significa que dado cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un número N tal que

$$|F(n) - b| < \varepsilon \quad \text{para toda } n > N.$$

Si la sucesión $\{F(n)\}$ no es convergente, se dice que es **divergente**. Esto es, $\{F(n)\}$ es divergente si y sólo si no existe $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n)$.

Un examen de la definición del símbolo $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = b$ en la Sec. 13.2 nos muestra que es válido el siguiente teorema.

Teorema 1. Si $F = \{(n, y) \mid y = F(n), n \in I, n \geq k\}$ es una sucesión y $G = \{(x, y) \mid y = G(x), x \in [k; +\infty)\}$ es una función tal que

$$G(n) = F(n), \quad n \in I, n \geq k,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = b \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = b.$$

De este teorema se concluye que los teoremas y las técnicas de las Secs. 13.2 y 13.3 y los teoremas básicos sobre límites del capítulo 2 pueden ser utilizados al analizar la convergencia de sucesiones.

Por ejemplo, ya que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ (teorema 6 de la Sec. 13.2), se concluye que

la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ converge a 0; ya que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^x} = 0$ (teorema 10 de la Sec. 13.3),

tenemos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{1}{2^x}\right) = 3$, de donde se concluye que la sucesión $\left\{3 - \frac{1}{2^n}\right\}$ converge a 3.

Una sucesión $\{a_n\}$ se llama *no decreciente* si todo término posterior al primero nunca es menor que el término anterior, es decir, si

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \text{para toda } n. \quad (6)$$

Una sucesión $\{a_n\}$ se llama *no creciente* si cada término posterior al primero nunca es mayor que el término anterior, es decir, si

$$a_n \geq a_{n+1} \quad \text{para toda } n. \quad (7)$$

Ejemplo: la sucesión en la cual $a_1 = 1, a_2 = 1$, y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$, es decir, la sucesión

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

es no decreciente. La sucesión

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$$

es no creciente.

Cuando sucede (6) ó (7) la sucesión $\{a_n\}$ se llama **sucesión monótona**. Una sucesión $\{a_n\}$ para la cual existe un número B_1 con la propiedad

$$a_n < B_1 \quad \text{para toda } n,$$

se llama **acotada superiormente**; si existe un número B_2 con la propiedad

$$B_2 < a_n \quad \text{para toda } n,$$

entonces la sucesión $\{a_n\}$ se llama **acotada inferiormente**. Si una sucesión es acotada tanto superiormente como inferiormente, es decir, si existe un número B tal que

$$|a_n| < B \quad \text{para toda } n,$$

entonces la sucesión se llama **sucesión acotada**.

La sucesión $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ no está acotada superiormente y por tanto no es acotada. La sucesión $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots$ está acotada tanto superior como inferiormente y por tanto es acotada. Si representamos esta última sucesión por medio de $\{a_n\}$, entonces $|a_n| < B$ para toda n , siendo B cualquier número mayor que $\frac{1}{2}$.

A continuación enunciamos, sin demostrarlos, dos teoremas fundamentales acerca de la convergencia de sucesiones.

Teorema 2. Una sucesión no decreciente y acotada superiormente es convergente. Una sucesión no creciente y acotada inferiormente es convergente. Una sucesión monótona y acotada es convergente.*

Teorema 3. Dada una sucesión $F = \{(n, y) \mid y = a_n, n \in I, n \geq k\}$, una condición necesaria y suficiente para que F sea convergente es que dado cualquier número $\epsilon > 0$, exista un entero M tal que

$$|a_n - a_j| < \epsilon$$

para todos los enteros n y j tales que $n \geq M$ y $j \geq M$.†

Este teorema se conoce con el nombre de **criterio de Cauchy** para la convergencia de una sucesión. Una sucesión que satisface las condiciones de este teorema se llama **sucesión de Cauchy**.

Ejemplo 1. Demuéstrese que la sucesión F en la cual

$$a_n = F(n) = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!}, \quad n \geq 1,$$

es una sucesión convergente.

Solución. Puede observarse que

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)!},$$

* Una demostración de este teorema se encuentra en la obra de Fulks, *Advanced Calculus*, pág. 40.

† Una demostración de este teorema se encuentra en la obra de Fulks, *Advanced Calculus*, págs. 117-118.

de manera que $a_{n+1} > a_n$ para toda $n \geq 1$, tratándose por tanto de una sucesión monótona no decreciente. Nótese que

$$n! = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n) > 2^{n-1}$$

de modo que $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$ y

$$a_n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}. \quad (8)$$

El segundo miembro de la desigualdad (8) es la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica cuyo primer término es 1 y cuya razón es $\frac{1}{2}$, por tanto

$$a_n < \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

(véase la Sec. 5.1). Finalmente, ya que $\frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$, se ve que $a_n < 2$ para toda $n \geq 1$; por tanto, la sucesión es acotada superiormente. Por el teorema 2, la sucesión $\{a_n\}$, en donde $a_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$, $n \geq 1$ es una sucesión convergente.

Ejemplo 2. Demuéstrese que la sucesión $\{a_n\}$ en la cual $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{4}$, $a_4 = \frac{1}{8}$, y $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$, para $n \geq 3$, es una sucesión convergente.

Solución. Demostraremos que se trata de una sucesión de Cauchy. Primeramente observamos que

$$|a_2 - a_1| = \frac{1}{2},$$

$$|a_3 - a_2| = \frac{1}{2} |a_2 - a_1| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2},$$

$$|a_4 - a_3| = \frac{1}{2} |a_3 - a_2| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2},$$

$$\vdots$$

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{2} |a_n - a_{n-1}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} |a_{n-1} - a_{n-2}| = \frac{1}{2^n}. \quad (9)$$

Y que además para toda $j \geq n+1$ el número a_j cae en el intervalo cuyos extremos son a_n y a_{n+1} , de manera que

$$|a_n - a_j| \leq |a_{n+1} - a_n| \quad \text{para } j \geq n+1.$$

Dado $\epsilon > 0$, y ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ podemos escoger M tal que

$$\frac{1}{2^M} < \epsilon; \quad (10)$$

entonces, para toda n y j para las cuales $n \geq M$ y $j \geq M$ tenemos, por (9) y (10),

$$|a_n - a_j| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Por tanto, por el teorema 3, la sucesión es convergente.

El resultado del siguiente ejemplo se usará ampliamente en el resto de este capítulo, recomendándose que el lector le preste especial atención.

Ejemplo 3. Sea p un número real positivo y considérese la sucesión $\{a_n\}$ en la cual

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{2^p}$$

$$a_3 = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}$$

...

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \quad (11)$$

Demuéstrese que $\{a_n\}$ es convergente si y sólo si $p > 1$.

Solución. Primero demostraremos que si $p > 1$ entonces $\{a_n\}$ es una sucesión monótona y acotada y por tanto es convergente. Consideremos la gráfica de $y = \frac{1}{x^p}$ para $p > 1$ y sobre esta gráfica construyamos, como se muestra en la Fig. 14.1 (para $n = 4$), n rectángulos cuyas bases miden una unidad de longitud y cuyas alturas son respectivamente $1, \frac{1}{2^p}, \frac{1}{3^p}, \dots, \frac{1}{n^p}$. Podemos observar que el área del primer rectángulo es 1, el área del segundo rectángulo es $\frac{1}{2^p}$, y el área del enésimo rectángulo es $\frac{1}{n^p}$. Por tanto, el número a_n especificado por (11) tiene la propiedad de que a_n es la suma de las áreas de los n rectángulos. Ya que el área del primer rectángulo es 1, el número $a_n - 1$ es igual a la suma de las áreas de los restantes $n - 1$ rectángulos. La suma de las áreas de estos $n - 1$ rectángulos es menor que el área de la región limitada superiormente por la gráfica de $y = \frac{1}{x^p}$, inferiormente por el eje de las x , a la izquierda por la gráfica de $x = 1$, y a la derecha por la gráfica de $x = n$. Por tanto, para $p > 1$ tenemos

$$a_n - 1 < \int_1^n \frac{1}{x^p} dx \quad \text{y} \quad a_n < 1 + \int_1^n \frac{1}{x^p} dx.$$

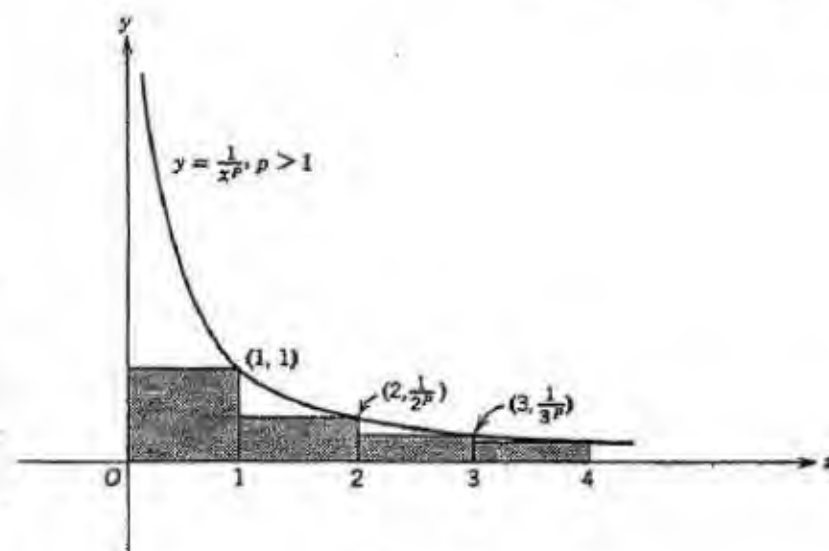


Fig. 14.1

Por otra parte, ya que $p > 1$, y $p - 1 > 0$,

$$\int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \left[\frac{-1}{p-1} \left(\frac{1}{x^{p-1}} \right) \right]_1^n = \frac{1}{p-1} \left(-\frac{1}{n^{p-1}} + 1 \right) < \frac{1}{p-1},$$

y podemos observar que

$$1 \leq a_n < 1 + \frac{1}{p-1} \quad \text{para toda } n.$$

Por tanto $\{a_n\}$ es una sucesión acotada. Además resulta evidente que $\{a_n\}$ es una sucesión monótona y entonces, como consecuencia del teorema 2, la sucesión es convergente.

A continuación demostramos que si $p \leq 1$ entonces $a_n \rightarrow +\infty$ cuando $n \rightarrow +\infty$. Para lograr esto consideramos la gráfica de $y = \frac{1}{x^p}$ para $p \leq 1$ y sobre esta gráfica construimos, como se muestra en la Fig. 14.2 (para $n = 3$), n rectángulos cuyas bases miden una unidad de longitud y cuyas alturas son respectivamente $1, \frac{1}{2^p}, \frac{1}{3^p}, \dots, \frac{1}{n^p}$. Como antes, observamos que el número a_n especificado por (11) es la suma de las áreas de los n rectángulos; sin embargo, en este caso la suma de las áreas de los n rectángulos es mayor que el área de la región limitada superiormente por la gráfica de $y = \frac{1}{x^p}$, inferiormente por el eje de las x , a la izquierda por la gráfica de $x = 1$, y a la derecha por la gráfica de $x = n + 1$. Por tanto, para $p \leq 1$ tenemos

$$a_n > \int_1^{n+1} \frac{1}{x^p} dx.$$

Si $p = 1$, resulta

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1),$$

y si $p < 1$, o sea $1 - p > 0$, se obtiene

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p} [(n+1)^{1-p} - 1].$$

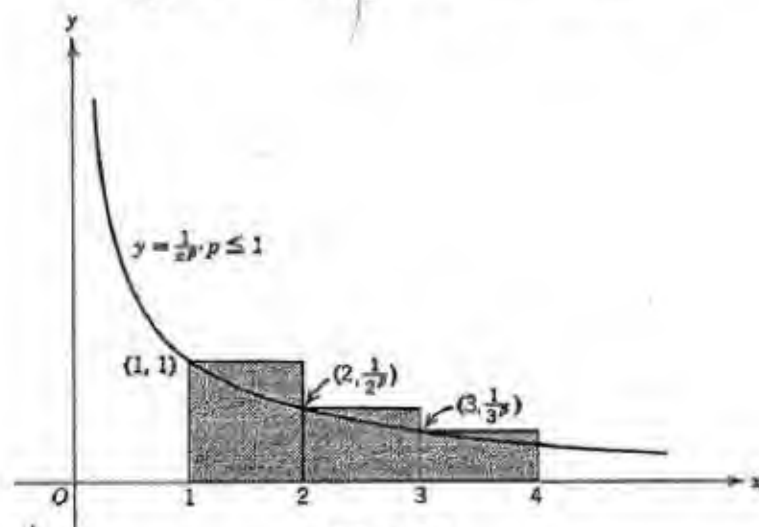


Fig. 14.2

Por tanto, si $p \leq 1$, para un número dado K es posible encontrar un entero M tal que

$$a_n > K \quad \text{para toda } n > M.$$

Es decir, si $p \leq 1$,

$$a_n \rightarrow +\infty \quad \text{cuando } n \rightarrow +\infty$$

y $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ no existe. Lo que significa que la sucesión es divergente si $p \leq 1$.

Queda demostrado así que $\{a_n\}$ es convergente si y sólo si $p > 1$.

Ejemplo 4. Demuéstrese que la sucesión $\{a_n\}$ en la cual $a_n = \frac{n^{3/2}}{\sqrt{4n^3 - 1}}$ converge a $\frac{1}{2}$.

Solución. Descamos encontrar

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{3/2}}{\sqrt{4n^3 - 1}}$$

si es que existe. Esto puede hacerse utilizando un procedimiento similar al usado en el ejemplo 1 de la Sec. 13.2. Para esto escribimos

$$\frac{n^{3/2}}{\sqrt{4n^3 - 1}} = \sqrt{\frac{n^3}{4n^3 - 1}} = \sqrt{\frac{1}{4 - (1/n^3)}} = \frac{1}{\sqrt{4 - (1/n^3)}}$$

Por medio del uso de teoremas adecuados sobre límites, encontramos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{4 - (1/n^3)} = 2,$$

y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{4 - (1/n^3)}} = \frac{1}{2}.$$

Por tanto $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{2}$ lo que significa que la sucesión converge a $\frac{1}{2}$.

Ejemplo 5. Demuéstrese que la sucesión $\{a_n\}$ en la cual $a_n = \frac{n}{2^n}$ converge a 0.

Solución. Podemos utilizar el teorema 1 de la presente sección y el teorema 16 de la Sec. 13.3. Para esto consideremos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2^x}$$

El teorema 16 de la Sec. 13.3 puede aplicarse para encontrar

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^x \ln 2} = 0.$$

Entonces, por el teorema 1 de la presente sección

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2^x} = 0$$

lo que significa que la sucesión converge a 0.

EJERCICIOS

En cada uno de los Ejercicios del 1 al 4 se especifica una sucesión. En cada ejercicio determínese si la sucesión es convergente o divergente; si la sucesión es convergente obténgase el límite del término general.

1. $\left\{1 + \frac{1}{n^2}\right\}$.
2. $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots$.
3. $\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, -\frac{7}{8}, \dots$.
4. $\{(-1)^n\}$.

5. Utilice la definición de sucesión convergente que aparece al principio de esta sección para demostrar que la sucesión $\{a_n\}$, en la cual $a_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$, converge a 2.

Usé el teorema 2 para demostrar que la sucesión dada en cada uno de los ejercicios del 6 al 8 es convergente.

6. $\left\{n\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$: Sugerencia: Demuestre que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ para toda $n \geq 3$.
7. $\{a_n\}$ en donde $a_n = n(n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

$$8. \left\{ \frac{n!}{100^n} \right\}.$$

14.2 Series infinitas cuyos términos son números reales. Sea $F = \{(n, y) \mid y = a_n, n \in I, n \geq k\} = \{a_n\}$ una sucesión cuyos términos son números reales. Entonces la expresión

$$\sum_{i=k}^{\infty} a_i \quad \text{ó} \quad a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n + \cdots \quad (12)$$

se llama **serie infinita** o, por conveniencia, simplemente **serie**. Los números $a_k, a_{k+1}, \dots, a_n, \dots$, se llaman **términos de la serie** y el número a_n se llama **n-ésimo o término general de la serie**. En la mayoría de los casos que consideremos el entero k será 0 ó 1. Es obvio que la serie (12) no es una suma aritmética, y se advierte al lector que no la trate como si lo fuera. En algunos casos podemos asociar un número con una serie dada de la forma (12), esto se hace por medio del concepto de convergencia de series que definimos a continuación.

Dada la serie infinita

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \quad (13)$$

Definimos una sucesión S especificando

$$S(1) = a_1, \quad S(2) = a_1 + a_2, \quad S(3) = a_1 + a_2 + a_3, \quad \dots, \\ S(n) = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n;$$

es decir,

$$S = \{(n, y) \mid y = \sum_{i=1}^n a_i, n \in I, n \geq 1\}. \quad (14)$$

La sucesión S recibe el nombre de **sucesión de sumas parciales de la serie** (13).

Una serie infinita dada es una **serie convergente** si y sólo si su sucesión de sumas parciales es convergente.

Ejemplo 1. Para la serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

(a) especifique la sucesión de sumas parciales; (b) demuestre que la serie es convergente.

Solución (a) La sucesión S de sumas parciales es la sucesión para la cual

$$S(1) = 1, \quad S(2) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad S(3) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}, \dots,$$

$$S(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}}.$$

Es decir,

$$S = \{(n, y) \mid y = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right), n \geq 1\}.$$

(b) Para determinar si S es convergente consideramos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

Ya que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, tenemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S(n) = 2.$$

Por tanto, la **sucesión** S es convergente, es decir la serie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$ es convergente.

Debemos tener siempre presente que para poder discutir la convergencia de una serie dada $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$; debemos considerar la **sucesión** S , llamada **sucesión de sumas**

parciales y definida por $S(n) = \sum_{i=k}^n a_i$. Si la sucesión S es convergente, la serie es convergente y si la sucesión S es divergente, la serie **no** es convergente. Una serie no convergente recibe el nombre de **serie divergente**.

Sea $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ una serie infinita y sea $S = \{(n, y) \mid y = \sum_{i=k}^n a_i, n \geq k\}$ su sucesión de sumas parciales. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} S(n) = b$; decimos que la serie $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ **converge a** b y escribimos

$$\sum_{i=k}^{\infty} a_i = b, \quad (15)$$

recibiendo b el nombre de **suma de la serie**.

En el resto de este capítulo nos ocuparemos principalmente de determinar si una serie dada converge o diverge y, en general, no trataremos de determinar la suma en el caso de que la serie sea convergente.

Debe hacerse resaltar que **solamente** escribiremos la expresión (15) y usaremos las palabras "suma de la serie" en el caso en que la serie sea convergente. Además, conviene comprender que la expresión (15) constituye un nuevo uso del signo de igualdad. También debe tenerse el cuidado de distinguir el término general de una serie infinita del término general de su sucesión de sumas parciales.

Ejemplo 2. Discútase la convergencia de la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p}$; es decir, de la serie

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots,$$

en donde p es un número real positivo.

Solución. La sucesión de sumas parciales de la serie dada es la sucesión S

en la cual

$$S(1) = 1, \quad S(2) = 1 + \frac{1}{2^p}, \quad S(3) = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}, \dots,$$

$$S(n) = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p}.$$

Hemos visto (Ejemplo 3 en Sec. 14.1) que esta sucesión S es convergente si y sólo si $p > 1$. Por tanto, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p}$ es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leq 1$.

La serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p}$ recibe generalmente el nombre de **serie p** . Frecuentemente haremos uso del hecho de que una serie p es convergente si y sólo si $p > 1$.

En los ejemplos 1 y 2 nos fue posible hacer uso de la definición de convergencia de una serie por la consideración directa de la sucesión de sumas parciales. Sin embargo, es fácil darse cuenta de que la aplicación directa de la definición de convergencia a cada serie no es un método eficiente. Para sustituir al método directo estableceremos un conjunto de teoremas que pueden aplicarse como pruebas de convergencia o divergencia para ciertos tipos de series.

Debe resultar claro que la modificación o eliminación de un número finito de términos de una serie no afecta su convergencia o divergencia. En particular, las dos series

$$\sum_{i=k}^{\infty} a_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=j}^{\infty} a_i$$

convergen o divergen simultáneamente sin importar qué valores tengan k y j . Por este motivo, frecuentemente usaremos la notación $\sum a_i$ para una serie infinita, al discutir la convergencia o divergencia de series.

Teorema 4. Si la serie $\sum a_i$ converge, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Demostración. Sea S la sucesión de sumas parciales de la serie. Ya que $\sum a_i$ converge, sabemos que la sucesión S converge, por la definición de convergencia de series. Por tanto, por el teorema 3, dado cualquier número $\epsilon > 0$ existe un entero N tal que

$$|S(n) - S(n-1)| < \epsilon$$

para toda $n > N$. Ya que $S(n) - S(n-1) = a_n$, hemos demostrado que dado cualquier número $\epsilon > 0$ existe un entero N tal que

$$|a_n| < \epsilon \quad \text{para toda } n > N$$

es decir; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

El teorema 4 dice que si una serie es convergente, entonces el límite del n -ésimo término de la serie debe ser necesariamente cero. En otras palabras, si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, entonces la serie $\sum a_i$ no puede ser convergente. Nótese que este teorema puede

usarse para demostrar que una serie es divergente, pero no puede usarse para demostrar que una serie es convergente.

Ejemplo 3. Discútase la convergencia o divergencia de cada una de las series

$$(a) \sum 2^i, (b) 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots, (c) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}.$$

Solución. (a) Para la serie $\sum 2^i$ el n -ésimo término es $a_n = 2^n$ y $2^n \rightarrow +\infty$ cuando $n \rightarrow +\infty$. Por tanto, ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ no existe, la serie es divergente.

(b) En este caso el n -ésimo término es 1 ó -1 , según que n sea impar o par respectivamente. Por tanto, el n -ésimo término no tiene límite cuando $n \rightarrow +\infty$, y por el teorema 4 la serie es divergente.

(c) En la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ encontramos que el n -ésimo término es $a_n = \frac{1}{n}$. En este caso $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; por tanto el teorema 4 no nos da información acerca de la convergencia o divergencia de la serie. Sin embargo, reconocemos que esta serie es una serie p para $p = 1$ (véase ejemplo 2), y concluimos que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ diverge.

La serie divergente

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

discutida en el ejemplo 3(c) generalmente recibe el nombre de **serie armónica**.

Por medio de la aplicación del criterio de Cauchy para sucesiones (teorema 3 en la Sec. 14.1) a la sucesión de sumas parciales de una serie, obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 5. Una condición necesaria y suficiente para que una serie $\sum a_i$ sea convergente es que dado cualquier número $\epsilon > 0$ exista un entero M tal que

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| < \epsilon \quad \text{para toda } m > n > M.$$

Frecuente se hace $m = n + p$ de modo que $p = m - n$ y se escribe la condición del teorema 5 en la forma

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \epsilon \quad \text{para toda } n > M \quad \text{y } p \geq 1.$$

Teorema 6. Si la serie $\sum a_i$ es convergente y si c es un número real, entonces la serie $\sum ca_i$ es convergente.

Demostración. En el ejercicio 31 al final de esta sección se pide que el lector dé una demostración de este teorema.

Si la serie $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ tiene la propiedad de que $a_n > 0$ para toda $n \geq k$, entonces recibe el nombre de **serie de términos positivos**. Los teoremas restantes de esta sección se refieren a series de términos positivos.

Teorema 7. Una serie de términos positivos es convergente si y sólo si su sucesión de sumas parciales está acotada.

Este teorema es una consecuencia del teorema 2 si se observa que si una sucesión no es acotada entonces no puede ser convergente (véase en los ejercicios adicionales, el número 5 al final de este capítulo).

Teorema 8. Criterio de comparación directa. *Considérense las dos series de términos positivos $\sum a_i$ y $\sum b_i$. Supóngase que existe un entero N para el cual $a_n \leq b_n$ para toda $n > N$; entonces*

- (i) si $\sum b_i$ es convergente, $\sum a_i$ entonces $\sum a_i$ es convergente;
- (ii) si $\sum b_i$ es divergente, $\sum a_i$ entonces $\sum a_i$ es divergente.

Demostración. Sea S la sucesión de sumas parciales de $\sum a_i$, y sea S' la sucesión de sumas parciales de $\sum b_i$. Entonces por hipótesis

$$S(n+p) - S(n) \leq S'(n+p) - S'(n) \quad (16)$$

para toda $n > N$ y $p \geq 1$.

(i) Si $\sum b_i$ es convergente, entonces por el teorema 5, dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entero M tal que

$$S'(n+p) - S'(n) < \varepsilon \quad (17)$$

para toda $n > M$ y $p \geq 1$. Por tanto, si escogemos K igual al mayor de los dos números M y N , se deduce de (16) y (17) que

$$S(n+p) - S(n) < \varepsilon$$

para toda $n > K$ y $p \geq 1$, entonces, por el teorema 5, $\sum a_i$ es convergente.

(ii) En el ejercicio 32 de esta sección se pide que el lector dé una demostración de la segunda parte del teorema.

Al utilizar el teorema 8 para probar la convergencia o divergencia de una serie dada, frecuentemente resulta útil como serie de comparación la serie $\sum \frac{1}{i^p}$, la cual sabemos que converge si y sólo si $p > 1$.

Ejemplo 4. Discútase la convergencia o divergencia de las series

$$(a) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)}, \quad (b) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}, \quad (c) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 + \sin i}{i^2}.$$

Solución. (a) Observamos que $n(n+1) > n^2$ para $n \geq 1$, y por tanto $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$ para $n \geq 1$. Sabemos que la serie $\sum \frac{1}{i^2}$ es convergente (es una serie p con $p > 1$), y en consecuencia, por el teorema 8, tenemos que $\sum \frac{1}{i(i+1)}$ es convergente.

(b) En este caso vemos que $n \leq n^2$, $\sqrt{n} \leq n$ de donde $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ para $n \geq 1$.

La serie armónica $\sum \frac{1}{i}$ es divergente, por tanto, la serie $\sum \frac{1}{\sqrt{i}}$ es divergente.*

* Este resultado también puede obtenerse observando que $\sum \frac{1}{\sqrt{i}}$ es una serie p con $p = \frac{1}{2}$.

(c) Ya que $-1 \leq \sin n \leq 1$ para toda n , tenemos que $0 < \frac{2 + \sin n}{n^2} \leq \frac{3}{n^2}$. Sabemos que $\sum \frac{1}{i^2}$ es convergente, por tanto, por el teorema 6, $\sum \frac{3}{i^2}$ es convergente y se concluye del teorema 8 que $\sum \frac{2 + \sin i}{i^2}$ es convergente.

Teorema 9. Sean $\sum a_i$ y $\sum b_i$ dos series de términos positivos. Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c \quad \text{y} \quad c > 0,$$

entonces ambas series son convergentes o ambas son divergentes.

Demostración. Ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ y $c > 0$, existe un entero N tal que

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < \frac{c}{2}$$

para toda $n > N$. Por otra parte $\left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < \frac{c}{2}$ significa que

$$-\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} - c < \frac{c}{2} \quad \text{ó} \quad \frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3c}{2}.$$

De manera que existe un entero N con la propiedad

$$b_n < \frac{2}{c} a_n \quad \text{y} \quad a_n < \frac{3c}{2} b_n$$

para toda $n > N$. Con esto queda establecido el teorema como una consecuencia de los teoremas 6 y 8.

Ejemplo 5. Pruébese la convergencia o divergencia de la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i(2i+1)}}.$$

Solución. Comparemos esta serie con $\sum \frac{1}{i}$, usando el teorema 9 con $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(2n+1)}}$ y $b_n = \frac{1}{n}$. Tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/\sqrt{n(2n+1)}}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n(2n+1)}}$$

Ahora bien $n = \sqrt{n^2}$ para $n \geq 1$, y

$$\frac{n}{\sqrt{n(2n+1)}} = \sqrt{\frac{n^2}{2n^2+n}} = \sqrt{\frac{1}{2+(1/n)}} = \frac{1}{\sqrt{2+(1/n)}}$$

Por tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y ya que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ es divergente, se concluye del teorema 9 que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i(2i+1)}}$ es divergente.

Ejemplo 6. Pruébese la convergencia o divergencia de la serie

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{\ln i}$$

Solución. Ya que $\ln n < n$ para $n \geq 2$, y ya que $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i}$ es divergente entonces $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{\ln i}$ es divergente por el teorema 3.

Teorema 10. Criterio del cociente. Sea $\sum a_i$ una serie de términos positivos. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$, entonces

- (i) si $\rho < 1$, la serie es convergente;
- (ii) si $\rho > 1$, la serie es divergente;
- (iii) si $\rho = 1$, la serie puede ser convergente o divergente.
- (iv) Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow +\infty$ cuando $n \rightarrow +\infty$, entonces la serie es divergente.

Demostración. (i) Si $\rho < 1$ podemos escoger un número r para el cual $\rho < r < 1$. Entonces, ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$, existe un entero N tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$$

para toda $n \geq N$. Por tanto

$$a_{n+1} < r a_n, \quad a_{n+2} < r a_{n+1} < r^2 a_n, \quad a_{n+3} < r a_{n+2} < r^3 a_n, \quad \dots, \\ a_{n+p} < r^p a_n, \quad p \geq 1.$$

La serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_n r^i$ converge si $|r| < 1$ (véase la Sec. 5.1), y entonces por el teorema 8, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_{n+i}$ converge. Pero si $\sum_{i=1}^{\infty} a_{n+i}$ converge entonces la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \sum_{i=1}^{\infty} a_{n+i}$$

converge.

(ii) Si $\rho > 1$, podemos escoger un número q para el cual $\rho > q > 1$. Entonces, ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$, existe un entero N tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q \quad \text{ó} \quad a_{n+1} > a_n$$

para toda $n \geq N$. Por tanto, el límite del término general de la serie no puede ser cero y $\sum a_i$ es divergente.

(iii) Considérese la serie $p, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p}$. Para esta serie $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{(n+1)^p}$.

Ya que $\frac{n^p}{(n+1)^p} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = \left(\frac{1}{1+(1/n)}\right)^p$, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{(n+1)^p} = 1$$

para todo valor de p . Sin embargo, si $p > 1$, la serie es convergente, y si $p \leq 1$, la serie es divergente.

(iv) Si $a_{n+1}/a_n \rightarrow +\infty$ cuando $n \rightarrow +\infty$, entonces para cualquier número $q > 1$ que seleccionemos existe un entero N tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q \quad \text{ó} \quad a_{n+1} > a_n$$

para toda $n \geq N$. Por tanto, el límite del término general de la serie no puede ser cero y $\sum a_i$ es divergente. ■

Ejemplo 7. Usese el criterio del cociente (teorema 10) para analizar la convergencia o divergencia de cada una de las series (a) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$ (definimos $0! = 1$),

$$(b) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i!}{2^i}, \quad (c) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i^2 + 3i}}.$$

Solución. (a) En este caso $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$. Enton-

ces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ y la serie es convergente.

(b) Para esta serie $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!/2^{n+1}}{n!/2^n} = \frac{n+1}{2}$. Por tanto $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow +\infty$ cuando $n \rightarrow +\infty$ y la serie es divergente.

(c) En este caso

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3n}}; \quad a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2 + 3(n+1)}}$$

y

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2 + 3(n+1)}}.$$

Ya que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2 + 3(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1 + (2/n)}{1 + (5/n) + (4/n^2)}} = 1,$$

resulta que el teorema 10 no nos da información acerca de la convergencia o divergencia de esta serie. Sin embargo, usando el teorema 9 con $a_i = \frac{1}{\sqrt{i^2 + 3i}}$

y $b_i = \frac{1}{i} = \frac{1}{\sqrt{i^2}}$ encontramos que, ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$; la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i^2 + 3i}}$ es divergente.

Al ejercitarnos en los problemas de series veremos que si el término general a_n de una serie lleva a la variable n como exponente o formando un factorial, entonces el criterio del cociente puede considerarse como una buena elección para determinar si la serie es convergente o divergente. Sin embargo, si a_n lleva a la variable n en forma algebraica o logarítmica, entonces es probable que el criterio del cociente no nos proporcione información acerca de la convergencia o divergencia de la serie. En este último caso conviene tratar de utilizar el teorema 8 o el teorema 9 usando una serie p (con un valor adecuado de p) como serie de comparación.

Teorema 11. Criterio de la integral. Sea $\sum a_i$ una serie de términos positivos y sea $F = \{(x, y) \mid y = F(x), x \in (c; +\infty)\}$ una función en la cual $F(x)$ es decreciente sobre $[c; +\infty)$. Si existe un entero N tal que $F(n) = a_n$ para toda $n \geq N$, entonces la serie $\sum a_i$ es convergente si y sólo si la integral impropia $\int_N^{\infty} F(x) dx$ existe.

En el Ejercicio 33 de esta sección se pide que el lector dé la demostración de este teorema.

EJERCICIOS

Utilícese el teorema 8 o el teorema 9 en cada uno de los ejercicios del 1 al 10 para decidir si la serie dada converge o diverge.

$$1. \sum \frac{1}{\sqrt{i^3}}$$

$$2. \sum \frac{1}{\sqrt[3]{i}}$$

$$3. \sum \frac{3}{i(i+1)}$$

$$4. \sum \frac{2i+1}{(i+1)(i+2)(i+3)}$$

$$5. \sum \frac{1}{5i}$$

$$6. \sum \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

$$7. \sum \frac{1}{i^2 + 3}$$

$$8. \sum \frac{1}{i^2(i+1)}$$

$$9. \sum \frac{i+1}{i}$$

$$10. \sum \frac{1}{\sqrt{i}}$$

Utilícese el teorema 10 en cada uno de los ejercicios del 11 al 15 para decidir si la serie dada converge o diverge.

$$11. \sum i \left(\frac{3}{4}\right)^i$$

$$12. \sum \frac{i+2}{2^i}$$

$$13. \sum \frac{i!}{9^i}$$

$$14. \sum \frac{3^i}{i \cdot 2^i}$$

$$15. \sum \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2i-1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3i-2)}$$

Utilícese el teorema 11 en cada uno de los Ejercicios del 16 al 19 para decidir si la serie dada converge o diverge.

$$16. \sum \frac{1}{i+3}$$

$$17. \sum \frac{1}{i(i+1)}$$

$$18. \sum \frac{1}{1+i^2}$$

$$19. \sum \frac{i}{1+i^2}$$

En cada uno de los ejercicios del 20 al 30 dígame si la serie dada converge o diverge.

$$20. \sum \frac{4i}{(i+1)(i+2)}$$

$$21. \sum \frac{i!}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2i+1)}$$

$$22. \sum \frac{1}{(i+2)!}$$

$$23. \sum \frac{2^i}{(i+1)(i+2)}$$

$$24. \sum \frac{i^2}{i!}$$

$$25. \sum \frac{\ln(i+1)}{i+1}$$

$$26. \sum \frac{1}{i\sqrt{i}}$$

$$27. \sum \frac{2^i}{(2i+1)^2}$$

$$28. \sum \frac{2^i}{1+2^{2i}}$$

$$29. \sum \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \frac{2i-5}{i(i^2-5)}$$

$$30. \sum \frac{5^i}{i!}$$

31. Demuéstrese el teorema 6.

32. Demuéstrese el teorema 8(ii).

33. Demuéstrese el teorema 11. Sugerencia: Tómese $k \geq N$; entonces, para $k \leq x \leq k+1$, tenemos $a_k = F(k) \geq F(x) \geq F(k+1) = a_{k+1}$ e $\int_k^{k+1} a_k dx \geq \int_k^{k+1} F(x) dx \geq \int_k^{k+1} a_{k+1} dx$. Por tanto; $\sum_{i=k}^{m-1} a_i \geq \int_N^m F(x) dx \geq \sum_{i=k}^{m-1} a_{i+1}$.

Analícese la convergencia o divergencia de cada una de las series en los ejercicios del 34 al 48.

$$34. \sum \frac{i}{2(i+1)(i+2)}$$

$$35. \frac{1}{1} + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \cdots$$

$$36. \sum \frac{1}{i \ln i}$$

$$37. \sum \frac{1}{i^2 \sqrt{i+1}}$$

$$38. \sum \frac{1}{\sqrt{(i+1)^2 - 1}}$$

$$39. \sum \frac{1}{\ln(i+1)}$$

$$40. \sum \frac{1}{3^i - 1}$$

$$41. \sum \frac{2^{i-1}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2i-1)}$$

$$42. \sum \frac{2^i}{i(i+1)}$$

$$43. \sum \frac{3 \cdot 4 \cdots (i+2)}{4 \cdot 6 \cdots (2i+2)}$$

$$44. \sum \frac{(i!)^2}{(2i)!}$$

$$45. \sum \frac{i}{3+4i}$$

46. $\sum \left(\frac{e}{3}\right)^i$

47. $\sum \frac{1}{\sqrt{i+1}}$

48. $\sum \frac{1}{2^{i+1}(i+4)}$

14.3 Series alternantes. Convergencia absoluta. Una serie cuyos términos son alternativamente positivos y negativos, es decir, una serie de la forma

$$a_k - a_{k+1} + a_{k+2} - a_{k+3} + \dots + (-1)^{n-k} a_{k+n} + \dots,$$

en donde $a_n > 0$, $n \geq k$, se llama **serie alternante**.

Teorema 12. Si $a_n > a_{n+1} > 0$ para todos los enteros $n \geq 1$ y si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, entonces la serie alternante $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} a_i$ es convergente.

Demostración. Sea S la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} a_i$. Entonces

$$S(2) = a_1 - a_2, \quad S(4) = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4), \quad \dots, \\ S(2n) = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

Ya que por hipótesis $a_{2n-1} - a_{2n} > 0$, tenemos que

$$S(2) < S(4) < S(6) < \dots < S(2n) < \dots$$

También podemos escribir

$$S(2n) = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n},$$

de modo que $S(2n) < a_1$. Por tanto

$$S(2), S(4), S(6), \dots, S(2n), \dots$$

son términos de una sucesión monótona no decreciente y acotada la cual, por el teorema 2, es convergente. Es decir, existe un número b para el cual

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(2n) = b.$$

Por hipótesis, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0$, y ya que $S(2n+1) = S(2n) + a_{2n+1}$ tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(2n+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(2n) + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = b.$$

Por tanto, la sucesión S de sumas parciales es convergente con $\lim_{n \rightarrow \infty} S(n) = b$.

Ejemplo 1. Analicemos la convergencia de la serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots \quad (18)$$

Solución. La serie dada (18) es una serie alternante $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} a_i$ con $a_n = \frac{1}{n}$.

Por tanto (18) satisface las hipótesis del teorema 12 y es una serie convergente.

La serie (18) recibe frecuentemente el nombre de **serie armónica alternante**.

Supóngase que $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} a_i$ es una serie alternante que satisface las hipótesis del teorema 12. Entonces la serie es convergente, y representando su suma con b , escribimos

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} a_i = b.$$

Si se define R_n por medio de la igualdad

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_i = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + R_n.$$

Es obvio que la serie

$$a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \dots$$

es una serie alternante que satisface las hipótesis del teorema 12 y que es, por tanto, convergente. Si F representa la sucesión de sumas parciales de esta serie, entonces

$$F(1) = a_{n+1}, \quad F(2) = a_{n+1} - a_{n+2}, \quad F(3) = a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}),$$

$$F(4) = a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - a_{n+4},$$

$$F(5) = a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}), \dots,$$

de donde se concluye que

$$0 < F(k) < a_{n+1} \quad \text{para } k > 1$$

y por tanto la suma de la serie es menor que a_{n+1} . Tenemos las dos siguientes posibilidades

$$R_n = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \dots$$

para n par, o bien

$$-R_n = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \dots$$

para n impar, y por tanto,

$$|R_n| < a_{n+1}.$$

Hemos demostrado el siguiente teorema, el cual resultará muy útil en el capítulo 15.

Teorema 13. Si $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} a_i$ es una serie alternante con $a_n > a_{n+1} > 0$

y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, de donde se tiene $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} a_i = b$, y si S es la sucesión de

sumas parciales de la serie, entonces

$$|S(n) - b| < a_{n+1}.$$

Asociada con una serie dada

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \quad (19)$$

podemos considerar a la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|. \quad (20)$$

Si la serie (20) converge, la serie (19) recibe el nombre de serie **absolutamente convergente**. Una importante propiedad de las series absolutamente convergentes se da en el siguiente teorema.

Teorema 14. Si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ es convergente, entonces la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ es convergente. Es decir si una serie es absolutamente convergente, entonces es convergente.

Demostración. Sabemos que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ converge, entonces por el teorema 5, dado cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un entero M tal que

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_m| < \varepsilon$$

o también

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_m| < \varepsilon \quad (21)$$

para toda $m > n > M$. Sin embargo,

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_m|, \quad (22)$$

de (21) y (22) se concluye que dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe una M tal que

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| < \varepsilon \quad (23)$$

para toda $m > n > M$. Por el teorema 5, la desigualdad (23) es una condición suficiente para la convergencia de la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, con lo cual el teorema queda establecido. ■

El inverso del teorema 14 no es válido; una serie puede ser convergente sin ser absolutamente convergente. Por ejemplo, la serie armónica alternante

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{1}{i} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

resultó convergente según el ejemplo 1, pero la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(-1)^{i-1} \frac{1}{i}|$$

es la serie armónica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

que en el ejemplo 3(b) de la Sec. 14.2 se demostró que es divergente.

Una serie que es convergente pero que no es absolutamente convergente se llama **condicionalmente convergente**.

Ejemplo 2. Demuéstrese que la serie $\sum \frac{(-1)^i}{\sqrt{i^2 + 1}}$ es condicionalmente convergente.

Solución. La serie dada es una serie alternante de la forma $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i a_i$ en donde $a_i = \frac{1}{\sqrt{i^2 + 1}}$. Observamos que

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2 + 1}} > 0$$

para toda $n \geq 1$, y que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} = 0$; por tanto, la serie converge por el teorema 12. Para analizar la convergencia absoluta consideramos la serie $\sum \left| \frac{(-1)^i}{\sqrt{i^2 + 1}} \right|$ que es la serie $\sum \frac{1}{\sqrt{i^2 + 1}}$. Comparamos esta serie con $\sum \frac{1}{i}$,

utilizando el teorema 9 con $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$, y $b_n = \frac{1}{n}$. Así tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^2 + 1}} = 1,$$

y ya que $\sum \frac{1}{i}$ es divergente se concluye que $\sum \frac{1}{\sqrt{i^2 + 1}}$ es divergente por el teorema 9. Por tanto, la serie dada es condicionalmente convergente.

El teorema 10 produce la siguiente prueba para convergencia absoluta observando que $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$.

Teorema 15. Sea $\sum a_i$ una serie en la cual $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$, entonces

- (i) si $\rho < 1$, la serie es absolutamente convergente;
- (ii) si $\rho > 1$, la serie es divergente;
- (iii) si $\rho = 1$, la serie puede ser convergente o divergente.
- (iv) si $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow +\infty$ cuando $n \rightarrow +\infty$, la serie es divergente.

Ejemplo 3. Analice la convergencia de la serie $\sum (-1)^i \frac{1}{2^i(1+2i)}$.

Solución. Para la serie dada

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{2^n(1+2n)} \quad \text{y} \quad a_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{n+1}(1+2n+2)},$$

de manera que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2^n(1+2n)}{2^{n+1}(3+2n)} = \frac{1+2n}{2(3+2n)}.$$

Así obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2n}{2(3+2n)} = \frac{1}{2}$$

entonces, por el teorema 15, la serie dada es absolutamente convergente.

Es obvio que si una serie de términos positivos es convergente, entonces es absolutamente convergente. Además, si una serie tiene solamente un número finito de términos negativos o un número finito de términos positivos y es convergente, entonces también es absolutamente convergente. Por tanto, las únicas series en las cuales interesa analizar la convergencia absoluta son aquellas que contienen un número infinito de términos negativos y un número infinito de términos positivos.

Ya que una serie infinita no es una suma algebraica o aritmética no es válido utilizar en las series la propiedad conmutativa de la suma, la cual establece que una suma algebraica o aritmética es independiente del orden de los términos de la suma, o bien la propiedad asociativa de la suma, la cual establece que una suma algebraica o aritmética es independiente de la forma en la que los términos se agrupen. Es decir, en general, no es posible alterar el orden de los términos de una serie o agrupar los términos de dicha serie y esperar que la nueva serie se comporte en la misma forma que la serie original con respecto a la convergencia o divergencia. Sin embargo, si una serie es absolutamente convergente entonces los términos pueden ordenarse o agruparse de cualquier manera y la serie así obtenida será convergente con una suma igual a la de la serie original. A este respecto enunciamos, sin demostración, los dos teoremas siguientes.*

Teorema 16. Sea b cualquier número real. Si $\sum a_i$ es una serie condicionalmente convergente, entonces existe una serie que puede obtenerse alterando el orden de los términos de $\sum a_i$ y que converge a b . Además, existe una serie que también puede obtenerse alterando el orden de los términos de $\sum a_i$ y que es divergente.

Teorema 17. Si $\sum a_i$ es absolutamente convergente y si b es la suma de la serie, entonces cualquier serie que se obtenga alterando el orden de los términos de $\sum a_i$ también converge a b .

* Véase la obra de Fulk, *Advanced Calculus* Sec. 14.6.

Con respecto a las operaciones de suma y resta las series convergentes pueden manejarse como si fueran sumas finitas. Este hecho se establece en el teorema 18.

Teorema 18. Si $\sum a_i$ y $\sum b_i$ son dos series convergentes tales que $\sum a_i = A$ y $\sum b_i = B$, entonces la serie $\sum (a_i + b_i)$ converge a $A + B$ y la serie $\sum (a_i - b_i)$ converge a $A - B$.

Demostración. El lector deberá demostrar que este teorema es una consecuencia directa de las definiciones de convergencia de series y sucesiones.

El teorema 18 frecuentemente se expresa diciendo que dos series convergentes pueden sumarse o restarse término a término.

Con respecto a la multiplicación, las series absolutamente convergentes pueden manejarse como si fueran sumas finitas. A este respecto enunciamos el siguiente teorema sin demostración.†

Teorema 19. Sean $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ y $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ dos series absolutamente convergentes tales que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = A$ y $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = B$. Si

$$c_1 = a_1b_1, c_2 = a_1b_2 + a_2b_1, \dots,$$

$$c_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + a_3b_{n-2} + \dots + a_nb_1, \dots,$$

entonces la serie $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ es absolutamente convergente y $\sum_{i=1}^{\infty} c_i = A \cdot B$.

EJERCICIOS

Determine en cada uno de los ejercicios del 1 al 10 si la serie dada es condicionalmente convergente o absolutamente convergente.

1. $\sum \frac{(-1)^i}{\sqrt{2i+1}}$

2. $\sum \frac{(-1)^i}{\sqrt{i(i-1)}}$

3. $\sum \frac{(-1)^i}{e^i}$

4. $\sum \frac{(-1)^{i+1}}{2^i}$

5. $\sum \frac{(-1)^i}{i^2+1}$

6. $\sum \frac{(-1)^{i+1}}{i^2+1}$

7. $\sum \frac{(-1)^i}{i!}$

8. $\sum \frac{i \cos i\pi}{(i+1)(i+2)}$

9. $\sum \frac{(-1)^i}{\ln i}$

10. $\sum \frac{(-1)^{i+1}}{i^2-5i+1}$

Sea S la sucesión de sumas parciales de la serie dada en cada uno de los ejercicios del 11 al 14, y sea b la suma de dicha serie. Dé en cada ejercicio el valor de n para el cual se puede asegurar que $|S(n) - b|$ es menor que la diferencia especificada en cada caso.

11. $\sum \frac{(-1)^i}{\sqrt{i}}$; diferencia 10^{-3} .

12. $\sum \frac{(-1)^i}{i!}$; diferencia 10^{-3} .

13. $\sum \frac{(-1)^i}{\ln i}$; diferencia 10^{-2} .

14. $\sum \frac{(-1)^i}{i}$; diferencia 10^{-2} .

† Véase la obra de A. E. Taylor, *Advanced Calculus*, Ginn and Co., 1955, Sec. 17.6.

14.4 Series infinitas cuyos términos son correspondientes. En las secciones anteriores de este capítulo estudiamos sucesiones infinitas cuyos rangos eran conjuntos de números reales y series infinitas cuyos términos eran números reales. Ahora consideraremos sucesiones cuyos rangos son conjuntos de correspondientes y series cuyos términos son correspondientes.

Sea

$$F = \{(n, y) \mid y = G_n(x), n \in I, n \geq 1\} \quad (24)$$

una sucesión cuyo rango es un conjunto de correspondientes y supóngase que cada función G_n , en donde $n = 1, 2, 3, \dots$, tiene el dominio D . Frecuentemente usaremos la notación

$$\{G_n(x)\}$$

para representar a la sucesión (24), en donde se sobreentiende que $x \in D$. Si c es un número real en el dominio D , entonces la sucesión

$$\{G_n(c)\},$$

es decir la sucesión

$$\{(n, y) \mid y = G_n(c), n \in I, n \geq 1\}, \quad (25)$$

es una sucesión cuyo rango es un conjunto de números reales. Si la sucesión $\{G_n(c)\}$ es convergente, decimos que la sucesión (24) es **convergente en c** . Si la sucesión (24) no es convergente en c , entonces es **divergente en c** . Si S es un conjunto de números reales tales que la sucesión $\{G_n(x)\}$ sea convergente en todo elemento de S , entonces decimos que la sucesión (24) es **convergente sobre el conjunto S** . Por ejemplo, la sucesión $\{x^n\}$, es decir, la sucesión

$$\{(n, y) \mid y = x^n, n \in I, n \geq 1\},$$

es convergente sobre el intervalo $(-1; 1]$, porque si $c \in (-1; 1]$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(c) = \lim_{n \rightarrow +\infty} c^n$$

existe.

Sea F una sucesión especificada por (24) para la cual cada una de las funciones $G_1, G_2, \dots, G_n, \dots$ tiene el dominio D ; entonces la expresión

$$\sum_{i=1}^{\infty} G_i(x) \quad \text{ó} \quad G_1(x) + G_2(x) + \dots + G_n(x) + \dots, \quad (26)$$

en donde $x \in D$ recibe el nombre de **serie infinita de correspondientes** o simplemente **serie**. Los correspondientes $G_1(x), G_2(x), \dots, G_n(x), \dots$ se llaman **términos de la serie**, y la correspondiente $G_n(x)$ se llama **enésimo término** o **término general de la serie**. Siempre que x se reemplaza por un número del dominio D , la serie (26) se convierte en una serie cuyos términos son números reales. Si $c \in D$, y si la serie (cuyos términos son números)

$$\sum_{i=1}^{\infty} G_i(c) \quad \text{ó} \quad G_1(c) + G_2(c) + \dots + G_n(c) + \dots \quad (27)$$

es convergente, entonces decimos que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} G_i(x)$ (cuyos términos son correspondientes) es **convergente en c** . Si la serie (26) no es convergente en c , se dice que es **divergente en c** . Si S es un conjunto de números reales con la propiedad de que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} G_i(x)$ es convergente en todo elemento de S , entonces $\sum_{i=1}^{\infty} G_i(x)$ es **convergente sobre el conjunto S** . El conjunto formado por todos los números en los cuales una serie es convergente se llama el **conjunto de convergencia de la serie**.

Como ejemplo consideremos la serie.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}; \quad (28)$$

es decir, la serie

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

La serie (28) converge hacia 2 ya que la serie

$$\frac{1}{(1)^2} + \frac{1}{(2)^2} + \frac{1}{(3)^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

es una serie p con $p = 2$, la cual sabemos que es convergente (ejemplo 2 de la Sec. 14.2). Si $c \in (1; +\infty)$, entonces la serie

$$\frac{1}{1^c} + \frac{1}{2^c} + \frac{1}{3^c} + \dots + \frac{1}{n^c} + \dots$$

es una serie p con $p > 1$ y por tanto es convergente. Además observamos que si $c \in (-\infty; 1]$, entonces la serie

$$\frac{1}{1^c} + \frac{1}{2^c} + \frac{1}{3^c} + \dots + \frac{1}{n^c} + \dots$$

es una serie p con $p \leq 1$ y por tanto es divergente. En consecuencia, el intervalo $(1; +\infty)$ es el conjunto de convergencia de la serie (28).

Ejemplo. Considérese la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(3x-1)^i}{i}. \quad (29)$$

- Demuestre que la serie es convergente en $\frac{1}{3}$.
- Demuestre que la serie es convergente en 0.
- Demuestre que la serie es divergente en $\frac{2}{3}$.
- Demuestre que el conjunto de convergencia de la serie es el intervalo $[0; \frac{2}{3})$.

Solución. (a) En la serie (29) reemplazamos x por $\frac{1}{3}$ y obtenemos la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{3})^i}{i}$$

en la cual el término general es $a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}$. Observamos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \cdot 2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Por tanto, por el teorema 10, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})^i}{i}$ es convergente y en consecuencia la serie (29) es convergente en $\frac{1}{2}$.

(b) Reemplazando x por 0 en la serie (29) obtenemos la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i}$, la cual es la serie convergente llamada armónica alternante (ejemplo 3 de la Sec. 14.2). Por tanto la serie (29) es convergente en 0.

(c) Al reemplazar x por $\frac{3}{2}$ en la serie (29) obtenemos la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$, la cual es la serie divergente llamada armónica (ejemplo 3 de la Sec. 14.2). En consecuencia la serie (29) es divergente en $\frac{3}{2}$.

(d) Sea c un número real y consideremos la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(3c-1)^i}{i}$ en la cual el término general es $a_n = \frac{(3c-1)^n}{n}$. Tenemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{n(3c-1)^{n+1}}{(n+1)(3c-1)^n} \right| = |3c-1|,$$

de manera que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \quad \text{si} \quad |3c-1| < 1$$

y además

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \quad \text{si} \quad |3c-1| > 1.$$

Por tanto, por el teorema 15, la serie (29) es convergente en c si $|3c-1| < 1$, es decir, si $0 < c < \frac{2}{3}$, y es divergente si $|3c-1| > 1$, es decir si $c < 0$ ó $c > \frac{2}{3}$. El criterio del cociente no nos da información cuando $|3c-1| = 1$, esto es, cuando $c = 0$ ó $c = \frac{2}{3}$. Sin embargo, debido a las partes (b) y (c) sabemos que la serie (29) es convergente en 0 y divergente en $\frac{3}{2}$. Por tanto el intervalo $[0; \frac{2}{3}]$ es el conjunto de convergencia de la serie (29).

Si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} G_i(x)$ es convergente sobre un conjunto S ; si F es la función especificada por

$$F = \left\{ (x, y) \mid y = \sum_{i=1}^{\infty} G_i(x); x \in S \right\}$$

y si $c \in S$, entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} G_i(c) = F(c);$$

es decir, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} G_i(x)$ converge en todo punto de S al valor de $F(x)$ en ese

punto. En este caso decimos que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} G_i(x)$ converge a $F(x)$ sobre el conjunto S , y escribimos

$$\sum_{i=1}^{\infty} G_i(x) = F(x), \quad x \in S.$$

EJERCICIOS

1. Demuestre que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{(x-1)^i}{i}$ es convergente en 0, convergente en $\frac{3}{2}$ y divergente en 2.
2. Demuestre que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} i (x-1)^{i-1}$ es convergente sobre el intervalo $(0; 2)$ y divergente en 0 y en 2.
3. Demuestre que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{\sin ix}{i}$ es convergente en $\frac{\pi}{2}$.
4. Demuestre que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos (2i-1)}{(2i-1)^2}$ es convergente en $\frac{\pi}{4}$.

14.5 Series de potencias. Una serie de la forma

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-b)^i \quad \text{ó} \quad a_0 + a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + \dots, \quad (30)$$

en donde cada a_n es un número real y b es un número real, se llama **serie de potencias de $x-b$** . Es evidente que la serie de potencias (30) converge a a_0 cuando x es igual a b . Una propiedad muy importante de las series de potencias, que es consecuencia de los teoremas 20 y 21, es que si la serie de potencias (30) es convergente con algún otro número diferente de b , entonces es absolutamente convergente sobre un intervalo cuyo punto medio es b .

Si el número b se toma igual a 0, entonces la serie (30) toma la forma

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \quad (31)$$

la cual se llama **serie de potencias de x** . Al estudiar las propiedades de las series de potencias es suficiente utilizar la forma (31), ya que la forma más general (30) puede reducirse a (31) por una simple sustitución. Por tanto, cualquier resultado enunciado en términos de la serie (31) puede también aplicarse a la serie (30).

Teorema 20. Si la serie de potencias $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ es convergente en x_0 en donde $x_0 \neq 0$, entonces la serie es absolutamente convergente en cualquier número x_1 para el cual $|x_1| < |x_0|$.

Demostración. Sabemos que la serie $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x_0)^i$ es convergente. Por tanto, por

el teorema 4, tenemos $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x_0)^n = 0$, y en consecuencia existe un número A tal que $|a_n(x_0)^n| < A$ para todos los enteros $n \geq 0$. Para demostrar que $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ es convergente en x_1 siempre que $|x_1| < |x_0|$, consideramos la serie

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x_1)^i. \quad (32)$$

Ahora bien $a_n(x_1)^n = a_n(x_0)^n \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^n$, y en consecuencia

$$|a_n(x_1)^n| < A \left|\frac{x_1}{x_0}\right|^n.$$

Ya que $|x_1| < |x_0|$, tenemos $\left|\frac{x_1}{x_0}\right| < 1$, y por tanto la serie

$$\sum_{i=0}^{\infty} A \left|\frac{x_1}{x_0}\right|^i$$

es convergente. Entonces, por el criterio de comparación (teorema 8), la serie (32) es convergente y la serie $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ es absolutamente convergente en x_1 . ■



Fig. 14.3

Debe observarse que el teorema 20 no nos permite establecer ninguna conclusión acerca de la serie $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ en $-x_0$. Todo lo que podemos deducir es que la serie será convergente sobre el intervalo $\{x \mid -x_0 < x \leq x_0\}$ si $x_0 > 0$ y sobre el intervalo $\{x \mid x_0 \leq x < -x_0\}$ si $x_0 < 0$.

Teorema 21. Si la serie de potencias $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ es divergente en x_1 , entonces es divergente en cualquier número x_0 tal que $|x_0| > |x_1|$.

Demostración. Este teorema es una conclusión inmediata del teorema 20. Si $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ fuera convergente en x_0 , en donde $|x_0| > |x_1|$, entonces por el teorema 20, la serie sería convergente en x_1 , lo cual contradice la hipótesis. ■

Con respecto a las series de potencias de $x - b$, el teorema 20, afirma que si $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - b)^i$ es convergente en x_0 , siendo $x_0 \neq b$, entonces es absolutamente

convergente en cualquier número x_1 para el cual $|x_1 - b| < |x_0 - b|$. El teorema 21 afirma que si $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - b)^i$ es divergente en x_1 , entonces es divergente en cualquier número x_0 para el cual $|x_0 - b| > |x_1 - b|$.

Como ejemplo supóngase que la serie $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - b)^i$ es convergente en el punto x_0 mostrado en la Fig. 14.3. Entonces debe ser absolutamente convergente en cada punto del intervalo $\{x \mid |x - b| < |x_0 - b|\}$ mostrado en dicha figura.

Si S es el conjunto de convergencia de una serie de potencias de la forma (30) o (31), entonces por los teoremas 20 y 21 se concluye que S debe ser un intervalo. Además, en caso de que S sea un intervalo finito, el punto medio de S debe ser b si la serie es de la forma $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, y el punto medio de S debe ser b si la serie es de la forma $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - b)^i$. El intervalo *abierto* de máxima longitud* sobre el cual

una serie de potencias es absolutamente convergente se llama **intervalo de convergencia absoluta** de la serie de potencias. Una serie de potencias puede ser o no convergente en los extremos del intervalo de convergencia; es decir, los extremos del intervalo de convergencia pueden estar o no incluidos en el conjunto de convergencia de la serie de potencias. Sin embargo, los únicos puntos que pueden estar en el conjunto de convergencia y no en el intervalo de convergencia son los extremos del intervalo de convergencia.

Consideremos la serie $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - b)^i$, en la cual el término general es $G_n(x) = a_n(x - b)^n$. Por el teorema 15 sabemos que la serie converge absolutamente en cualquier número c para el cual

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{G_{n+1}(c)}{G_n(c)} \right| < 1,$$

y diverge en cualquier número $c \neq b$ para el cual

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{G_{n+1}(c)}{G_n(c)} \right| > 1.$$

o para el cual

$$\left| \frac{G_{n+1}(c)}{G_n(c)} \right| \rightarrow +\infty \quad \text{cuando} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Por otra parte

$$\frac{G_{n+1}(c)}{G_n(c)} = \frac{a_{n+1}(c - b)^{n+1}}{a_n(c - b)^n} = (c - b) \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad c \neq b.$$

* La longitud de un intervalo (abierto, cerrado, abierto por la izquierda o abierto por la derecha) con extremos x_1 y x_2 se define como $|x_2 - x_1|$.

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{G_{n+1}(c)}{G_n(c)} \right| = |c - b| \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|,$$

siempre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ exista. Por tanto, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = k$, entonces la serie

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-b)^i$ será convergente en c si $k|c-b| < 1$ y divergente si $k|c-b| > 1$.

Además

$$\left| \frac{G_{n+1}(c)}{G_n(c)} \right| \rightarrow +\infty \text{ cuando } n \rightarrow +\infty$$

siempre que $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow +\infty$ cuando $n \rightarrow +\infty$. Por tanto si $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow +\infty$

cuando $n \rightarrow +\infty$; la serie $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-b)^i$ es convergente únicamente en b . Hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 22. Considerese la serie $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-b)^i$ en la cual el término general es $a_n(x-b)^n$.

I. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = k$; entonces

(i) Si $k = 0$, el intervalo de convergencia es \mathbb{R} ;

(ii) si $k \neq 0$, el intervalo de convergencia es $\left\{ x \mid |x-b| < \frac{1}{k} \right\}$; es decir, la serie es absolutamente convergente sobre $\left\{ x \mid |x-b| < \frac{1}{k} \right\}$ y divergente sobre $\left\{ x \mid |x-b| > \frac{1}{k} \right\}$.

II. Si $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow +\infty$ cuando $n \rightarrow +\infty$, la serie es convergente únicamente en b .

En el caso I(ii), el teorema 15 no nos da información acerca de la convergencia o divergencia de la serie en los extremos del intervalo de convergencia, en este caso debe aplicarse algún otro criterio para completar la determinación del conjunto de convergencia de la serie.

Ejemplo 1. Encuentre el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{10^i}{i} x^i$ y determine el comportamiento de la serie en los extremos del intervalo de convergencia, encuentre además el conjunto de convergencia de la serie.

Solución. La serie dada es $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$ en donde $a_n = \frac{10^n}{n}$. Por tanto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{10^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 10 \frac{n}{n+1} = 10.$$

De donde el intervalo de convergencia es

$$\{x \mid |x| < 1/10\}.$$

En el punto $1/10$ la serie se convierte en $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$, la cual es la serie armónica divergente. En el punto $-1/10$ la serie se convierte en $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{i}$; la cual es la serie armónica alternante condicionalmente convergente. Por tanto el conjunto de convergencia de la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{10^i}{i} x^i$ es el conjunto $\{x \mid -1/10 \leq x < 1/10\}$.

Si R es el intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-b)^i$ y si F es la función especificada por

$$F = \left\{ (x, y) \mid y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-b)^i, x \in R \right\},$$

entonces la serie converge absolutamente a $F(x)$ sobre R ; es decir,

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-b)^i, x \in R.$$

Ya que la serie es absolutamente convergente sobre el intervalo de convergencia R , entonces los dos siguientes teoremas son consecuencia de los teoremas 18 y 19, respectivamente.

Teorema 23. Supóngase que $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-b)^i$ tiene el intervalo de convergencia R_1 y que $\sum_{i=0}^{\infty} c_i(x-b)^i$ tiene el intervalo de convergencia R_2 , siendo

$$F_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-b)^i, x \in R_1$$

$$F_2(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(x-b)^i, x \in R_2.$$

Entonces las dos series

$$\sum_{i=0}^{\infty} (a_i + c_i)(x-b)^i \text{ y } \sum_{i=0}^{\infty} (a_i - c_i)(x-b)^i$$

son absolutamente convergentes sobre $R_1 \cap R_2$, siendo

$$\sum_{i=0}^{\infty} (a_i + c_i)(x-b)^i = F_1(x) + F_2(x), x \in R_1 \cap R_2$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (a_i - c_i)(x-b)^i = F_1(x) - F_2(x), x \in R_1 \cap R_2.$$

Teorema 24. Con las mismas hipótesis del teorema 23, si

$$d_0 = a_0c_0, \quad d_1 = a_0c_1 + a_1c_0, \quad \dots,$$

$$d_n = a_0c_n + a_1c_{n-1} + a_2c_{n-2} + \dots + a_{n-1}c_1 + a_nc_0, \quad \dots,$$

entonces la serie $\sum_{i=0}^{\infty} d_i(x-b)^i$ es absolutamente convergente sobre $R_1 \cap R_2$ y

$$\sum_{i=0}^{\infty} d_i(x-b)^i = F_1(x)F_2(x), \quad x \in R_1 \cap R_2.$$

Los teoremas 23 y 24 pueden interpretarse diciendo que la suma, resta y multiplicación de series de potencias pueden efectuarse, sobre un intervalo adecuado, tratando a las series como si fueran polinomios. Además es verdad que, con ciertas restricciones, la división de una serie de potencias entre otra también puede efectuarse tratando a las series como si fueran polinomios.* A este respecto damos, sin demostración, el siguiente teorema.

Teorema 25. Supóngase que $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-b)^i$ y $\sum_{i=0}^{\infty} c_i(x-b)^i$ tienen intervalos de convergencia R_1 y R_2 respectivamente. Supóngase que

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-b)^i = F_1(x), \quad x \in R_1,$$

y

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i(x-b)^i = F_2(x), \quad x \in R_2,$$

con $c_0 \neq 0$. Entonces existe un número $\rho > 0$ para el cual

$$\frac{F_1(x)}{F_2(x)} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-b)^i}{\sum_{i=0}^{\infty} c_i(x-b)^i} = \sum_{i=0}^{\infty} d_i(x-b)^i$$

sobre el intervalo $(b-\rho; b+\rho)$ en donde

$$a_n = c_0d_n + c_1d_{n-1} + c_2d_{n-2} + \dots + c_{n-1}d_1 + c_nd_0.$$

Debe observarse que el teorema 25 solamente afirma que existe algún intervalo, con centro en b , sobre el cual podemos dividir una serie de potencias entre otra utilizando el conocido algoritmo de la división sin fin. Sin embargo, el intervalo no se especifica y en particular no se relaciona ese intervalo con los intervalos de convergencia de las series.

Las series de potencias no sólo pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse sobre intervalos adecuados como si fueran polinomios, sino que también pueden

* Véase la discusión de la división de series de potencias en la obra de Fulk *Advanced Calculus*, Sec. 16.4.

den derivarse o integrarse término a término. Enunciamos estos últimos resultados en el siguiente teorema.*

Teorema 26. Supóngase que la serie de potencias

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-b)^i \quad (33)$$

tiene el intervalo de convergencia R . Sea F la función definida por

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-b)^i, \quad x \in R.$$

Entonces,

(i) la función F es continua y derivable sobre R ;

(ii) la serie

$$\sum_{i=0}^{\infty} D_x a_i(x-b)^i = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i(x-b)^{i-1}, \quad (34)$$

obtenida al derivar (33) término a término, tiene el intervalo de convergencia R , y

$$\sum_{i=1}^{\infty} i a_i(x-b)^{i-1} = F'(x), \quad x \in R,$$

(iii) la serie

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\int_b^x a_i(t-b)^i dt \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i+1} (x-b)^{i+1}, \quad (35)$$

obtenida al integrar (33) término a término, tiene el intervalo de convergencia R , y

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i+1} (x-b)^{i+1} = \int_b^x F(t) dt; \quad x \in R.$$

Encontraremos que los teoremas 23, 24, 25 y 26 serán de suma utilidad en la siguiente sección de este capítulo y en el capítulo 15.

El criterio del cociente en la forma del teorema 15 puede usarse frecuentemente para determinar los conjuntos de convergencia de series que no son series de potencias de $x-b$ ó de x , pero que están íntimamente relacionadas con dichas series de potencias. Ilustramos este procedimiento en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. Encuentre el conjunto de convergencia de la serie $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{8^i}{x^{3i}}$.

Solución. El término general de la serie dada es $G_n(x) = \frac{8^n}{x^{3n}}$, y tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{G_{n+1}(x)}{G_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{8^{n+1}}{x^{3(n+1)}} \cdot \frac{x^{3n}}{8^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{8}{x^3} \right| = \frac{8}{|x|^3}.$$

Por otra parte $\frac{8}{|x|^3} < 1$ siempre que $|x|^3 > 8$; por tanto la serie será absolutamente

* Una demostración puede encontrarse en la obra de Fulk *Advanced Calculus*, Sec. 16.2.

convergente sobre el conjunto

$$\{x \mid |x|^3 > 8\} = \{x \mid |x| > 2\}$$

y será divergente sobre el conjunto

$$\{x \mid |x| < 2\}.$$

Para determinar el comportamiento de la serie dada en 2 y -2 , consideramos las series

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(8)^i}{(2)^{3i}} = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

y

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{8^i}{(-2)^{3i}} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Ya que ambas series divergen, la serie dada diverge en 2 y -2 . Por tanto, el conjunto de convergencia de la serie $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{8^i}{x^{3i}}$ es el conjunto $\{x \mid |x| > 2\}$.

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 14 encuentre el intervalo de convergencia y el conjunto de convergencia de las series dadas.

1. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$

2. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x-1)^i}{i}$

3. $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{x^i}{i}$

4. $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (2x)^i$

5. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i^2 \cdot 2^i}$

6. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i(i+2)}$

7. $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x+2)^i}{3^i}$

8. $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i (x-2)^i}{3^i}$

9. $\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \frac{x^4}{4 \cdot 5} + \dots$

10. $1 + \frac{2}{3}x + \frac{3}{9}x^2 + \frac{4}{27}x^3 + \dots$

11. $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$

12. $x + 2^2 \frac{x^2}{2!} + 3^2 \frac{x^3}{3!} + 4^2 \frac{x^4}{4!} + \dots$

13. $1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 - 4(x-1)^3 + \dots$

14. $2(x-2) + \frac{3(x-2)^2}{2!} + \frac{4(x-2)^3}{3!} + \frac{5(x-2)^4}{4!} + \dots$

En cada uno de los ejercicios del 15 al 20 encuentre el conjunto de convergencia de la serie dada.

15. $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{(2x-3)^{2i-2}}{3i-2}$

16. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i-1} \left(\frac{1}{x}\right)^{2i-1}$

17. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i-1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2i-1}$

18. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^i}{x^i}$

19. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(-x)^i}$

20. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i! x^i}$

14.6 Representación de funciones por medio de series de potencias.

Debido al "buen" comportamiento de las series de potencias dentro de sus intervalos de convergencia (descrito en la sección anterior) frecuentemente es ventajoso determinar, en caso de que sea posible, una serie de potencias que converja a una

$F(x)$ dada, sobre un intervalo. Sea F una función y $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-b)^i$ una serie de potencias relacionadas en la siguiente forma

$$F = \{(x, y) \mid y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-b)^i, x \in C\},$$

es decir, de manera que

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-b)^i, \quad x \in C,$$

en donde C es un subconjunto del conjunto de convergencia de la serie; entonces decimos que la **serie representa a la función F** sobre el intervalo C .

Supongamos que F es una función que puede representarse por medio de una serie de potencias $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-b)^i$ sobre el intervalo I , en donde I es un subconjunto del intervalo de convergencia de la serie; es decir, supóngase que

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-b)^i \\ &= a_0 + a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + a_3(x-b)^3 + \dots, \quad x \in I. \end{aligned}$$

Por el uso repetido del teorema 26 se concluye que F debe poseer derivadas de todos los órdenes sobre I y que

$$\left. \begin{aligned} F'(x) &= a_1 + 2a_2(x-b) + 3a_3(x-b)^2 + 4a_4(x-b)^3 \\ &\quad + 5a_5(x-b)^4 + \dots \\ F''(x) &= 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x-b) + 3 \cdot 4a_4(x-b)^2 + 4 \cdot 5a_5(x-b)^3 + \dots \\ F'''(x) &= 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4(x-b) + 3 \cdot 4 \cdot 5a_5(x-b)^2 + \dots \\ &\vdots \\ F^{(k)}(x) &= (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots k)a_k + [2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (k+1)]a_{k+1}(x-b) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Sustituyendo b en lugar de x en las igualdades (36) encontramos que para que la serie $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-b)^i$ represente a la función F sobre cualquier intervalo que con-

tenga a b es necesario que

$$a_1 = F'(b), \quad a_2 = \frac{F''(b)}{2}, \quad a_3 = \frac{F'''(b)}{2 \cdot 3}, \dots, \quad a_k = \frac{F^{(k)}(b)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots k}, \dots$$

Es decir, si una serie de potencias de $x - b$ va a representar a una función F sobre un intervalo I , entonces F debe poseer derivadas de todos los órdenes sobre I y la serie debe tener la forma

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{F^{(i)}(b)}{i!} (x-b)^i = F(b) + F'(b)(x-b) + \frac{F''(b)}{2!} (x-b)^2 + \frac{F'''(b)}{3!} (x-b)^3 + \dots + \frac{F^{(n)}(b)}{n!} (x-b)^n + \dots \quad (37)$$

La serie (37) recibe el nombre de **serie de Taylor de F en el punto b** .

Observamos que los coeficientes de los $n+1$ primeros términos de la serie (37) coinciden con los coeficientes de los $n+1$ primeros términos de la fórmula de Taylor con residuo dada en el teorema 11 de la Sec. 8.9. Por tanto, es posible usar aquél teorema para investigar la convergencia de la sucesión de sumas parciales de la serie de Taylor (37). Supóngase que F posee derivadas de todos los órdenes sobre un intervalo C que contiene al punto b , y hágase

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{F^{(i)}(b)}{i!} (x-b)^i, \quad x \in C$$

de manera de que $\{S_n(x)\}$ es la sucesión de sumas parciales de la serie (37). Entonces, por el teorema 11 de la Secc. 8.9, tenemos que

$$F(x) = S_n(x) + R_{n+1}(x), \quad x \in C \quad (38)$$

en donde $R_{n+1}(x)$, el residuo después de $n+1$ términos, está dado por la fórmula

$$R_{n+1}(x) = \frac{F^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x-b)^{n+1}, \quad x \neq b \quad (39)$$

siendo z un número para el cual $b < z < x$ (si $x > b$) ó $x < z < b$ (si $x < b$). Por (38) vemos que la sucesión de sumas parciales $\{S_n(x)\}$ converge a $F(x)$ sobre C si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0, \quad x \in C.$$

Hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 27. Sea F una función con derivadas de todos los órdenes sobre un intervalo C que contiene al número b . Entonces una condición necesaria y suficiente para que la serie de Taylor (37) para F en el punto b represente a F sobre el intervalo C es que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0, \quad x \in C. \quad (40)$$

en donde $R_{n+1}(x)$ está dado por la ecuación (39).

Es decir, siempre que las condiciones del teorema 27 se satisfagan, tendremos

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{F^{(i)}(b)}{i!} (x-b)^i, \quad x \in C. \quad (41)$$

Expresamos esto diciendo que $F(x)$ se ha *desarrollado mediante la serie de Taylor en potencias de $x - b$* y que (41) es una representación de la función F sobre C .

Debe observarse cuidadosamente que la condición dada por la igualdad (40) no es sólo una condición suficiente para que la serie de Taylor de una función F represente a la función sobre el intervalo C , sino que también es una condición *necesaria*. Esto significa que al determinar si la serie de Taylor para una función dada F representa a esa función sobre un intervalo, no basta con sólo determinar el intervalo de convergencia de la serie. Debemos encontrar el intervalo C sobre el cual se cumple (40). Toda función que posee derivadas de todos los órdenes en b posee una serie de Taylor en el punto b . Sin embargo, esta serie de Taylor puede no ser convergente en punto alguno con excepción de b , y aún en el caso de que sí converja sobre un intervalo C , puede no ser convergente a $F(x)$ sobre ese intervalo. Un ejemplo de este último tipo de comportamiento se presenta en la función F definida por

$$F(x) = e^{-1/x^2}, \quad x \neq 0 \\ F(0) = 0.$$

La función F es continua sobre \mathbb{R} , y es evidente que F posee derivadas de todos los órdenes sobre el conjunto $\{x \mid x \neq 0\}$. Por medio de inducción y de la definición de derivada, puede demostrarse que la derivada de orden k de $F(x)$ en 0, $F^{(k)}(0)$, existe y es igual a cero para todo entero positivo k (véase en los ejercicios adicionales el número 13 al final de este capítulo). Por tanto todo coeficiente de la serie de Taylor de F en el punto 0 es igual a cero, y en consecuencia esta serie de Taylor converge a cero sobre \mathbb{R} . Sin embargo, $F(x)$ es nula únicamente cuando $x = 0$, y por tanto, aunque la serie de Taylor converge sobre \mathbb{R} , converge a $F(x)$ únicamente en 0.

Para encontrar una fórmula para el término general de la serie de Taylor de una función dada F , y para analizar la expresión $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} (x-b)^{n+1}$ en forma directa, debemos poder encontrar una fórmula razonablemente sencilla para la derivada de orden k de $F(x)$. Frecuentemente esta es una tarea muy difícil. Para poder ilustrar los conceptos y los procedimientos, nos limitaremos a la consideración de funciones en las que es posible encontrar la mencionada fórmula para $F^{(k)}(x)$.

De nuevo se advierte al lector que para demostrar que una serie de Taylor de una función F realmente representa a la función en el sentido de que

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{F^{(i)}(b)}{i!} (x-b)^i, \quad x \in C. \quad (41)$$

no sólo debe demostrarse que la serie es convergente sobre C , sino que también debe demostrarse que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0$ para $x \in C$.

Ejemplo 1. Encuentre la serie de Taylor en 0 para la función exponencial $F = \{(x, y) | y = e^x\}$ y demuestre que la serie representa a la función sobre Re .

Solución. Para determinar los coeficientes de la serie de Taylor en 0 para la función exponencial, encontramos las derivadas sucesivas de $F(x) = e^x$ y las evaluamos en 0. Es conveniente disponer el trabajo como sigue:

$$\begin{aligned} F(x) &= e^x, & F(0) &= 1; \\ F'(x) &= e^x, & F'(0) &= 1; \\ F''(x) &= e^x, & F''(0) &= 1; \\ &\vdots & & \vdots \\ F^{(k)}(x) &= e^x, & F^{(k)}(0) &= 1. \end{aligned}$$

Sustituyendo estos resultados en la serie (37) encontramos que la serie de Taylor de potencias de x para la función exponencial es

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \quad \text{ó} \quad 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (42)$$

Por medio del teorema 22 vemos que la serie (42) es convergente sobre Re (véase ejercicio 1 de la Sec. 14.5). En consecuencia la serie (42) representa a cierta función sobre Re . Para demostrar que la serie (42) converge a e^x sobre Re debemos probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0$ en donde

$$R_{n+1}(x) = \frac{F^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^z x^{n+1}}{(n+1)!}$$

con $0 < z < x$ (si $x > 0$) ó $x < z < 0$ (si $x < 0$). Si $0 < z < x$, entonces $e^z < e^x$ y

$$|R_{n+1}(x)| < e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}; \quad x > 0;$$

si $x < z < 0$, entonces $e^z < 1$ y

$$|R_{n+1}(x)| < \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|, \quad x < 0.$$

Hemos observado que la serie (42) cuyo término general es $G_n(x) = \frac{x^n}{n!}$, es convergente sobre Re , de manera que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ para $x \in Re$. Por tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = 0$ para $x \in Re$, y tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_{n+1}(x)| < e^x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0, \quad x > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_{n+1}(x)| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = 0, \quad x < 0.$$

Ya que $R_{n+1}(0) = 0$, hemos probado que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad x \in Re.$$

La ecuación (39) nos da una expresión para $R_{n+1}(x)$, que es el residuo después de $n+1$ términos. Sin embargo, frecuentemente se desea disponer de otras expresiones para $R_{n+1}(x)$. Una de dichas expresiones está dada por

$$R_{n+1}(x) = \frac{F^{(n+1)}(z)}{n!} (x-z)^n (x-b), \quad (43)$$

en donde z es un número tal que $b < z < x$ (si $x > b$) ó $x < z < b$ (si $x < b$); otra de estas expresiones está dada por

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_b^x (x-t)^n F^{(n+1)}(t) dt. \quad (44)$$

La forma de $R_{n+1}(x)$ dada por (39) se llama la *forma de Lagrange* del residuo; la forma dada por (43) recibe el nombre de *forma de Cauchy* del residuo; y la forma dada por (44) es la *forma integral* del residuo.

Ejemplo 2. Encuéntrese la serie de Taylor en el punto 0 para la función F definida por $F(x) = \ln(1+x)$, $x > -1$. Demuéstrese que esta serie de Taylor converge hacia $\ln(1+x)$ sobre el intervalo $(-1; 1]$.

Solución. Para $F(x) = \ln(1+x)$ tenemos

$$F(x) = \ln(1+x), \quad F(0) = \ln 1 = 0;$$

$$F'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad F'(0) = 1;$$

$$F''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad F''(0) = -1;$$

$$F'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad F'''(0) = 2;$$

$$F^{(4)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{(1+x)^4}, \quad F^{(4)}(0) = -2 \cdot 3;$$

$$\vdots$$

$$F^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (k-1)}{(1+x)^k}, \quad F^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} (k-1)!, \quad k \geq 1.$$

De esto resulta que el término general del desarrollo de $\ln(1+x)$ en serie de Taylor de potencias de x es $(-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{n!} x^n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$. Por tanto, la serie de Taylor para la función dada es

$$0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots$$

o sea

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} x^i. \quad (45)$$

Deseamos demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_{n+1}(x) = 0, \quad x \in (-1; 1].$$

Consideraremos dos casos.

Caso 1. $0 < x \leq 1$. Aquí expresamos el residuo en la forma de Lagrange (39). Ya que $F^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$ y $b = 0$, obtenemos

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+z)^{n+1}},$$

en donde $0 < z < x \leq 1$. Observamos que $x < 1+z$ y que $\frac{x}{1+z} < 1$; por tanto,

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{1+z} \right)^{n+1} < \frac{1}{n+1}.$$

Como consecuencia, en el caso $0 < x \leq 1$, encontramos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_{n+1}(x) = 0.$$

Caso 2. $-1 < x < 0$. Ahora utilizamos el residuo en la forma de Cauchy (43) y encontramos

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n n!}{n!(1+z)^{n+1}} (x-z)^n = \frac{(-1)^n x}{1+z} \left(\frac{x-z}{1+z} \right)^n$$

en donde $-1 < x < z < 0$. Entonces

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{|x|}{|1+z|} \left(\frac{|x-z|}{|1+z|} \right)^n.$$

Ya que $-1 < x < z < 0$ podemos escribir

$$z = \theta x, \quad 0 < \theta < 1$$

de manera que

$$x - z = x(1 - \theta),$$

y

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{|x|}{|1+\theta x|} \left(\frac{|x(1-\theta)|}{|1+\theta x|} \right)^n = \frac{|x|^{n+1}}{|1+\theta x|} \left| \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right|^n.$$

Observamos que

$$1 + \theta x > 1 + x > 0 \quad \text{ó} \quad 0 < \frac{1}{1+\theta x} < \frac{1}{1+x}$$

y que

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1.$$

Por tanto,

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{1+x}, \quad -1 < x < 0.$$

Ya que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x|^{n+1} = 0$ para $-1 < x < 0$, resulta que, cuando $-1 < x < 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_{n+1}(x) = 0.$$

ya que la serie de Taylor (45) converge a $F(0) = \ln(1) = 0$ en 0, hemos demostrado que la serie (45) converge a $\ln(1+x)$ sobre el intervalo $(-1; 1]$. Es decir,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots, \quad x \in (-1; 1].$$

Ejemplo 3. Obtenga la serie de Taylor en 0 para la función F definida por

$$F(x) = (1+x)^p$$

en donde p es cualquier número real, y demuéstrese que la serie converge a $(1+x)^p$ sobre el intervalo $(-1; 1)$.

Solución. Para la función dada tenemos

$$\begin{aligned} F(x) &= (1+x)^p, & F(0) &= 1; \\ F'(x) &= p(1+x)^{p-1}, & F'(0) &= p; \\ F''(x) &= (p-1)p(1+x)^{p-2}, & F''(0) &= p(p-1); \\ F'''(x) &= (p-2)(p-1)p(1+x)^{p-3}, & F'''(0) &= p(p-1)(p-2); \\ &\vdots & & \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^{(k)}(x) &= [p - (k-1)][p - (k-2)] \cdots (p-1)p(1+x)^{p-k}, & F^{(k)}(0) &= p(p-1)(p-2) \cdots (p-k+1) \end{aligned}$$

Por tanto, la serie de Taylor en 0 para $(1+x)^p$ es

$$\begin{aligned} 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!} x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} x^3 + \cdots \\ + \frac{p(p-1)(p-2) \cdots (p-n+1)}{n!} x^n + \cdots \end{aligned}$$

o bien

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p(p-1)(p-2) \cdots (p-i+1)}{i!} x^i. \quad (46)$$

Si p es un entero positivo o cero, entonces $F^{(k)}(0) = 0$ para toda $k > p$, y todos los términos de la serie con exponente mayor que p llevan coeficientes nulos, reduciéndose la serie a un polinomio de grado p que corresponde a la fórmula binomial ordinaria del álgebra elemental. Por otra parte, suponiendo que p no es ni un entero positivo ni cero, consideramos el residuo $R_{n+1}(x)$ en la forma de Cauchy (43). Así obtenemos

$$R_{n+1}(x) = \frac{p(p+1)(p+2) \cdots (p-n)(1+z)^{p-n-1}}{n!} (x-z)^n(x), \quad (47)$$

en donde $0 < z < x$ (si $x > 0$) ó $x < z < 0$ (si $x < 0$). Ya que $0 < z < x$ ó $x < z < 0$ podemos escribir

$$z = \theta x, \quad 0 < \theta < 1,$$

y entonces

$$x - z = x(1 - \theta).$$

La ecuación (47) se convierte entonces en

$$R_{n+1}(x) = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n)}{n!} (1+\theta x)^{p-n-1} x^{n+1} (1-\theta)^n$$

o bien

$$R_{n+1}(x) = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n)}{n!} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n (1+\theta x)^{p-1} x^{n+1}.$$

Ahora supóngase que $-1 < x < 1$; entonces

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1.$$

Si $p > 1$ observamos que, ya que

$$1 + \theta x < 1 + |x|,$$

$$0 < (1 + \theta x)^{p-1} < (1 + |x|)^{p-1}.$$

Si $p < 1$ encontramos que, ya que

$$1 + \theta x > 1 - |x|,$$

$$(1 + \theta x)^{p-1} = \frac{1}{(1 + \theta x)^{1-p}} < \frac{1}{(1 - |x|)^{1-p}}.$$

Por tanto, si $-1 < x < 1$, entonces

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n)}{n!} (1 \pm x)^{p-1} |x|^{n+1},$$

en donde se toma el signo más si $p > 1$ y el signo menos si $p < 1$. El valor de la expresión $(1 \pm x)^{p-1}$ en la última desigualdad es independiente de n . En consecuencia podemos probar que la serie (46) converge a $(1+x)^p$ sobre $(-1; 1)$, cuando p no es un entero positivo ni cero, demostrando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n)}{n!} |x|^{n+1} = 0$$

para $x \in (-1; 1)$. Esto puede hacerse probando que la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-i)}{i!} |x|^{i+1}$$

es absolutamente convergente sobre $(-1; 1)$, y por tanto su término general tiende a cero cuando $n \rightarrow +\infty$. Esto se logra por medio del criterio del cociente en la forma del teorema 15; se pide que el lector complete esta discusión en el ejercicio 5 al final de esta sección.

De los resultados del ejemplo 3 tenemos

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!} x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} x^3 + \cdots \\ + \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{n!} x^n + \cdots, \quad x \in (-1; 1).$$

En este desarrollo de $(1+x)^p$ en potencias de x la serie de la derecha recibe el nombre de serie binomial.

Ejemplo 4. Use el resultado del ejemplo 3 para obtener la serie de Taylor en 0 para la función definida por $F(x) = (1-x^2)^{-1/2}$. Determine también el intervalo sobre el cual esta serie representa a la función.

Solución. Por el Ejemplo 3 tenemos

$$(1+u)^p = 1 + pu + \frac{p(p-1)}{2!} u^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} u^3 + \cdots \\ + \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{n!} u^n + \cdots$$

siempre que $-1 < u < 1$. Reemplazando u por $-x^2$ y p por $-\frac{1}{2}$ en esta fórmula, encontramos

$$(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \cdots \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} x^{2n} + \cdots$$

siempre que $-1 < -x^2 < 1$. Es decir,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2i-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2i)} x^{2i}$$

sobre el intervalo $\{x \mid x^2 < 1\}$.

EJERCICIOS

1. Obtenga los primeros cinco términos no nulos y el término general de la serie de Taylor para $F = \{(x, y) \mid y = \sin x\}$ en el punto 0. Demuestre que la serie representa a la función sobre \mathbb{R} . *Sugerencia:* Use el hecho de que $\sin x$ y $\cos x$ están acotadas sobre \mathbb{R} .

2. Use el resultado del ejercicio 1 y el teorema 26(ii) para encontrar los cinco primeros términos no nulos y el término general de la serie de Taylor en potencias de x para la función $F = \{(x, y) \mid y = \cos x\}$ y para probar que esta serie converge a $\cos x$ sobre \mathbb{R} .

3. En el ejemplo 2 establecimos que

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{u^n}{n} + \cdots, \quad u \in (-1; 1].$$

Use este resultado para obtener los cuatro primeros términos no nulos y el término general del desarrollo de $\ln x$ de la serie de Taylor en potencias de $x-1$, y para probar que la nueva serie converge a $\ln x$ sobre $(0; 2]$.

4. Use el resultado del ejercicio 3 y el teorema 24 para obtener los cinco primeros términos no nulos del desarrollo de $x \ln x$ en serie de Taylor en potencias de $x-1$. Determine el intervalo sobre el que esta serie converge a $x \ln x$. *Sugerencia:* La serie de Taylor para $F(x) = x$ en potencias de $x-1$ es $1 + (x-1)$.

5. Demuestre que la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-i)}{i!} |x|^{i+1}$$

es absolutamente convergente sobre $(-1; 1)$, y complete así la solución del Ejemplo 3.

6. (a) Obtenga la serie de Taylor en potencias de u para la función definida por $F(u) = (1+u)^{-2}$, usando el resultado del ejemplo 3.

(b) Use el resultado de la parte (a) para obtener el desarrollo de $(1+x^2)^{-1}$ mediante la serie de Taylor en potencias de x . Determine sobre qué intervalo converge esta serie a $(1+x^2)^{-1}$.

7. Use el resultado del ejercicio 6(b) y el teorema 26(iii) para obtener el desarrollo de $\arctan x$ en serie de Taylor en potencias de x . Determine sobre qué intervalo converge esta serie a $\arctan x$.

8. Encuentre el desarrollo en serie de Taylor de potencias de x para $\arcsen x$. *Sugerencia:*

$$\arcsen x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

9. Por medio del teorema 25 obtenga el desarrollo de la serie de Taylor en potencias de x para $F(x) = \frac{\sen x}{x}$.

10. Use el resultado del ejemplo 1 para obtener el desarrollo en serie de Taylor en potencias de x para $F(x) = e^{-x}$.

11. Use el resultado del ejercicio 10 y el teorema 24 para obtener el desarrollo en serie Taylor de potencias de x para $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Determine sobre qué intervalo converge esta serie a $\sinh x$.

EJERCICIOS ADICIONALES AL CAPITULO 14

1. Si $\{a_n\}$ es una sucesión en la cual $a_n > 0$ para toda n , demuestre que

$$a_n \rightarrow +\infty \text{ cuando } n \rightarrow +\infty \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

2. Use el hecho de que $(1+p)^n \geq 1+np$ para $p > 0$ y que n es un entero positivo para demostrar que si $a > 1$ entonces $a^n \rightarrow +\infty$ cuando $n \rightarrow +\infty$.

3. Utilice los resultados de los ejercicios 1 y 2 para probar que si $|r| < 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = 0$.

4. Demuestre que la serie $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n + \cdots$ es convergente si y sólo si $|r| < 1$.

5. Demuestre que si la sucesión $\{F(n)\}$ es convergente, entonces es acotada. En cada uno de los ejercicios del 6 al 9 determine si la serie dada converge o diverge.

$$6. \sum \frac{i^i}{i!}.$$

$$7. \sum \sen \left[\pi \left(n + \frac{1}{n} \right) \right].$$

$$8. \sum \frac{\ln i}{i}.$$

$$9. \sum \frac{1 - (1/i)}{e^i}.$$

10. Demuestre que la serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \cdots + a_n + \cdots,$$

en donde $a_n = 1/n$ cuando n es impar, y $a_n = -[1/2(n-1)]$ cuando n es par, es divergente.

En los ejercicios 11 y 12 demuestre que la serie dada es condicionalmente convergente.

$$11. \sum \frac{\tan \left(\frac{\pi}{4} + i \frac{\pi}{2} \right)}{i}.$$

$$12. \sum \frac{\sen i \frac{\pi}{4}}{i}.$$

13. Considere la función F definida por

$$\begin{aligned} F(x) &= e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ F(0) &= 0. \end{aligned}$$

Use la definición $F'(0)$ para demostrar que $F'(0) = 0$. Luego, por el proceso de inducción demuestre que $F^{(k)}(0) = 0$ para todo entero positivo k .

Aproximaciones

15.1 Aproximación Polinomial. Hemos considerado algunas aproximaciones polinomiales en la Sec. 8.9, al referirnos a la fórmula de Taylor con residuo para $F(x)$. El estudio de las series infinitas del capítulo 14 da una base para consideraciones adicionales de estas aproximaciones.

Usaremos $P_n(x)$, como en la Sec. 8.9 para representar el polinomio de Taylor de grado n de $F(x)$ en a , y $R_{n+1}(x)$ para representar al residuo después de $n+1$ términos en el desarrollo de $F(x)$ por la fórmula de Taylor. En otras palabras, consideraremos al residuo $R_{n+1}(x)$ como el error cometido cuando el polinomio $P_n(x)$ se use para obtener el valor aproximado de $F(x)$ correspondiente a cualquier valor permitido de x . En la Sec. 8.9 vimos que si desarrollamos $F(x)$ en potencias de $(x-a)$ por la fórmula de Taylor con residuo y que si $|F^{(n+1)}(z)| \leq M$ para $a < z < x_1$ ó $x_1 < z < a$ (donde M es un número positivo) entonces

$$|R_{n+1}(x_1)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x_1 - a|^{n+1}, \quad (1)$$

y en la misma sección hemos usado este resultado para obtener una estimación del error cometido al considerar a $P_n(x_1)$ como aproximación de $F(x_1)$.

Por supuesto, si se ha de hacer esta aproximación, debemos efectuar los cálculos numéricos necesarios para obtener el valor numérico de $P_n(x_1)$ con un número apropiado de cifras decimales. Por ejemplo, si sabemos que el error cometido al usar $P_7(3)$ para aproximar $F(3)$ es menor que 0.00004, debemos calcular $P_7(3)$ al menos con 6 cifras decimales.

El error debido a la selección del esquema de aproximación se llama *error de aproximación*; el error producido al redondear decimales en el cómputo se llama *error por redondeo*. Cuando se nos pide que *aproximemos* Q con k *cifras decimales*, debemos encontrar las condiciones apropiadas para que el error por aproximación sea menor que $\frac{1}{2}(10^{-k})$ y hacer los cálculos numéricos con precisión suficiente para que el error por redondeo sea menor que el error por aproximación.

En algunas situaciones se puede obtener una cota del error en la aproximación de $F(x_1)$ por $P_n(x_1)$ usando el teorema 13 de la Sec. 14.3. Por conveniencia enunciaremos nuevamente este teorema.

Teorema 1. Si $\sum (-1)^k a_k$ es una serie alternante convergente donde $a_n >$

a_{n+1} , el error cometido al usar la suma de n términos de la serie para representar la suma de la serie es menor que el valor absoluto del término $(n+1)$.

Ilustración, del ejercicio 2 de la Sec. 14.6, vemos que

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots \quad (2)$$

para x real. Usaremos $P_6(x)$ en este desarrollo para encontrar una aproximación de $\cos \frac{1}{2}$, y por el teorema 1 determinaremos una cota del error en esta aproximación. Al igual que en el ejemplo 7 de la Sec. 8.9 si usamos

$$P_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

encontramos

$$P_6\left(\frac{1}{2}\right) \doteq 0.877,582,5.$$

Por (2) sabemos que

$$\cos \frac{1}{2} = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6}{6!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^8}{8!} + \cdots,$$

donde la serie de la derecha es una serie convergente alternante. El teorema 1 nos asegura que el error al usar $P_6\left(\frac{1}{2}\right)$ como una aproximación de $\cos \frac{1}{2}$ es menor que $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^8}{8!} \doteq 0.000,000,1$. Como el término $+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^8}{8!}$ es positivo, nuestra conclusión es que

$$\cos \frac{1}{2} \doteq 0.877,582,5,$$

y que el error de esta aproximación es por defecto y menor que 0.000,000,1. Por tanto $\cos \frac{1}{2} \doteq 0.877,583$, es correcto hasta la sexta cifra decimal.

Note que en la aproximación de $\cos \frac{1}{2}$, el teorema 1 nos da una mejor estimación del error que la que nos da el método del ejercicio 7 de la Sec. 8.9.

Recordemos que

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n + \cdots \quad (3)$$

(Vea ejemplo 3, Sec. 14.6). Hemos visto que si p es un número real, entonces se verifica (3) para $|x| < 1$. Si p es un entero no negativo, la serie binomial de la derecha es un polinomio de grado p ; para otros valores de p , la serie binomial es una serie infinita.

Los coeficientes de las potencias de x en la serie binomial, esto es los números,

$$p, \frac{p(p-1)}{2!}, \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}, \dots, \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}, \dots$$

se llaman *coeficientes binomiales* y frecuentemente se representan por

$$\binom{p}{1}, \binom{p}{2}, \binom{p}{3}, \dots, \binom{p}{n}, \dots$$

Con esta notación (3) queda en la forma

$$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \cdots + \binom{p}{n}x^n + \cdots \quad (4)$$

Sea $R_n(x)$ definida por la igualdad

$$R_n(x) = \binom{p}{n}x^n + \binom{p}{n+1}x^{n+1} + \binom{p}{n+2}x^{n+2} + \cdots,$$

esto es, $R_n(x)$ es el residuo después de n términos de la serie binomial de $(1+x)^p$. Observe que

$$\binom{p}{n+1} = \frac{p-n}{n+1} \binom{p}{n}, \quad \binom{p}{n+2} = \frac{p-n}{n+1} \frac{p-n-1}{n+2} \binom{p}{n},$$

etc... Por tanto

$$|R_n(x)| < \left| \binom{p}{n} \right| x^n \left[1 + \left| \frac{p-n}{n+1} \right| |x| + \left| \frac{p-n}{n+1} \right| \left| \frac{p-n-1}{n+2} \right| |x|^2 + \cdots \right].$$

En el caso de que $p \geq -1$, tenemos $|p-n| \leq n+1$; $|p-n-1| \leq n+2$, etc., entonces

$$|R_n(x)| \leq \left| \binom{p}{n} \right| |x|^n [1 + |x| + |x|^2 + \cdots]. \quad (5)$$

En consecuencia, si $|x| < 1$ y si $p \geq -1$, entonces

$$|R_n(x)| < \left| \binom{p}{n} \right| \frac{|x|^n}{1-|x|}. \quad (6)$$

Ejemplo (a) Obtenga la serie binomial de $(1+x)^{1/3}$.

(b) Si se usa la suma de los cuatro primeros términos de la serie binomial de $(1+0.024)^{1/3}$ como una aproximación de $\sqrt[3]{1.024}$, use el teorema 1 para demostrar que el error E_1 en esta aproximación es menor que 0.000,000,013.

(c) Calcule una aproximación de $\sqrt[3]{1.024}$ correcta hasta la novena cifra decimal.

(d) Observe que $2 = \frac{1024}{512} = \frac{1000}{512} (1.024) = \frac{10^3}{8^3} (1.024)$, de tal manera que

$$\sqrt[3]{2} = \frac{10}{8} \sqrt[3]{1.024} = \frac{10}{8} (1+0.024)^{1/3},$$

y use los resultados de los incisos (b) y (c) para encontrar una aproximación de $\sqrt[3]{2}$ correcta hasta la sexta cifra decimal.

Solución. (a) Por (3) sabemos que

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!}x^3 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)(\frac{1}{3}-3)}{4!}x^4 + \dots + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)\dots(\frac{1}{3}-(n-1))}{n!}x^n + \dots \quad (7)$$

para $x \in (-1; 1)$.

(b) Si hacemos $x = 0.024$ en (7) obtenemos una serie alternante para $(1+0.024)^{1/3}$. El teorema 1 nos asegura que el error cometido al usar la suma de los 4 primeros términos de la serie como una aproximación de $(1+0.024)^{1/3}$ es menor que el valor absoluto del quinto término. Si designamos este error por E_1 , tenemos

$$E_1 < \left| \frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})(-\frac{8}{3})}{4!} (0.024)^4 \right| = \frac{10}{243} (0.024)^4,$$

6

$$E_1 < 0.000,000,013.$$

Como el quinto término de la serie es negativo, la aproximación es por exceso.

(c) $P_3(x)$, la suma de los cuatro primeros términos de (7) es

$$P_3(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3.$$

Si efectuamos los cálculos hasta la novena cifra decimal, encontramos que

$$P_3(1.024) = 1 + \frac{1}{3}(0.024) - \frac{1}{9}(0.024)^2 + \frac{5}{81}(0.024)^3 \doteq 1.007,936,852.$$

(d) Notamos que

$$10\%P_3(1.024) \doteq 1.259,921,06,$$

es correcto hasta la octava cifra decimal, y que el error al usar $10\%P_3(1.024)$ como aproximación de $\sqrt[3]{2}$ es menor que

$$10\%(0.000,000,013) \doteq 0.000,000,02,$$

y esta aproximación es correcta hasta la octava cifra decimal. Como la aproximación $10\%P_3(1.024)$ es por exceso concluimos que

$$\sqrt[3]{2} \doteq 1.259,921,$$

es correcto hasta la sexta cifra decimal.

EJERCICIOS

1. (a) Obtenga la serie binomial para $(1+x)^{1/4}$.
- (b) Si la suma de los cuatro primeros términos de la serie binomial de

$(1+0.124)^{1/4}$ se usa como una aproximación de $\sqrt[4]{1.125}$, use el teorema 1 para demostrar que el error E_1 en esta aproximación es menor que 0.000,009.

(c) Calcule esta aproximación de $\sqrt[4]{1.125}$, correcta hasta la sexta cifra decimal.

(d) Basándose en que $\sqrt{18} = 2(1+0.125)^{1/4}$ y en los resultados de las partes (b) y (c) encuentre una aproximación para $\sqrt{18}$ correcta hasta la cuarta cifra decimal.

2. Use la serie (7) del ejemplo para aproximar $\sqrt[3]{1.2}$ hasta la cuarta cifra decimal.

3. (a) Obtenga la serie binomial de $(1+x)^{-1/2}$.

(b) Use el resultado de (a) para aproximar $1/\sqrt{0.98}$ hasta la quinta cifra decimal.

4. Use los tres primeros términos de la serie del ejercicio 1(a), para aproximar $\sqrt[3]{16.2}$ hasta la séptima cifra decimal.

5. Aproxime sen 10° hasta la cuarta cifra decimal.

6. Use el resultado (6) para demostrar que $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x$ con un error menor que 0.0003 si $|x| \leq 0.05$.

7. Use el resultado del ejercicio 6 para aproximar $\sqrt[3]{1.04}$ hasta la tercera cifra decimal.

8. Determine el intervalo donde sen $x = x - \frac{1}{6}x^3$ con un error menor que 0.002.

9. (a) Determine la serie binomial de $(1+x)^{1/2}$.

(b) Use esta serie para aproximar $\sqrt{1.2}$ hasta la cuarta cifra decimal.

15.2 Construcción de tablas exponenciales y trigonométricas. Por el ejemplo 1 de la Sec. 14.6 sabemos que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots \quad (8)$$

en \mathbb{R} . Este resultado se puede usar para construir tablas de potencias de e . Se puede obtener de varias maneras una estimación del error cometido cuando se usa $P_n(x_1)$ para aproximar e^{x_1} (vea ejemplo 5 de la Sec. 8.9; ejemplo 8 de la Sec. 8.9; y ejercicios 2 y 3 de los ejercicios adicionales al final de este capítulo). Si $x_1 < 0$, se obtiene una serie alternante convergente para e^{x_1} , y se puede usar el teorema 1 para estimar el error cometido al usar $P_n(x_1)$ para aproximar e^{x_1} .

Ejemplo 1. (a) Usando la suma de los cuatro primeros términos de la serie (8) como una aproximación de $e^{-0.1}$, encuentre por medio del teorema 1 una cota del error en esta aproximación.

(b) Use los cuatro primeros términos de la serie en (8), para aproximar $e^{-0.2}$ hasta la cuarta cifra decimal.

Solución. (a) Si hacemos $x = -0.1$ en (8) obtenemos una serie alternante para $e^{-0.1}$. El teorema 1 nos dice que el error cometido al usar la suma de los cuatro

primeros términos de esta serie como una aproximación para $e^{-0.1}$ es menor que el valor absoluto del quinto término. Si designamos este error por E , tenemos

$$E < \left| \frac{1}{240,000} \right| \doteq 0.000,004,2,$$

$$E < 0.000,004,2.$$

Ya que el quinto término de la serie es positivo, la aproximación es por defecto.

(b) $P_4(x)$, la suma de los cuatro primeros términos de la serie (8) es

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6},$$

y

$$P_4(0.1) = 1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{200} - \frac{1}{6000} \doteq 0.904,833.$$

Como la aproximación $P_4(0.1)$ tiene un error por defecto de no más de 0.000,0042, concluimos que

$$e^{-0.1} \doteq 0.904,8,$$

es correcta hasta la cuarta cifra decimal.

Las tablas trigonométricas de $\sin x$ y $\cos x$ se pueden construir usando las igualdades

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \quad (9)$$

y

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots \quad (10)$$

las cuales se verifican para todo valor de x . Ya que ambas series son alternantes para cualquier valor de x , el teorema 1 se puede usar para producir una estimación del error en una aproximación que use (9) ó (10).

Ejemplo 2. (a) Si la suma de los cuatro primeros términos de la serie (10) se usa como una aproximación de $\cos 1$ (1 significa un radián), encuentre usando el teorema 1 una cota del error en esta aproximación.

(b) Use los cuatro primeros términos de (10) para aproximar $\cos 1$ hasta la cuarta cifra decimal.

Solución. (a). Si hacemos $x = 1$ en (10) obtenemos una serie alternante para $\cos 1$, y el teorema 1 nos dice que el error cometido al usar la suma de los cuatro primeros términos de esta serie como una aproximación de $\cos 1$ es menor que el valor absoluto de quinto término. Si representamos este error por E , entonces

$$E < \left| \frac{1}{8!} \right| = \frac{1}{40,320},$$

$$E < 0.000,03.$$

Como el quinto término es positivo, la aproximación es por defecto.

(b) $P_4(x)$, la suma de los cuatro primeros términos de la serie (10), es

$$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!},$$

$$P_4(1) = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} = \frac{389}{720} \doteq 0.540,28.$$

Como la aproximación $P_4(1)$ tiene error, defecto y, no mayor que 0.000,03, concluimos que

$$\cos 1 \doteq 0.5403,$$

es correcto hasta la cuarta cifra decimal.

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 8 aproxime la cantidad especificada hasta la tercera cifra decimal usando la serie de Taylor.

- | | |
|-----------------------------------|---------------------|
| 1. e^2 . | 2. \sqrt{e} . |
| 3. e^{-2} . | 4. $e^{0.7}$. |
| 5. $e^{1.1}$. | 6. $e^{-0.2}$. |
| 7. $\cos 2^\circ = \cos 0.0349$. | 8. $\sin 2^\circ$. |

9. Use la serie de Taylor en potencias de $(x - \frac{\pi}{6})$ para el $\sin 32^\circ$ hasta la cuarta cifra decimal.

Sugerencia: 32° en radianes es $\frac{32\pi}{180}$, y $\frac{32\pi}{180} - \frac{\pi}{6} = 0.0349$.

15.3 Construcción de tablas de logaritmos. Como $\ln x$ no está definido para $x = 0$, no hay serie de Taylor para $\ln x$ en potencias de x . Para calcular logaritmos se pueden usar las igualdades;

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots \quad x \in (-1; 1],$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots; \quad x \in [-1; 1)$$

sin embargo, la primera igualdad es cierta solamente para $x \in (-1; 1]$ y la segunda igualdad se verifica solamente para $x \in [-1; 1)$. Además sucede que estas series convergen lentamente excepto en el caso de que x sea numéricamente pequeña, y para hacer pequeño el error cuando estas series se usan para aproximar $\ln(1+x_1)$ ó $\log(1-x_1)$ se debe tomar un número de términos muy grande, a menos que $|x_1|$ sea muy pequeña.

Procederemos a desarrollar una serie que es más conveniente para el cálculo de logaritmos.

Si restamos la segunda igualdad dada de la primera, y usamos el hecho de que

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x),$$

tenemos por el teorema 23 de la Sec. 14.5 que

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots \right),$$

expresión válida para $|x| < 1$. Para transformar la serie anterior a una más cómoda para cálculos, hacemos

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{N+1}{N};$$

donde N es cualquier entero positivo. Entonces

$$x = \frac{1}{2N+1};$$

y tenemos

$$\ln(N+1) = \ln N + 2 \left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2N+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2N+1} \right)^5 + \cdots + \frac{1}{2n-1} \left(\frac{1}{2N+1} \right)^{2n-1} + \cdots \right]. \quad (11)$$

Observamos que para cualquier entero positivo N

$$x = \frac{1}{2N+1} < 1.$$

Por tanto $|x| < 1$ para cualquier entero positivo N . En consecuencia, la igualdad (11) es válida para todo valor entero positivo de N .

Podemos encontrar usando (11) una aproximación del logaritmo de base e de cualquier entero positivo $N+1$, si se conoce el logaritmo de N , o una aproximación de $\log N$. Partimos haciendo $N=1$ en (11) y usando el hecho de que $\ln 1 = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} \ln 2 &= 2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^5 + \frac{1}{7} \left(\frac{1}{2} \right)^7 + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{2} \right)^9 + \cdots \right] \\ &\doteq 2(0.333,333,33 + 0.012,345,68 + 0.000,823,06 \\ &\quad + 0.000,065,27 + 0.000,010,08 + \cdots). \end{aligned}$$

Si sumamos los cuatro primeros términos, obtenemos

$$\ln 2 \doteq 2(0.346,572,97) \quad \text{ó} \quad \ln 2 \doteq 0.693,15$$

correcto hasta la quinta cifra decimal.

Para encontrar una aproximación de $\ln 3$, hacemos $N=2$ y usando la aproximación de $\ln 2$ en (11) obtenemos

$$\begin{aligned} \ln 3 &= \ln 2 + 2 \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} \right)^5 + \frac{1}{7} \left(\frac{1}{3} \right)^7 + \cdots \right] \\ &\doteq \ln 2 + 2(0.200,000,00 + 0.002,666,67 + 0.000,064,00 \\ &\quad + 0.000,001,80 + \cdots). \end{aligned}$$

Al sustituir la aproximación de $\ln 2$ y usar la suma de los cuatro primeros términos del paréntesis, obtenemos

$$\ln 3 \doteq 1.098,610,08 \quad \text{ó} \quad \ln 3 \doteq 1.098,61$$

correcto hasta la quinta cifra decimal.

Podemos establecer una cota en el error cometido al aproximar un logaritmo por medio de (11) en la forma siguiente

Si el último término usado en el cálculo de $\ln(N+1)$ es $\frac{1}{2n-1}$

$$\left(\frac{1}{2N+1} \right)^{2n-1} \text{ el error está dado por}$$

$$E = 2 \left[\frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{2N+1} \right)^{2n+1} + \frac{1}{2n+3} \left(\frac{1}{2N+1} \right)^{2n+3} + \cdots \right].$$

Sea

$$k = \frac{1}{2N+1}.$$

Entonces

$$E = 2k^{2n+1} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{k^2}{2n+3} + \frac{k^4}{2n+5} + \cdots \right)$$

y

$$E < \frac{2k^{2n+1}}{2n+1} (1 + k^2 + k^4 + k^6 + \cdots)$$

Por tanto

$$E < \frac{2k^{2n+1}}{(2n+1)(1-k^2)}. \quad (12)$$

Para ilustrar el uso de (12), en la aproximación de $\ln 2$ vemos que

$$E_2 < \frac{2 \left(\frac{1}{2} \right)^{11}}{10 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right]} = \frac{1}{44} \left(\frac{1}{2} \right)^9 \doteq 0.000,001,2.$$

En la aproximación para $\ln 3$ encontramos que

$$E_3 < \frac{2 \left(\frac{1}{3} \right)^9}{9 \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right]} = \frac{1}{108} \left(\frac{1}{3} \right)^7 \doteq 0.000,000,12.$$

En conclusión, vemos que

$$\ln 2 \doteq 0.693,15,$$

correcto hasta la quinta cifra decimal.

Al investigar el error en la aproximación de $\ln 3$, debemos considerar E_2 (el error en la aproximación de $\ln 2$) así como E_3 , ya que la aproximación de $\ln 2$ se usó para el cálculo de la aproximación de $\ln 3$. Como

$$E_2 < 0.000,001,2 \quad \text{y} \quad E_3 < 0.000,000,12$$

se deduce que el error en la aproximación de $\ln 3$ es menor que 0.000,001,32. En consecuencia, podemos establecer que

$$\ln 3 \doteq 1.098,61.$$

correcto hasta la quinta cifra decimal.

Note que los $\ln 2$ y $\ln 3$ calculados son de base e o logaritmos naturales. Si deseamos obtener el logaritmo común (o el logaritmo de base 10) de un número N basándonos en su logaritmo natural, usamos la igualdad

$$\log_{10} N = \frac{\ln N}{\ln 10}$$

6

$$\log_{10} N \doteq (0.434,295,5) \ln N.$$

En la construcción de las tablas de logaritmos, el cálculo de logaritmos de números primos es básico, el logaritmo de otros números se puede obtener de ellos usando las leyes de logaritmos.

Ejemplo.

$$\ln 9 = \ln 3^2 = 2 \ln 3; \quad \ln \frac{1}{3} = \ln 2 - \ln 3; \quad \ln 6 = \ln 2 + \ln 3.$$

EJERCICIOS

Aproxime cada uno de los siguientes logaritmos hasta la cuarta cifra decimal.

- | | |
|-------------------|--------------------|
| 1. $\ln 5$. | 2. $\ln 7$. |
| 3. $\ln 11$. | 4. $\ln 13$. |
| 5. $\ln 4$. | 6. $\ln 6$. |
| 7. $\ln 8$. | 8. $\ln 10$. |
| 9. $\ln_{10} 2$. | 10. $\ln_{10} 3$. |

15.4 Integración aproximada usando series infinitas. La integral definida $\int_a^b F(x) dx$ se puede calcular cuando podemos encontrar una antiderivada de G de F en $[a; b]$. Por el Teorema Fundamental del cálculo, obtenemos

$$\int_a^b F(x) dx = G(x) \Big|_a^b = G(b) - G(a).$$

Sin embargo, como comentamos en la Sec. 7.1 no siempre es posible expresar $\int F(x) dx$ en términos de la correspondiente de x bajo una función G que se pueda obtener por medio de sumas, productos cocientes o composiciones de un número finito de funciones algebraicas, trigonométricas, trigonométricas inversas, exponenciales, o logarítmicas.

Las integrales

$$\int \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{e^x}{x} dx, \quad \int \sqrt{1-x^2} dx$$

son del tipo antes mencionado.

Algunas veces podemos encontrar un valor aproximado de $\int_a^b F(x) dx$ usando una serie de potencias. El procedimiento es simplemente desarrollar el integrando $F(x)$ en una serie de Taylor, y después integrar término por término, tantos como

se desee. Esto es para aproximar $\int_a^b F(x) dx$, desarrollamos $F(x)$ en una serie de potencias

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots, \quad |x| < l,$$

y después integramos término por término para obtener

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b a_0 dx + \int_a^b a_1x dx + \int_a^b a_2x^2 dx + \cdots + \int_a^b a_nx^n dx + \cdots,$$

6

$$\int_a^b F(x) dx = a_0x \Big|_a^b + a_1 \frac{x^2}{2} \Big|_a^b + a_2 \frac{x^3}{3} \Big|_a^b + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b + \cdots. \quad (13)$$

Por supuesto, los límites de integración a y b deben de estar dentro del intervalo de convergencia de la serie de potencias. En particular, si $|x_1| < l$, tenemos por (13) que

$$\int_a^b F(x) dx = a_0x_1 + a_1 \frac{x_1^2}{2} + a_2 \frac{x_1^3}{3} + \cdots + a_n \frac{x_1^{n+1}}{n+1} + \cdots. \quad (14)$$

Por ejemplo, se puede demostrar que (vea ejercicio 6 de la Sec. 14.6).

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} + \cdots, \quad |t| < 1. \quad (15)$$

Como $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x$ (vea ejercicio 7 de la Sec. 14.6), tenemos por (14) y (15) que

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots, \quad |x| < 1. \quad (16)$$

De esta manera obtenemos el desarrollo de la serie de Taylor en potencia de x para $\arctan x$, en forma mucho más fácil que usando la fórmula de Taylor directamente para $\arctan x$.

Ejemplo 1. Calcule $\int_{0.2}^1 \frac{\cos x}{x} dx$ correcta hasta la tercera cifra decimal.

Solución. Al usar la igualdad (10) que se verifique para todo valor de x , y el teorema 25 del capítulo 14, obtenemos

$$\frac{\cos x}{x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \frac{x^5}{6!} + \cdots, \quad x \neq 0.$$

En consecuencia

$$\int_{0.2}^1 \frac{\cos x}{x} dx = \int_{0.2}^1 \frac{1}{x} dx - \int_{0.2}^1 \frac{x}{2!} dx + \int_{0.2}^1 \frac{x^3}{4!} dx - \int_{0.2}^1 \frac{x^5}{6!} dx + \cdots,$$

entonces

$$\int_{0.2}^1 \frac{\cos x}{x} dx = \ln x \Big|_{0.2}^1 - \frac{x^2}{4} \Big|_{0.2}^1 + \frac{x^4}{96} \Big|_{0.2}^1 - \frac{x^6}{4320} \Big|_{0.2}^1 + \cdots.$$

Sea

$$P_3(x) = \ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{96}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} P_3(x) \Big|_{0.2}^1 &= \ln 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{96} - \left[\ln 0.2 - \frac{(0.2)^2}{4} + \frac{(0.2)^4}{96} \right] \\ &= \frac{1}{96} + \ln 5 + \frac{(0.2)^2}{4} - \frac{1}{4} - \frac{(0.2)^4}{96} \\ &\doteq 1.3798. \end{aligned}$$

El error en esta aproximación es menos que

$$\left| \frac{-x^6}{4320} \right|_{0.2}^1 = \left| \frac{1}{4320} - \frac{(0.2)^6}{4320} \right| < 0.0003.$$

Por tanto

$$\int_{0.2}^1 \frac{\cos x}{x} dx \doteq 1.380,$$

es correcta hasta la tercera cifra decimal.

Podemos encontrar integrales de la forma $\int_a^b \frac{F(x)}{G(x)} dx$ donde $F(a) = 0$ y $G(a)$ $= 0$ pero $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x)}{G(x)}$ existe. En tal caso definiremos $\int_a^b \frac{F(x)}{G(x)} dx$ como sigue:

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{F(x)}{G(x)}, \quad x \neq a, \\ \int_a^b \frac{F(x)}{G(x)} dx &= \int_a^b H(x) dx \quad \text{donde} \\ H(a) &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x)}{G(x)}. \end{aligned}$$

A menudo podemos encontrar una aproximación a una integral de este tipo usando una serie apropiada.

Ejemplo 2. Calcule $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ correcta hasta la tercera cifra decimal; esto es calcule $\int_0^1 H(x) dx$, correcta hasta la tercera cifra decimal, donde $H(x) = \frac{\sin x}{x}$; $x \neq 0$ y $H(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Solución. Sabemos que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

en \mathbb{R} . Entonces por el teorema 25 del capítulo 14, tenemos, para $x \neq 0$,

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \dots$$

Notamos que la serie del segundo miembro de esta igualdad converge a 1 cuando $x = 0$.En consecuencia, para la función H definida, tenemos

$$H(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \dots$$

en \mathbb{R} , e

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^1 H(x) dx = \int_0^1 (1) dx - \int_0^1 \frac{x^2}{3!} dx + \int_0^1 \frac{x^4}{5!} dx - \int_0^1 \frac{x^6}{7!} dx + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \dots \end{aligned}$$

Ya que $\frac{1}{7 \cdot 7!} \doteq 0.000,028$, el error por aproximación hecho al usar $1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!}$ para calcular $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ es menor que 0.000,028. Como $1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} \doteq 0.94611$ es correcto hasta la quinta cifra decimal, concluimos que

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \doteq 0.946,$$

es correcta hasta la tercera cifra decimal.

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 8 encuentre, usando una serie infinita apropiada, una aproximación correcta hasta la tercera cifra decimal de la integral definida dada.

- $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx.$
- $\int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x} dx.$
- $\int_0^1 e^{-x^2} dx.$
- $\int_0^{0.8} \frac{e^x - 1}{x} dx.$
- $\int_0^{1/2} \sqrt{x} \sin x dx.$
- $\int_0^1 \sin x^2 dx.$
- $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx.$
- $\int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$

9. Encuentre el área correcta hasta la tercera cifra decimal, de la región limitada por la gráfica de $y = (\sin x)/x$, el eje x , y las gráficas de $x = 1$, y $x = 2$.En cada uno de los ejercicios del 10 al 14 use el desarrollo (16) de $\arctan x$ para aproximar la expresión dada hasta la cuarta cifra decimal.

- $\arctan \frac{1}{3}.$
- $\arctan \frac{1}{5}.$

12. $\arctan \frac{1}{4}$.13. $\arctan 0.3$.

14. Demuestre que $\pi/4 = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$. Use esta igualdad y el desarrollo (16) para $\arctan x$ para demostrar que $\pi/4 \approx 0.78539$ es correcta hasta la cuarta cifra decimal, y después demuestre que $\pi \approx 3.14156$, es correcta hasta la cuarta cifra decimal.

15.5 Integración aproximada por medio de la regla trapezoidal. El método de la Sec. 15.4, por medio del cual aproximamos $\int_a^b F(x) dx$ usando el desarrollo en serie de potencias de $F(x)$, puede no ser conveniente si esta serie converge lentamente. Además el método de la Sec. 15.4 no se aplica cuando solamente conocemos los valores de $F(x)$ para valores particulares de x y no podemos encontrar el desarrollo de $F(x)$. En esta y la próxima sección desarrollaremos métodos para aproximar $\int_a^b F(x) dx$, que se pueden aplicar en cualquiera de los casos anteriores. En estas secciones supondremos que $F(x) \geq 0$ para $x \in [a; b]$.

Procederemos a deducir una fórmula que aproxima a $\int_a^b F(x) dx$ cuando conocemos algunos valores de $F(x)$ para valores particulares de $x \in [a; b]$. Aunque los valores de x se pueden tomar arbitrariamente en el intervalo $[a; b]$, restringiremos nuestra atención a valores de x tomados en intervalos iguales. Por conveniencia dispondremos estos valores de x y los valores correspondientes de $F(x)$ en una tabla de dos columnas, una para x y otra para $F(x)$.

Sea P_n una partición que divida el intervalo $[a; b]$ en n partes, cada una de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, siendo los puntos que determinan esta partición

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, \dots, x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x, x_n = b.$$

Estos valores de x y los valores correspondientes de $F(x)$ se muestran en la tabla 15.1.

Los valores de la segunda columna se pueden calcular si tenemos una fórmula para $F(x)$. Si $F(x)$ no se conoce, los valores de la segunda columna se obtienen por algún otro método por ejemplo observación o experimentación. Aunque no suponemos que conozcamos una fórmula para $F(x)$, supondremos la existencia de una función continua F , cuya gráfica contenga a los puntos de la tabla.

De las consideraciones del capítulo 5, sabemos que cada una de las sumas

$$\sum_{i=1}^n F[a + (i-1)\Delta x] \Delta x = \Delta x \sum_{i=1}^n F[a + (i-1)\Delta x] \quad (17)$$

y

$$\sum_{i=1}^n F(a + i\Delta x) \Delta x = \Delta x \sum_{i=1}^n F(a + i\Delta x) \quad (18)$$

es una aproximación de $\int_a^b F(x) dx$. Insistimos que la suma (17) es la suma de las áreas de n rectángulos, con Δx como base y alturas

$$F(a), \quad F(a + \Delta x), \quad F(a + 2\Delta x), \dots, F[a + (n-1)\Delta x].$$

Similarmente, la suma (18) es la suma de las áreas de n rectángulos, con Δx como base y alturas

$$F(a + \Delta x), \quad F(a + 2\Delta x), \quad F(a + 3\Delta x), \dots, F(b).$$

Tabla 15.1

x	$F(x)$
a	$F(a)$
$a + \Delta x$	$F(a + \Delta x)$
$a + 2\Delta x$	$F(a + 2\Delta x)$
$a + 3\Delta x$	$F(a + 3\Delta x)$
\vdots	\vdots
$a + (n-1)\Delta x$	$F[a + (n-1)\Delta x]$
b	$F(b)$

Consideraremos ahora otra suma que es una mejor aproximación de $\int_a^b F(x) dx$

que las sumas (17) y (18). Esta nueva suma se basa en área de trapecios, en lugar de áreas de rectángulos.

En cada punto $(x_i, 0)$, donde $x_i = a + i\Delta x$, construimos la ordenada con longitud $y_i = F(x_i)$, y construimos trapecios, como se muestra en la Fig. 15.1. El área de un trapecio es igual a la mitad del producto de su altura por la suma de las longitudes de sus lados paralelos; en consecuencia, el área del primer trapecio es

$$\frac{1}{2}\Delta x(y_0 + y_1),$$

el área del segundo es

$$\frac{1}{2}\Delta x(y_1 + y_2),$$

el área del n -ésimo trapecio es

$$\frac{1}{2}\Delta x(y_{n-1} + y_n).$$

Sumando estas expresiones, obtenemos la suma de las áreas de n trapecios que es

$$\Delta x[\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n].$$

Como ésta suma es una aproximación de área de la región limitada por las gráficas de $y = F(x)$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2. Sea F una función caracterizada en el intervalo $[a; b]$ por la tabla 15.1, sea n un entero positivo y $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Si $y_i = F(a + i\Delta x)$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n$, entonces

$$\int_a^b F(x) dx \approx \Delta x \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n \right) \quad (19)$$

Este teorema se conoce como la *regla trapezoidal*.

Observe que en el segundo miembro de (19) los coeficientes de y_0 y y_n son $\frac{1}{2}$ y las demás ordenadas tienen coeficiente 1.

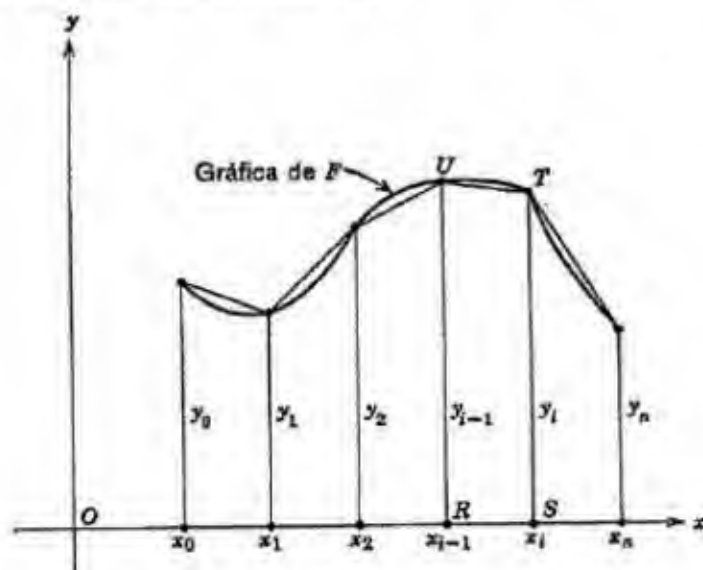


Fig. 15.1

Generalmente no hay manera de determinar el error cometido al aproximar $\int_a^b F(x) dx$ usando (19). Sin embargo, si la gráfica de F es cóncava hacia arriba en $(a; b)$, las cuerdas que unen los extremos de las ordenadas $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ están arriba de la gráfica. En consecuencia, el área de cada trapecio es mayor que el área bajo el correspondiente arco de la gráfica de F . Entonces la aproximación para

$$\int_a^b F(x) dx \text{ dada por (19) es mayor que } \int_a^b F(x) dx.$$

En forma similar, si la gráfica de F es cóncava hacia abajo en $(a; b)$, la aproximación para $\int_a^b F(x) dx$ dada por (19) es menor que $\int_a^b F(x) dx$.

Ejemplo 1. (a) Use la regla trapezoidal, para encontrar una aproximación para $\int_0^5 \sqrt{x} dx$ dividiendo el intervalo $[0; 5]$ en 10 partes iguales y redondee a tres cifras decimales.

(b) ¿Es esta aproximación mayor o menor que $\int_0^5 \sqrt{x} dx$?

(c) Calcule $\int_0^5 \sqrt{x} dx$ por el teorema fundamental del cálculo.

Solución. (a) $\Delta x = 0.5$ y

$x_0 = 0,$	$y_0 = \sqrt{0} = 0.000;$
$x_1 = 0.5,$	$y_1 = \sqrt{0.5} \doteq 0.227;$
$x_2 = 1,$	$y_2 = \sqrt{1} = 1.000;$
$x_3 = 1.5,$	$y_3 = \sqrt{1.5} \doteq 1.225;$
$x_4 = 2,$	$y_4 = \sqrt{2} \doteq 1.414;$
$x_5 = 2.5,$	$y_5 = \sqrt{2.5} \doteq 1.581;$
$x_6 = 3,$	$y_6 = \sqrt{3} \doteq 1.732;$
$x_7 = 3.5,$	$y_7 = \sqrt{3.5} \doteq 1.871;$
$x_8 = 4,$	$y_8 = \sqrt{4} = 2.000;$
$x_9 = 4.5,$	$y_9 = \sqrt{4.5} \doteq 2.121;$
$x_{10} = 5,$	$y_{10} = \sqrt{5} \doteq 2.236.$

Al usar (19) obtenemos

$$\int_0^5 \sqrt{x} dx \doteq 7.144.$$

(b) Sea $F(x) = x^{1/2}$ entonces

$$F'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} \text{ y } F''(x) = -\frac{1}{4} x^{-3/2} = -\frac{1}{4x^{3/2}}.$$

Observe que $F''(x) < 0$ para $x \in [0; +\infty)$ y por tanto la gráfica de la función $F = \{(x, y) | y = x^{1/2}\}$ es cóncava hacia abajo en $(0; +\infty)$. En consecuencia la aproximación obtenida en (a) es menor que $\int_0^5 \sqrt{x} dx$.

(c) En este caso tenemos

$$\int_0^5 x^{3/2} dx = \left[\frac{2}{5} x^{5/2} \right]_0^5 = \frac{2}{5} (5)^{5/2} = 10 \frac{1}{2} \sqrt{5} \doteq 7.454.$$

Ejemplo 2. Use la regla trapezoidal para encontrar una aproximación del área A de la región limitada por el eje x y las gráficas de $x = 0$, $x = 2$, y $y = \sqrt{1+x^3}$. Tome $n = 4$ y redondee a tres cifras decimales.

Solución. $A = \int_0^2 \sqrt{1+x^3} dx$, y nuestro problema es aproximar $\int_0^2 \sqrt{1+x^3} dx$ por la regla trapezoidal.

Como $n = 4$, $\Delta x = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$, y

$x_0 = 0,$	$y_0 = \sqrt{1+0^3} = 1.000;$
$x_1 = \frac{1}{2},$	$y_1 = \sqrt{1+\frac{1}{8}} \doteq 1.061;$
$x_2 = 1,$	$y_2 = \sqrt{1+1} \doteq 1.414;$
$x_3 = 1\frac{1}{2},$	$y_3 = \sqrt{1+\frac{27}{8}} \doteq 2.092;$
$x_4 = 2,$	$y_4 = \sqrt{1+8} = 3.000.$

Al usar (19) obtenemos

$$A = \int_0^2 \sqrt{1+x^2} dx \approx 3.283.$$

EJERCICIOS

1. Use la regla trapezoidal para encontrar una aproximación del área de la región limitada superiormente por la gráfica de $y = \sqrt{x^2 - 1}$, a la izquierda por la gráfica de $x = 2$, inferiormente por el eje x , y a la derecha por la gráfica de $x = 3$. Tome $n = 6$ y redondee a dos cifras decimales.

En cada uno de los ejercicios del 2 al 4 use la regla trapezoidal para encontrar una aproximación de $\int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2} dx$.

2. Tome $n = 3$ y redondee a dos cifras decimales.

3. Tome $n = 5$ y redondee a tres cifras decimales.

4. Tome $n = 7$ y redondee a tres cifras decimales.

5. Por integración calcule el valor de $\int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2} dx$ correcta hasta la tercera cifra decimal y compárelo con los resultados de los ejercicios 2, 3 y 4.

Nota: Al final de la Sec. 15.6 aparecen ejercicios adicionales sobre el uso de la regla trapezoidal.

15.6 Integración aproximada por la regla de Simpson. Desarrollaremos el método llamado regla de Simpson para aproximar $\int_a^b F(x) dx$. Antes demostraremos el siguiente teorema.

Teorema 3. Sea $y = G(x) = rx^2 + sx + t$ una ecuación de la parábola con eje vectorial determinada* por los tres puntos no colineales

$$(a, y_0), \quad \left(\frac{a+b}{2}, y_1\right), \quad (b, y_2),$$

donde y_0, y_1, y_2 son no negativos. Entonces el área de la región limitada por esta parábola, el eje x y las gráficas de $x = a$ y $x = b$ es

$$A = \int_a^b G(x) dx = \frac{b-a}{6} \left[G(a) + 4G\left(\frac{a+b}{2}\right) + G(b) \right]$$

6

$$A = \frac{b-a}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2). \quad (20)$$

Demostración. Al usar el método de integral definida, obtenemos

$$A = \int_a^b G(x) dx = \int_a^b (rx^2 + sx + t) dx = \left[\frac{r}{3} x^3 + \frac{s}{2} x^2 + tx \right]_a^b.$$

* Por tres puntos distintos no colineales, pasa una y solo una parábola con eje vertical.

Por tanto

$$A = \frac{r}{3}(b^3 - a^3) + \frac{s}{2}(b^2 - a^2) + t(b - a). \quad (21)$$

Como

$$G(x) = rx^2 + sx + t,$$

tenemos

$$y_0 = G(a) = ra^2 + sa + t,$$

$$4y_1 = 4G\left(\frac{a+b}{2}\right) = 4r\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 4s\left(\frac{a+b}{2}\right) + 4t$$

$$= r(b^2 + 2ab + a^2) + 2s(b+a) + 4t,$$

$$y_2 = G(b) = rb^2 + sb + t,$$

de esto se deduce que

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2r(b^2 + ab + a^2) + 3s(b+a) + 6t. \quad (22)$$

Se deja al estudiante el comprobar que (20) puede deducirse de (21) y (22). ■

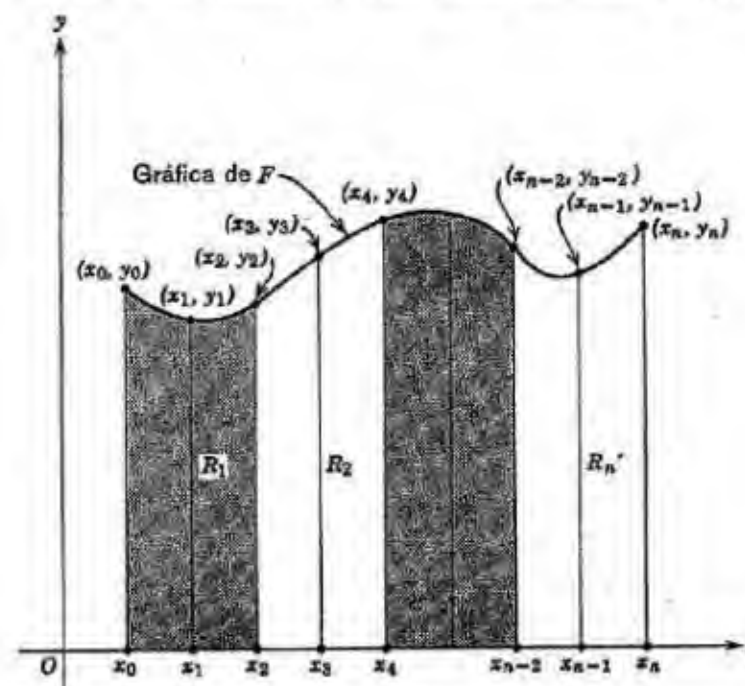


Fig. 15.2

Ahora deduciremos la regla de Simpson. Sea F una función tal que $F(x) \geq 0$ para $x \in [a; b]$. Sea n un entero par y P_n una partición del intervalo $[a; b]$ en n partes, cada una de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$; y determinada por los puntos

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, \dots, x_i = a + i\Delta x, \dots, x_n = b.$$

En cada punto $x_i, i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ construimos la ordenada con longitud

$y_i = F(x_i)$, como se indica en la Fig. 15.2. Como n es par, podemos dividir el intervalo $[a; b]$ en n' subintervalos, donde $n' = \frac{1}{2}n$, siendo estos subintervalos $[x_0; x_2], [x_2; x_4], \dots, [x_{n-2}; x_n]$.

Sea R_1 la región limitada superiormente por la gráfica de F , inferiormente por el eje x , a la izquierda por la ordenada y_0 y a la derecha por la ordenada y_2 . Sean R_2, \dots, R_n regiones semejantes, las regiones R_1, R_2, \dots, R_n corresponden respectivamente a los n' subintervalos descritos (vea Fig. 15.2).

Si consideramos la expresión,

$$A_1 = \frac{2\Delta x}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

por el teorema 3 vemos que A_1 es el área de la región limitada a la izquierda por la gráfica de $x = a$, inferiormente por el eje x , a la derecha por la gráfica de $x = x_2$, y superiormente por la parábola que pasa por los puntos (x_0, y_0) , (x_1, y_1) y (x_2, y_2) . Tomaremos A_1 como una aproximación del área de R_1 ,

$$y \quad A_2 = \frac{2\Delta x}{6}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

como una aproximación de área R_2 y así sucesivamente, con

$$A_{n'} = \frac{2\Delta x}{6}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

como una aproximación del área $R_{n'}$.

Sumando las aproximaciones $A_1, A_2, \dots, A_{n'}$ de las áreas de las regiones $R_1, R_2, \dots, R_{n'}$ obtenemos

$$A_1 + A_2 + \dots + A_{n'}$$

$$= \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n),$$

donde $n' = \frac{1}{2}n$. Con lo anterior hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 4. Sea F una función caracterizada por los pares de la tabla 15.1, siendo n par y $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Si $y_i = F(a + i\Delta x)$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n$, entonces

$$\int_a^b F(x) dx \doteq \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n). \quad (23)$$

Este teorema se conoce como la *regla de Simpson*.

Observe que en el paréntesis del segundo miembro de (23) los coeficientes de y_0 y y_n son iguales a 1, los de y con subíndice par son iguales a 2 y los y con subíndice impar son iguales a 4.

Ejemplo. Use la regla de Simpson para encontrar una aproximación de

$\int_0^2 \sqrt{1+x^3} dx$. Tome $n = 4$ y redondee a tres cifras decimales (ver ejemplo 2, Sec. 15.5).

Solución. Al sustituir en (23) los valores de y_0, y_1, y_2, y_3 y y_4 que se encontraron en el ejemplo 2 de la Sec. 15.5, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{1+x^3} dx &\doteq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right) [1.000 + 4(1.061) + 2(1.414) + 4(2.092) + 3.00] \\ &\doteq \frac{1}{6} (19.440). \end{aligned}$$

En consecuencia, por la regla de Simpson

$$\int_0^2 \sqrt{1+x^3} dx \doteq 3.240.$$

En el ejemplo 2 de la Sec. 15.5 usando la regla trapezoidal se obtuvo el resultado

$$\int_0^2 \sqrt{1+x^3} dx \doteq 3.283.$$

En la mayoría de las ocasiones una aproximación de $\int_a^b F(x) dx$ dada por la regla de Simpson es más exacta que la obtenida por la regla trapezoidal.

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 6 use (a) la regla trapezoidal y (b) la regla de Simpson para encontrar una aproximación de la integral definida dada. En cada caso use el valor de n especificando como el número de intervalos y redondee a dos cifras decimales.

1. $\int_1^8 3x^2 dx; n = 8.$

2. $\int_0^3 x\sqrt{9-x^2} dx; n = 6.$

3. $\int_0^4 x\sqrt{9+x^2} dx; n = 4.$

4. $\int_0^6 x\sqrt{9+x^2} dx; n = 8.$

5. $\int_0^2 \sqrt{1+x^3} dx; n = 4.$

6. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4+x^3}}; n = 4.$

7. Use el teorema fundamental del cálculo para encontrar el valor de la integral definida del ejercicio 1.

8. Use el teorema fundamental del cálculo para encontrar el valor de la integral definida del ejercicio 2.

9. Use el teorema fundamental del cálculo para encontrar el valor de la integral definida del ejercicio 3, correcto hasta la segunda cifra decimal.

10. Use la regla trapezoidal y la regla de Simpson, para encontrar una aproximación de $\int_1^5 F(x) dx$ donde $y_i = F(1 + i\Delta x)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, $\Delta x = 1$; los valores de x_i y y_i se dan en la siguiente tabla. Redondee a una cifra decimal.

x_i	y_i
$x_0 = 1$	$y_0 = 15$
$x_1 = 2$	$y_1 = 23$
$x_2 = 3$	$y_2 = 30$
$x_3 = 4$	$y_3 = 24$
$x_4 = 5$	$y_4 = 21$

15.7 Método de Newton. Supongamos que la gráfica G de la función

$$F = \{(x, y) \mid y = F(x)\}$$

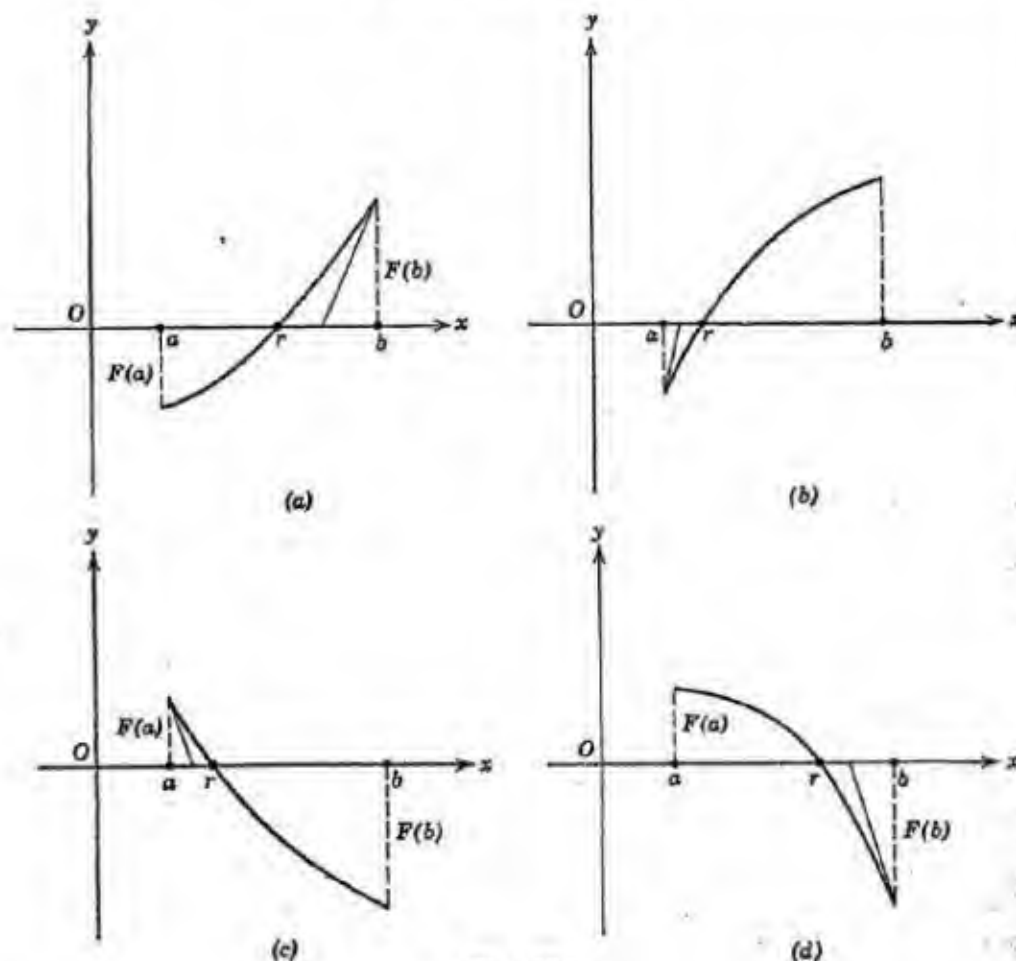


Fig. 15.3

cruza el eje x en el punto $R(r, 0)$, como se indica en la Fig. 15.3(a), (b), (c) y (d). Si $F(r) = 0$, r es una solución de $F(x) = 0$. Sean $F(a)$ y $F(b)$ de signos opuestos, y a, b tales que $a < r < b$. Supongamos que F'' es continua en $[a; b]$ y que $F'(x)$ y $F''(x)$ son diferentes de cero en $[a; b]$.

Entonces G no tiene tangentes horizontales ni puntos de inflexión en $(x_i, F(x_i))$ para $x_i \in [a; b]$, y $F(x)$ es creciente o decreciente en $[a; b]$.

Como $F(a)$ y $F(b)$ son de signo opuesto y como $F''(x)$ es positivo o negativo (pero no cero) en $[a; b]$, necesitamos considerar los cuatro casos siguientes:

- (i) $F(a) < 0, F(b) > 0, F''(x) > 0$ para $x \in [a; b]$ [Fig. 15.3(a)];
- (ii) $F(a) < 0, F(b) > 0, F''(x) < 0$ para $x \in [a; b]$ [Fig. 15.3(b)];
- (iii) $F(a) > 0, F(b) < 0, F''(x) > 0$ para $x \in [a; b]$ [Fig. 15.3(c)];
- (iv) $F(a) > 0, F(b) < 0, F''(x) < 0$ para $x \in [a; b]$ [Fig. 15.3(d)];

Recordemos que G es cóncava hacia arriba si $F''(x) > 0$ [Fig. 15.3(a) y (c)] y G es cóncava hacia abajo si $F''(x) < 0$ [como en Fig. 15.3(b) y (d)]. En las Figs 15.3(a) y (d) la tangente a G en $(b, F(b))$ cruza al eje x en el punto $(x_1, 0)$ situado entre $(r, 0)$ y $(b, 0)$; en las Fig. 15.3(b) y (c) la tangente a F en $(a, F(a))$ cruza el eje x en el punto $(x_1, 0)$ situado entre $(a, 0)$ y $(r, 0)$.

La tangente a G en $(b, F(b))$ en (i) y (iv) tiene por ecuación

$$y - F(b) = F'(b)(x - b)$$

sea $(x_1, 0)$ el punto de intersección de esta tangente con el eje x , entonces

$$x_1 = b - \frac{F(b)}{F'(b)}. \quad (24)$$

La ecuación de la tangente a G en $(a, F(a))$ es en (ii) y (iii)

$$y - F(a) = F'(a)(x - a)$$

El punto de intersección de esta tangente con el eje x es

$$x_1 = a - \frac{F(a)}{F'(a)}. \quad (25)$$

Note que si r_1 representa a b en los casos (i) y (iv) y a a en (ii) y (iii), entonces la tangente a G en $(r_1, F(r_1))$ corta al eje x en el punto $(x_1, 0)$ donde

$$x_1 = r_1 - \frac{F(r_1)}{F'(r_1)}. \quad (26)$$

Partiendo de r_1 como una primera aproximación de la solución r , podemos, usando (26) encontrar una mejor aproximación de r . Este proceso se llama *método de Newton* y se puede establecer de la siguiente forma.

Encuentre dos números a_1 y b_1 , cada uno con una cifra decimal y cuya diferencia es de 0.1, con la propiedad de que si r es una solución de $F(x) = 0$, entonces $a_1 < r < b_1$. Escoja entre a_1 y b_1 el número con la propiedad de que $F(x)$ y $F''(x)$ tengan el mismo signo en $[a_1; b_1]$, use este número como una *primera aproximación* de r y representela por r_1 . Después use (26) para encontrar

dos números a_2 y b_2 , cada uno con dos decimales y que difieran en 0.01 con la propiedad de que $a_2 < r < b_2$. De a_2 y b_2 , el que tenga la propiedad de que $F(x)$ y $F''(x)$ tengan el mismo signo se toma como *segunda aproximación* de r y se representa por r_2 .

Si usamos

$$x_i = r_i - \frac{F(r_i)}{F'(r_i)} \quad (27)$$

con $i = 2$, podemos encontrar una tercera aproximación r_3 de r con cuatro cifras decimales. Usando (27) con $i = 3, 4, \dots$ el proceso se puede continuar.

En cada iteración se pasa de una aproximación con k cifras decimales a una aproximación con $2k$ cifras decimales.

La discusión del error cometido al usar el método de Newton para aproximar una raíz se omitirá.

Ejemplo 1. Demuestre que la ecuación

$$x^3 + 4x - 6 = 0$$

tiene una solución r , tal que $1 < r < 2$, y use el método de Newton para encontrar una aproximación de r con cuatro cifras decimales.

Solución. Sea $F(x) = x^3 + 4x - 6$, observe que $F(1) = -1$ y $F(2) = 10$. Como F es continua en \mathbb{R} , la gráfica G de F debe cortar al eje x en algún punto $(r, 0)$, donde $1 < r < 2$. En este caso

$$F'(x) = 3x^2 + 4 \quad \text{y} \quad F''(x) = 6x.$$

Con ayuda de la gráfica y/o una tabulación, encontramos que

$$F(1.1) \doteq -0.269 \quad \text{y} \quad F(1.2) \doteq 0.528.$$

Como $F(1.1) < 0$, $F(1.2) > 0$ y $F''(x) > 0$ para $x \in [1.1; 1.2]$, caemos en el caso (i) y escogemos como nuestra primera aproximación $r_1 = 1.2$. Entonces $F(r_1) \doteq 0.528$ y $F'(r_1) = 8.32$, y al usar (26) obtenemos

$$x_1 = 1.2 - \frac{0.528}{8.32} \quad \text{ó} \quad x_1 \doteq 1.136.$$

En consecuencia puede ser 1.13 ó 1.14 observamos que

$$F(1.13) \doteq -0.0371 \quad \text{y} \quad F(1.14) \doteq 0.0415.$$

Ya que $F(1.13) < 0$, $F(1.14) > 0$, y $F''(x) > 0$ para $x \in [1.13; 1.14]$, la situación cae de nuevo en el caso (i) y escogemos como segunda aproximación $r_2 = 1.14$. Como $F(r_2) \doteq 0.0415$ y $F'(r_2) = 7.8988$, al usar (27) con $i = 2$, obtenemos

$$x_2 = 1.14 - \frac{0.0415}{7.8988} \quad \text{ó} \quad x_2 \doteq 1.1347.$$

Nuestra conclusión es que la ecuación dada tiene una solución r entre 1 y 2,

y la aproximación de r con cuatro decimales obtenida por el método de Newton es 1.1347.

Ejemplo 2. Demuestre que la ecuación $e^x + x - 2 = 0$ tiene una solución real r entre 0 y 1, use el método de Newton para encontrar una aproximación de r con dos cifras decimales.

Solución. Sea $F(x) = e^x + x - 2$; entonces $F'(x) = e^x + 1$, $F''(x) = e^x$. Ya que $F(0) = -1$, y $F(1) \doteq 1.718$ son de signo opuesto, y $F'(x) > 0$ para $x \in [0; 1]$ hay una y solo una solución r tal que $0 < r < 1$.

Con ayuda de una tabla de potencias de e , encontramos que

$$F(0.4) \doteq -0.1082 \quad \text{y} \quad F(0.5) \doteq 0.1487.$$

Como $F(0.4) < 0$, $F(0.5) > 0$, y $F''(x) > 0$ para $x \in [0.4; 0.5]$, la situación cae en el caso (i), y escogemos como primera aproximación $r_1 = 0.5$. $F(r_1) \doteq 0.1487$ y $F'(r_1) = 2.6487$, al usar (26) obtenemos

$$x_1 \doteq 0.5 - \frac{0.1487}{2.6487} \quad \text{ó} \quad x_1 \doteq 0.4435.$$

Nuestra conclusión es que 0.44 es una aproximación de r correcta hasta la segunda cifra decimal.

EJERCICIOS

1. Use el método de Newton para calcular la solución real de $x^3 - 2x - 5 = 0$ correcta hasta la cuarta cifra decimal.
2. Encuentre la solución real de $x^3 - 3x - 3 = 0$ correcta hasta la cuarta cifra decimal, usando el método de Newton.
3. Demuestre que $x^3 - x^2 - 2 = 0$ tiene una solución en 1 y 2. Use el método de Newton para encontrar una aproximación de esta solución con dos decimales.
4. Use el método de Newton para encontrar una aproximación de cuatro cifras de la menor solución positiva de $x^3 - 5x + 2 = 0$.
5. Demuestre que $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$ tiene una solución r entre 2 y 3, y use el método de Newton para encontrar una aproximación de r con dos cifras decimales.
6. Use el método de Newton para encontrar una aproximación con dos cifras decimales de la solución positiva de $2 \sin x = x$.
7. Demuestre que $e^x - 3x = 0$ tiene una solución r entre 1 y 2, encuentre una aproximación de r con dos cifras decimales usando el método de Newton.
8. De la gráfica de $y = \tan x$ y y demuestre que la ecuación $\tan x = x$ tiene un número infinito de soluciones. Use el método de Newton para encontrar una aproximación con cuatro decimales de la menor raíz positiva de $x = x$.
9. Use el método de Newton para obtener una aproximación con dos decimales de la raíz positiva de $x^2 = 5$. Compare su resultado con el obtenido en una tabla de raíces cuadradas.
10. Use el método de Newton para encontrar una aproximación con dos de-

cimales de la solución real de $x^3 = 2$. Compare su resultado con el obtenido de una tabla de raíces cúbicas.

11. (a) Encuentre el área de la región R limitada por las gráficas de $y = 4x - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, y $x = 2$.

(b) Supongamos que la gráfica de $x = a$, divide la región R en dos partes de áreas iguales. Use el método de Newton para encontrar una aproximación de a con dos decimales.

12. La región R limitada superiormente por la gráfica de $y = 2x - x^2$, inferiormente por el eje x y a la derecha por la gráfica de $x = h$, $0 < h < 2$, gira alrededor del eje x para generar un sólido cuyo volumen es $4\pi/15$. Use el método de Newton para encontrar una aproximación de h con dos decimales.

EJERCICIOS ADICIONALES AL CAPITULO 15

1. Use el método de Newton para encontrar una aproximación con cuatro decimales de $\sqrt[3]{47}$.

2. Sea $R_n(x)$ el residuo después de n términos del desarrollo de $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$.

(a) Demuestre que

$$|R_n(x)| \leq \left\{ \frac{|x|^n}{n!} + \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots \right\},$$

esto es

$$|R_n(x)| < \frac{|x|^n}{n!} \left\{ 1 + \frac{|x|}{n+1} + \frac{|x|^2}{(n+1)^2} + \cdots \right\}.$$

(b) Si $|x| < n+1$ en (a), demuestre que

$$|R_n(x)| < \frac{|x|^n/n!}{1 - [|x|/(n+1)]}.$$

3. Demuestre que si $x > 0$ en el ejercicio 2(b).

$$0 < R_n(x) < \frac{x^n/n!}{1 - [x/(n+1)]}$$

4. (a) Si la suma de los seis primeros términos de la serie (8) de la Sec. 15.2 se usa para calcular una aproximación de $e^{-1/2}$, encuentre una cota del error de esta aproximación usando el teorema 1.

(b) Encuentre una aproximación de $e^{-1/2}$ con cuatro decimales, usando los seis primeros términos de la serie (8).

5. Si se usa la suma de los cinco primeros términos de la serie (8) de la Sec. 15.2 para calcular una aproximación de $e^{0.1}$, calcule una cota del error de esta aproximación usando el resultado del ejercicio 3.

6. Usando el resultado del ejercicio 2(b), estime el error que existe en el cálculo del ejemplo 8, Sec. 8.9.

(b) ¿Es su estimación mejor que la dada en el ejemplo?

7. Use la suma de los tres primeros términos del desarrollo de e^x (vea ejercicio 4) para demostrar que el valor de $e^{0.1}$ está entre 1.1050 y 1.1052.

8. Demuestre que la longitud (o perímetro) L de la elipse con representación paramétrica $x = a \sin \theta$, $y = b \cos \theta$, $a > b$, $\theta \in [0; 2\pi]$ es

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} d\theta,$$

donde $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$ es la excentricidad de la elipse.

9. Establezca el desarrollo

$$(1-u)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2 \cdot 4}u^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}u^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}u^4 - \cdots; \quad |u| < 1.$$

10. Demuestre usando el resultado del ejercicio 9, que la fórmula para la longitud L de una elipse se puede expresar

$$L = 4a \left[\int_0^{\pi/2} d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} e^2 \sin^2 \theta d\theta - \frac{1}{2 \cdot 4} \int_0^{\pi/2} e^4 \sin^4 \theta d\theta - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \int_0^{\pi/2} e^6 \sin^6 \theta d\theta - \cdots \right].$$

11. Demuestre, usando las fórmulas de Wallis (vea ejercicio 27 de los ejercicios adicionales al capítulo 7) en las integrales del ejercicio 10 que

$$L = 4a \frac{\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{e^6}{5} - \cdots \right].$$

12. Use el resultado del ejercicio 11, para encontrar una aproximación con tres decimales de la longitud L de una elipse cuyos semiejes miden 10 y 8.

13. Cinco secciones de un barril están separadas 12 unidades una de otra y limitadas por círculos cuyas circunferencias son 90, 100, 104, 100 y 90 unidades. Use la regla trapezoidal para encontrar el volumen del barril.

14. Use la regla de Simpson, para encontrar una aproximación del volumen del barril del ejercicio 13.

Tablas I y II

Tabla I. Tabla abreviada de logaritmos naturales

N	$\log_e N$	N	$\log_e N$	N	$\log_e N$	N	$\log_e N$	N	$\log_e N$
0		2.0	0.69 315	4.0	1.38 629	6.0	1.79 176	8.0	2.07 944
0.1	7.697—10	2.1	0.74 194	4.1	1.41 099	6.1	1.80 829	8.1	2.09 186
0.2	8.391—10	2.2	0.78 846	4.2	1.43 508	6.2	1.82 455	8.2	2.10 413
0.3	8.796—10	2.3	0.83 291	4.3	1.45 862	6.3	1.84 055	8.3	2.11 626
0.4	9.084—10	2.4	0.87 547	4.4	1.48 160	6.4	1.85 630	8.4	2.12 823
0.5	9.307—10	2.5	0.91 629	4.5	1.50 408	6.5	1.87 180	8.5	2.14 007
0.6	9.489—10	2.6	0.95 551	4.6	1.52 606	6.6	1.88 707	8.6	2.15 176
0.7	9.643—10	2.7	0.99 325	4.7	1.54 756	6.7	1.90 211	8.7	2.16 332
0.8	9.777—10	2.8	1.02 962	4.8	1.56 862	6.8	1.91 692	8.8	2.17 475
0.9	9.895—10	2.9	1.06 471	4.9	1.58 924	6.9	1.93 152	8.9	2.18 605
1.0	0.00 000	3.0	1.09 861	5.0	1.60 944	7.0	1.94 591	9.0	2.19 722
1.1	0.09 531	3.1	1.13 140	5.1	1.62 924	7.1	1.96 009	9.1	2.20 827
1.2	0.18 232	3.2	1.16 315	5.2	1.64 866	7.2	1.97 408	9.2	2.21 920
1.3	0.26 236	3.3	1.19 392	5.3	1.66 771	7.3	1.98 787	9.3	2.23 001
1.4	0.33 647	3.4	1.22 378	5.4	1.68 640	7.4	2.00 148	9.4	2.24 071
1.5	0.40 547	3.5	1.25 276	5.5	1.70 475	7.5	2.01 490	9.5	2.25 129
1.6	0.47 000	3.6	1.28 093	5.6	1.72 277	7.6	2.02 815	9.6	2.26 176
1.7	0.53 063	3.7	1.30 833	5.7	1.74 047	7.7	2.04 122	9.7	2.27 213
1.8	0.58 779	3.8	1.33 500	5.8	1.75 786	7.8	2.05 412	9.8	2.28 238
1.9	0.64 185	3.9	1.36 098	5.9	1.77 495	7.9	2.06 686	9.9	2.29 253

Esta tabla da los logaritmos naturales de ciertos números entre 0 y 9.9. Sin embargo, se puede utilizar para obtener los logaritmos de muchos otros números. Supóngase que N es algún número que no está entre 1 y 9.9. Obsérvese que podemos poner

$$N = P \cdot (10)^k,$$

en donde k es un entero positivo o negativo y $1 \leq P \leq 9.9$. De las leyes de los logaritmos tenemos que

$$\log_e N = \log_e [P \cdot (10)^k] = \log_e P + k \log_e 10.$$

Por ejemplo:

$$\log_e 540 = \log_e [5.40 (10)^2] = \log_e 5.4 + 2 \log_e 10,$$

$$\log_e .07 = \log_e [7(10)^{-2}] = \log_e 7 - 2 \log_e 10.$$

Tabla II. Funciones exponenciales e hiperbólicas

x	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sen} x$	$\operatorname{cos} x$	$\operatorname{tan} x$	x
0	1.0000	1.0000	.00000	1.0000	.00000	0
.1	1.1052	.90484	.10017	1.0050	.09967	.1
.2	1.2214	.81873	.20134	1.0201	.19738	.2
.3	1.3499	.74082	.30452	1.0453	.29131	.3
.4	1.4918	.67032	.41075	1.0811	.37995	.4
.5	1.6487	.60653	.52110	1.1276	.46212	.5
.6	1.8221	.54881	.63665	1.1855	.53705	.6
.7	2.0138	.49659	.75858	1.2552	.60437	.7
.8	2.2255	.44933	.88811	1.3374	.66404	.8
.9	2.4596	.40657	1.0265	1.4331	.71630	.9
1.0	2.7183	.36788	1.1752	1.5431	.76159	1.0
1.1	3.0042	.33287	1.3356	1.6685	.80050	1.1
1.2	3.3201	.30119	1.5095	1.8107	.83365	1.2
1.3	3.6693	.27253	1.6984	1.9709	.86172	1.3
1.4	4.0552	.24660	1.9043	2.1509	.88535	1.4
1.5	4.4817	.22313	2.1293	2.3524	.90515	1.5
1.6	4.9530	.20190	2.3756	2.5775	.92167	1.6
1.7	5.4739	.18268	2.6456	2.8283	.93541	1.7
1.8	6.0496	.16530	2.9422	3.1075	.94681	1.8
1.9	6.6859	.14957	3.2682	3.4177	.95624	1.9
2.0	7.3891	.13534	3.6269	3.7622	.96403	2.0
2.1	8.1662	.12246	4.0219	4.1443	.97045	2.1
2.2	9.0250	.11080	4.4571	4.5679	.97574	2.2
2.3	9.9742	.10026	4.9370	5.0372	.98010	2.3
2.4	11.023	.09072	5.4662	5.5569	.98367	2.4
2.5	12.182	.08208	6.0502	6.1323	.98661	2.5
2.6	13.464	.07427	6.6947	6.7690	.98903	2.6
2.7	14.880	.06721	7.4063	7.4735	.99101	2.7
2.8	16.445	.06081	8.1919	8.2527	.99263	2.8
2.9	18.174	.05502	9.0596	9.1146	.99396	2.9
3.0	20.086	.04979	10.018	10.068	.99505	3.0
3.1	22.198	.04505	11.076	11.122	.99595	3.1
3.2	24.533	.04076	12.246	12.287	.99668	3.2
3.3	27.113	.03688	13.538	13.575	.99728	3.3
3.4	29.964	.03337	14.965	14.999	.99777	3.4
3.5	33.115	.03020	16.543	16.573	.99818	3.5
3.6	36.598	.02732	18.285	18.313	.99851	3.6
3.7	40.447	.02472	20.211	20.236	.99878	3.7
3.8	44.701	.02237	22.339	22.362	.99900	3.8
3.9	49.402	.02024	24.691	24.711	.99918	3.9
4.0	54.598	.01832	27.290	27.308	.99933	4.0
4.1	60.340	.01657	30.162	30.178	.99945	4.1
4.2	66.686	.01500	33.336	33.351	.99955	4.2
4.3	73.700	.01357	36.843	36.857	.99963	4.3
4.4	81.451	.01228	40.719	40.732	.99970	4.4
4.5	90.017	.01111	45.003	45.014	.99975	4.5
4.6	99.484	.01005	49.737	49.747	.99980	4.6
4.7	109.95	.00910	54.969	54.978	.99983	4.7
4.8	121.51	.00823	60.751	60.759	.99986	4.8
4.9	134.29	.00745	67.141	67.149	.99989	4.9
5.0	148.41	.00674	74.203	74.210	.99991	5.0
5.1	164.02	.00610	82.008	82.014	.99993	5.1
5.2	181.27	.00552	90.633	90.639	.99994	5.2
5.3	200.34	.00499	100.17	100.17	.99995	5.3
5.4	221.41	.00452	110.70	110.71	.99996	5.4
5.5	244.69	.00409	123.34	123.35	.99997	5.5
5.6	270.43	.00370	135.21	135.22	.99997	5.6
5.7	298.87	.00335	149.43	149.44	.99998	5.7
5.8	330.30	.00303	165.15	165.15	.99998	5.8
5.9	365.04	.00274	182.52	182.52	.99998	5.9
6.0	403.43	.00248	201.71	201.72	.99999	6.0
6.1	445.86	.00224	222.93	222.93	.99999	6.1
6.2	492.75	.00203	246.37	246.38	.99999	6.2
6.3	544.57	.00184	272.29	272.29	.99999	6.3
6.4	601.95	.00166	300.92	300.92	.99999	6.4
6.5	665.14	.00150	332.57	332.57	1.0000	6.5

Respuestas a algunos ejercicios impares

Sección 1.1, p. 30

1. (a) $\{1, 2, 3, \dots, 24\}$, (b) $\{1, 2, 3, 4\}$.
3. (a) $\{4, 7\}$, (b) \mathbb{Z} .
5. $\{2, -2\}$.
7. $\{-3, 4\}$.
9. $\{\frac{5}{2}, -\frac{1}{3}\}$.
11. $\{1, 2, -1, -2\}$.
13. $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$, $(4, 4)$.
15. $A \cap B = \{6\}$, $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$.
17. \mathbb{Z} , $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$, $\{a, b, c, d\}$. Todos excepto el último son subconjuntos propios del conjunto dado.

Sección 1.2, pp. 37-38

1. $R_1 = \{(1, 1), (2, 2)\}$, dominio de $R_1 = \{1, 2\}$, rango de $R_1 = \{1, 2\}$; $R_2 = \{(1, 2)\}$, dominio de $R_2 = \{1\}$, rango de $R_2 = \{2\}$; $R_3 = \{(2, 1)\}$, dominio de $R_3 = \{2\}$, rango de $R_3 = \{1\}$.
3. (a) $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 6)$, $(4, 8)$; (b) $(0, 5)$, $(5, 0)$, $(4, 3)$, $(3, 4)$, $(-3, 4)$.
5. (a) $R_1 = \{(2, 1), (4, 2)\}$, dominio = $\{2, 4\}$, rango = $\{1, 2\}$;
(b) $R_2 = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$, dominio = $\{1, 2, 3, 4\}$, rango = $\{1, 2, 3, 4\}$;
(c) $R_3 = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$, dominio = $\{2\}$, rango = $\{1, 2, 3, 4\}$;
(d) $R_4 = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3)\}$, dominio = $\{1, 2, 3, 4\}$, rango = $\{3\}$;
(e) $R_5 = \{(3, 1), (4, 1)\}$, dominio = $\{3, 4\}$, rango = $\{1\}$;
(f) $R_6 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$, dominio = $\{1, 2, 3, 4\}$, rango = $\{1, 2, 3, 4\}$.
7. Dominio = $\{2\}$, rango = $(0; +\infty)$.
9. Dominio = $[0; 4]$, rango = $[-4; 0]$.
11. Dominio = $[-3; 3]$, rango = $[-3; 3]$.
13. Dominio = $[-2; 2]$, rango = $[-2; 2]$.
15. Dominio = $[-2; 2]$, rango = $[-2; 0]$.
17. Dominio = $[-3; 3]$, rango = $[-5; 5]$.
19. Dominio = $[-10; 10]$, rango = $[-15; 5]$.
21. Dominio = $(-\infty; 3]$, rango = $[0; +\infty)$.
27. Dominio = $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$, rango = $(-\infty; +\infty)$.
29. Dominio = $\left(\frac{4 - 2\sqrt{29}}{5}; \frac{4 + 2\sqrt{29}}{5}\right)$, rango = $\left(\frac{8 - \sqrt{29}}{5}; 3\right)$.

Sección 1.3, pp. 45-46

1. No es función; dominio = Re , rango = $\{-5, 5\}$.
3. Es función; dominio = Re , rango = Re .
5. Es función; dominio = $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, rango = $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
7. No es función; dominio = $[0; +\infty)$, rango = Re .
9. No es función; dominio = Re , rango = Re .
11. No es función.
13. No es función.
15. Todas son funciones excepto R_{12} , R_{14} y R_{15} .
17. Dominio = Re , rango = $(-\infty; 4]$.
19. Dominio = $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$, rango = $[0; +\infty)$.
21. (a) $F(-2) = -16$, $F(-1) = -2$, $F(0) = 0$, $F(1) = 2$, $F(2) = 16$;
(b) $F(x_1) = 2x_1^3$, $F(x_2) = 2x_2^3$, $F(x_2 - x_1) = 2(x_2 - x_1)^3$, $F(x_2) - F(x_1) = 2(x_2^3 - x_1^3)$;
(c) $2(x_2^3 + x_2x_1 + x_1^3)$.
23. $2ax + ah + b$.
25. $F(e) = e^3$.
27. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.
29. Dominio de $F = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, rango de $F = \{0, 1, 4, 9, 16\}$;
dominio de $G = [-3; 4]$, rango de $G = [0; 16]$.

Sección 1.4, pp. 51-52

1. Dominio = Re , rango = $(-\infty; 0]$.
3. Dominio = Re , rango = $[0; 1]$.
5. Dominio = $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, rango = $\{2\}$.
7. Dominio = $[0; 4]$, rango = $\{0, 1, 2, 3\}$.
9. (a) 4, (b) 5, (c) -2, (d) 1, (e) 3, (f) 5, (g) $\frac{1}{2}$, (h) $\frac{1}{2}$.

Sección 1.5, pp. 54-55

1. $D_U = [2; +\infty)$, $D_V = [-3; +\infty)$;
 $U(x) + V(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{x+3}$, $D_{U+V} = [2; +\infty)$;
 $U(x) - V(x) = \sqrt{x-2} - \sqrt{x+3}$, $D_{U-V} = [2; +\infty)$;
 $U(x) \cdot V(x) = \sqrt{x-2} \sqrt{x+3}$, $D_{U \cdot V} = [2; +\infty)$;
 $U(x)/V(x) = \sqrt{x-2}/\sqrt{x+3}$, $D_{U/V} = [2; +\infty)$.
3. $D_U = [-3; 3]$, $D_V = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$;
 $U(x) + V(x) = \sqrt{9-x^2} + \sqrt{x^2-1}$, $D_{U+V} = [-3; -1] \cup [1; 3]$;
 $U(x) - V(x) = \sqrt{9-x^2} - \sqrt{x^2-1}$, $D_{U-V} = D_{U+V}$;
 $U(x) \cdot V(x) = \sqrt{9-x^2} \sqrt{x^2-1}$, $D_{U \cdot V} = D_{U+V}$;
 $U(x)/V(x) = \sqrt{9-x^2}/\sqrt{x^2-1}$, $D_{U/V} = [-3; -1] \cup [1; 3]$.
5. $D_U = [0; 3]$, $D_V = [1; 3]$;
 $U(x) + V(x) = 2x + x^2$, $D_{U+V} = [1; 3]$;
 $U(x) - V(x) = 2x - x^2$, $D_{U-V} = D_{U+V}$;
 $U(x) \cdot V(x) = 2x^3$, $D_{U \cdot V} = D_{U+V}$;
 $U(x)/V(x) = 2/x$, $D_{U/V} = D_{U+V}$.
7. $D_U = [-3; 3]$, $D_V = Re$;
 $U(x) + V(x) = \sqrt{16-x^2} + \sin x$, $D_{U+V} = D_U$;
 $U(x) - V(x) = \sqrt{16-x^2} - \sin x$, $D_{U-V} = D_U$;
 $U(x) \cdot V(x) = \sqrt{16-x^2} \sin x$, $D_{U \cdot V} = D_U$;
 $U(x)/V(x) = \sqrt{16-x^2}/\sin x$, $D_{U/V} = [-3; 0) \cup (0; 3]$.

EJERCICIOS IMPARES

9. (a) $U + V = \{(2, 6), (3, 12), (4, 8), (5, 7)\}$;
 $U - V = \{(2, 2), (3, 6), (4, 4), (5, 7)\}$;
 $U \cdot V = \{(2, 8), (3, 27), (4, 12), (5, 0)\}$;
 $U/V = \{(2, 2), (3, 3), (4, 3)\}$;
(b) $U + V = \{(3, 12), (4, 8)\}$; $U - V = \{(3, 6), (4, 4)\}$;
 $U \cdot V = \{(3, 27), (4, 12)\}$; $U/V = \{(3, 3), (4, 3)\}$.
11. (a) $4 + I = \{(x, y) | y = 4 + x\}$; $4 - I = \{(x, y) | y = 4 - x\}$; $4 \cdot I = \{(x, y) | y = 4x\}$; $4/I = \{(x, y) | y = 4/x\}$.
(b) $7I - 4 = \{(x, y) | y = 7x - 4\}$; $7I + 4 = \{(x, y) | y = 7x + 4\}$.
15. $D_U = Re$, $D_V = Re$;
 $U + V = 3 + I^2$, $U(x) + V(x) = 3 + x^2$, $D_{U+V} = Re$;
 $U - V = 3 - I^2$, $U(x) - V(x) = 3 - x^2$, $D_{U-V} = Re$;
 $U \cdot V = 3I^2$, $U(x) \cdot V(x) = 3x^2$, $D_{U \cdot V} = Re$;
 $U/V = 3/I^2$, $U(x)/V(x) = 3/x^2$, $D_{U/V} = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
17. $D_U = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, $D_V = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$;
 $U + V = \frac{I^2 + 2}{I - 1} + \frac{I^2 - 8}{I + 1}$; $U(x) + V(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 1} + \frac{x^2 - 8}{x + 1}$;
 $D_{U+V} = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$;
 $U - V = \frac{I^2 + 2}{I - 1} - \frac{I^2 - 8}{I + 1}$; $U(x) - V(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 1} - \frac{x^2 - 8}{x + 1}$;
 $D_{U-V} = D_{U+V}$;
 $U \cdot V = \frac{I^2 + 2I^2 - 8I^2 - 16}{I^2 - 1}$; $U(x) \cdot V(x) = \frac{x^2 + 2x^2 - 8x^2 - 16}{x^2 - 1}$;
 $D_{U \cdot V} = D_{U+V}$;
 $\frac{U}{V} = \frac{I^2 + I^2 + 2I + 2}{I^2 - I^2 - 8I + 8}$; $\frac{U(x)}{V(x)} = \frac{x^2 + x^2 + 2x + 2}{x^2 - x^2 - 8x + 8}$;
 $D_{U/V} = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1, 2) \cup (2; +\infty)$.

Sección 1.6, pp. 58-59

1. $V[U] = \{(0, 0)\}$. No.
3. $D_U = Re$, $D_V = Re$; $U[V(x)] = 4$, $D_{U[V]} = Re$; $V[U(x)] = 12$, $D_{V[U]} = Re$.
5. $D_U = Re$, $D_V = Re$; $U[V(x)] = x$, $D_{U[V]} = Re$; $V[U(x)] = x$, $D_{V[U]} = Re$.
7. $D_U = [0; +\infty)$, $D_V = Re$; $U[V(x)] = \sqrt{1-x^2}$, $D_{U[V]} = (-\infty; 1]$.
9. $D_U = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$, $D_V = [0; +\infty)$; $U[V(x)] = 1/(\sqrt{x-2})$, $D_{U[V]} = [0; 4) \cup (4; +\infty)$.
11. Dado que $I(x) = x$, $U[I(x)] = U(x)$ e $I[U(x)] = U(x)$.
13. $F = \{(x, x^2 + x^3)\}$, $G = \{(x, x^2 + 1)\}$.
15. $F = \{(x, 2x \sin x)\}$, $G = \{(x, 2 \sin x)\}$.
19. (a) $U[V] = \bar{2}$, (b) $V[U] = \bar{4}$.

Sección 1.7, p. 66

1. $F^* = \{(x, y) | y = x - 1, x \in [0; 4]\}$; $D_F = R_F = [-1; 3]$, $R_F = D_F = [0; 4]$.
3. $F^* = \{(x, y) | y = 4/x, x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)\}$, $D_F = D_F = R_F = R_F = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
5. $F^* = \{(x, y) | y = -\sqrt{x^2 + 4}, x \in [0; +\infty)\}$, $D_F = R_F = (-\infty; -2]$, $R_F = D_F = [0; +\infty)$.

7. $F^* = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x}\}$, $D_F = R_F = D_{F^*} = R_{F^*} = R_c$.
 9. G^* no existe. 11. G^* no existe. 17. No.

Sección 1.8, pp. 72-74

1. (a) $3 < 8$, (b) $-2 < 4$, (c) $-8 < -4$, (d) $\sqrt{5} < 3$.
 3. $(-\infty; 6)$. 5. $(-\infty; -6)$. 7. $[-4; 4]$. 9. $(-1; 4)$.
 11. $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$. 13. $(-\infty; -4) \cup (6; +\infty)$.
 15. (a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, (b) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,
 (c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, (d) $\{1, 2, \dots, 14\}$.
 17. (a) $|x-3| < 1$, (b) $|x-2| < 3$, (c) $|x-3| < 5$, (d) $|x+2| < 3$.
 19. $\frac{3}{4}, -\frac{7}{2}$. 21. 1. 23. $-2, 12$.
 25. (a) $x > \frac{3}{5}$ ó $x < -\frac{3}{5}$, (b) $x > 6$ ó $x < -6$,
 (c) $x > 2$ ó $x < -1$, (d) $x > \frac{1}{2}$ ó $x < -\frac{1}{2}$.
 27. (a) $\frac{27}{84}$, (b) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$, (c) $\frac{35}{612}$, (d) $\frac{-\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$.
 29. (a) Verdadero, (b) verdadero, (c) verdadero, (d) falso,
 (e) verdadero, (f) falso.

Sección 1.9, p. 78

1. (a) $5 - 2x - h$, (b) 2.9, 2.999, 2.999999, 2.999999999;
 (c) $M = \{(x, y) \mid y = 5 - 2x\}$, (d) 3, (e) $3x - y + 1 = 0$,
 $x + 3y - 13 = 0$.
 3. (a) $\frac{-2}{x(x+h)}$; (b) $-8.888 \dots, -8.00080008 \dots$,
 $-8.0000000800000008 \dots$; (c) $M = \{(x, y) \mid y = \frac{-2}{x^2}\}$,
 (d) -8 , (e) $8x + y + 8 = 0$, $2x - 16y - 63 = 0$.
 5. $M = \{(x, y) \mid y = -2x\}$. 7. $M = \{(x, y) \mid y = 2 - \frac{3}{x^2}\}$.

Ejercicios adicionales al capítulo 1, pp. 78-79

1. $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. 3. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. 5. $\{-9, 9\}$.
 7. $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. 9. Dominio de $R = [2; +\infty)$, rango de $R = (-\infty; +\infty)$.
 11. Dominio de $R = [-2; 2]$, rango de $R = (-\infty; +\infty)$.
 13. No es función; dominio $= (-\infty; +\infty)$, rango $= (-\infty; +\infty)$.
 15. No es función; dominio $= [3; 5]$, rango $= [-4; 3]$.
 17. $U(x) + V(x) = \sqrt{25-x^2} + \sqrt{x^2-4}$, $U(x) - V(x) = \sqrt{25-x^2} - \sqrt{x^2-4}$,
 $U(x) \cdot V(x) = \sqrt{25-x^2} \cdot \sqrt{x^2-4}$, $U(x)/V(x) = \frac{\sqrt{25-x^2}}{\sqrt{x^2-4}}$; Dominio de $(U+V) = [-5; -2] \cup [2; 5]$,
 dominio de $(U-V) = [-5; -2] \cup [2; 5]$, dominio de $(U \cdot V) =$
 $[-5; -2] \cup [2; 5]$, dominio de $(U/V) = [-5; -2] \cup [2; 5]$.
 19. $U[V(x)] = x^2$, $V[U(x)] = x^2$; dominio de $U = (-\infty; +\infty)$, dominio de
 $V = [0; +\infty)$, dominio de $U[V] = [0; +\infty)$, dominio de $V[U] =$
 $(-\infty; +\infty)$.

Sección 2.1, pp. 91-93

1. $\delta \leq \varepsilon/2$. 3. $\delta \leq \varepsilon/2$. 7. $6/13$. 9. 3.
 11. 7. 13. $-\frac{1}{4}$. 17. (a) -1 , (b) 1. 19. $\frac{2}{3}x^2$.
 21. $4x^3$. 23. $\frac{1}{2}x^{-2/3}$ ó $1/3\sqrt[3]{x^2}$. 25. $\sqrt{3}/6$. 27. $1/3(2)^{2/3}$.

Sección 2.2, pp. 99-100

1. 4. 3. 0. 5. 1. 7. 2. 9. 0. 11. 1. 15. $\theta = 0, \pi$. 17. $\theta = 0, \pi$.

Sección 2.3, pp. 108-110

1. No. 3. No, si. 5. No. 7. $n\pi$. 9. 0. 11. ± 1 .
 13. $-1, 3$. 15. $1/\sqrt{2}$. 17. 20. 19. $\frac{1}{4}$. 21. -1 .

Ejercicios adicionales al capítulo 2, p. 110

1. $\delta \leq (\varepsilon/3)$. 3. Escoja una δ igual al menor de los números 1 y $\varepsilon/4$.
 5. 2. 7. 1. 9. No.

Sección 3.1, pp. 116-117

1. $-\frac{2}{x^2}$. 3. $\frac{1}{3x^{2/3}}$. 5. $3-2x$. 7. $6x+12x^2$. 9. $\frac{-3}{(x+1)^2}$.

11. Dominio de $F = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, dominio de $F' = (-\infty; 0) \cup$
 $(0; +\infty)$.
 13. $4x, -4, 0, 8, 4x$.
 15. $D_{xy} = -2x + 4$, $2x - y + 1 = 0$, $x + 2y - 7 = 0$.
 17. $D_{xy} = 6x - 3x^2$, $9x + y + 5 = 0$, $x - 9y + 37 = 0$.
 19. $D_{xy} = 6x - 4$, $8x - y - 12 = 0$, $x + 8y - 34 = 0$.
 21. $D_{xy} = 3x^2 - 1$, $2x - y + 2 = 0$; $x + 2y + 1 = 0$.
 23. $D_{xy} = 6x + 5$; (a) $(-\frac{5}{6}, \frac{47}{12})$, (b) $(-\frac{2}{3}, 4)$.

Sección 3.3, pp. 124-125

1. $4x^3 - 144$. 3. $10x - 2$. 5. $-\frac{40}{x^2} - \frac{x}{10}$.
 7. $x^{-1/2} - 6x^{1/2}$. 9. $-\frac{3}{x^2} - \frac{14}{x^3} + \frac{3}{x^4}$. 11. $-12x^{-5} + \frac{8}{3}x^{-1/3} - 14x$.
 15. $6x^3 - 6x + 1$. 17. $-\frac{1}{x^2} + \frac{10}{x^3} - \frac{18}{x^4}$. 19. $16x^3 - 40x$.
 21. $\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3}$. 23. $a + 2bx + 3cx^2$.
 25. $\frac{1}{2}x^2 - 2$, -2 ; $2x + y - 3 = 0$, $x - 2y + 6 = 0$; $(3, \frac{3}{2})$, $(-3, \frac{9}{2})$; $(2,$
 $\frac{1}{3})$, $(-2, \frac{17}{3})$.
 27. $-\frac{6}{x^2}, -\frac{3}{2}$; $3x + 2y - 12 = 0$, $2x - 3y + 5 = 0$.
 31. $x - 4y + 4 = 0$, $4x + y - 18 = 0$.
 35. $15l^2 + 3$. 37. $6al^5 - 4bl^3 - 3cl^2$.

Sección 3.4, p. 127

1. $5x^4 - 12x^3 + 1$, $20x^3 - 36x^2$, $60x^2 - 72x$.
 3. $-2x^3, 6x^4, -24x^5$.
 5. $F'(x) = 0$ para $x = -2, x = 3$; $F''(x) = 0$ para $x = \frac{1}{2}$.
 7. $F'(x) = 0$ para $x = 1, x = -1, x = 3$; $F''(x) = 0$ para $x = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$,
 $x = \frac{3-2\sqrt{3}}{3}$.

9. 13, 6, 0. 11. $7t^{5/2} - t^{3/2}, 35t^{3/2} + \frac{2}{3}t^{5/2}$.
 13. $30t^3 - 4t^2 + 6t - 4, 150t^4 - 8t + 6, 600t^2 - 8$. 15. 10, -7, 10, 0.

Sección 3.5, p. 129

1. $F_+'(0) = 1, F_-'(0) = -1$.

Sección 3.6, pp. 133-134

3. $V(t) = 80 - 32t, A(t) = -32; s = 64, v = -48, a = -32$.
 5. $V(t) = 1 - 4t^2, A(t) = 12t^2; s = 2\frac{1}{2}, V = \frac{1}{2}, a = \frac{3}{2}$.
 9. (a) $V = \{(t, v) | v = 60 - 10t, t \in [0; 12]\}$,
 $A = \{(t, a) | a = -10, t \in [0; 12]\}$,
 (b) Para $t = 4, v = 20, a = -10$; para $t = 8, v = -20, a = -10$;
 (c) 4, 8, (d) $t = 6$, (e) 180 m.
 11. (a) $V(t) = 731 - 9.8t, (b) t = 75, (c) 731 \text{ m/seg.}, (d) -731 \text{ m/seg.}$
 (e) $S = \{(t, s) | s = 731 - 4.9t^2, t \in [0; 45.7]\}$,
 $V = \{(t, v) | v = 731 - 4.9t, t \in [0; 45.7]\}$,
 $A = \{(t, a) | a = -9.8, t \in [0; 45.7]\}$.

Sección 3.7, pp. 137-138

1. $x^{-2/3} + 7 \cos x$.
 3. $10x + 4 - \frac{35}{x^2} - 8 \sin x$.
 5. (a) $\cos x, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$; (b) $6\sqrt{3}x - 12y + 6 - \pi\sqrt{3} = 0$,
 $4\sqrt{2}x - 8y + 4\sqrt{2} - \pi\sqrt{2} = 0$.
 7. (b) En el punto cuya abscisa es $\frac{\pi}{3}$, una ecuación de la tangente es $(12\pi + 9)x - 18y - 2\pi^2 - 3\pi + 9\sqrt{3} = 0$, una ecuación de la normal es $108x + (72\pi + 54)y - (8\pi + 6)\pi^2 - (36\pi + 27)\sqrt{3} - 36\pi = 0$.
 En el punto cuya abscisa es 1, una ecuación de la tangente es $(2 + \cos 1)x - y + \sin 1 - \cos 1 - 1 = 0$, una ecuación de la normal es $x + (2 + \cos 1)y - \cos 1 - 2 \sin 1 - \sin 1 \cos 1 = 0$.
 9. (a) $-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$; (b) $-2\pi, 0, 2\pi$.
 11. $-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$.
 17. $35x^2 + 4 \cos x + 7 \sin x, 210x^3 - 4 \sin x + 7 \cos x$.
 19. $14x^{4/3} + \frac{3}{5}(\cos x + \sin x), \frac{56}{3}x^{1/3} + \frac{3}{5}(-\sin x + \cos x)$.
 21. $35t^4 + 4 \cos t + 7 \sin t, 210t^3 - 4 \sin t + 7 \cos t$.
 23. $14t^{4/3} + \frac{3}{5}(\cos t + \sin t), \frac{56}{3}t^{1/3} + \frac{3}{5}(-\sin t + \cos t)$.

Sección 3.8, pp. 141-142

1. $6x^2 + 10x - 16x^2$. 3. $\frac{7}{2}x^{5/2} + \frac{15}{2}x^{3/2}$.
 5. $5 \cos 2x$. 7. $-\frac{1}{4} \sin x$. 9. $14x^2 + 4x^3 + 15x^2 - 1$.
 11. $3(2x - 4) \cos x - 3(x^2 - 4x) \sin x$.
 13. $\frac{-29}{(5x - 3)^2}$. 15. $\frac{1 + x}{2\sqrt{x(1 - x)^2}}$. 17. $\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$.

19. $\frac{18x^2 \sin x - 12 \sin x - 6x^2 \cos x + 12x \cos x}{9 \sin^2 x}$.
 21. $\sec^2 x$. 23. $6t^2 - 3 \cos t$.
 25. $\frac{(1 + 4 \cos t + \sin t)}{(1 + 4)^2}$. 27. $\frac{1 + \cos t + \sin t}{(1 + \cos t)^2}$.
 29. $-\frac{1}{8} \sin t$.

Sección 3.9, pp. 148-149

1. $5(x^2 - 5x)^4(2x - 5)$. 3. $\frac{-4(x - 1)}{(x^2 - 2x)^2}$.
 5. $\frac{1}{(1 - x^2)^{3/2}}$. 7. $\frac{5 + 2x^2}{\sqrt{5 + x^2}}$.
 9. $7 \cos 7x$. 11. $3 \sin^2 x \cos x$.
 13. $\frac{\sin x - \cos x - 1}{(1 + \cos x)^2}$. 15. $\frac{\sin 2x(1 - 3 \cos^2 x)}{\sqrt{\cos 2x}}$.
 17. $-\frac{5}{(3x - 1)^2}$. 19. $\frac{16 - 6x}{(3x - 1)^2}$.
 21. $6\theta \sin^2 \theta^2 \cos \theta^2$. 23. $\cos x [\cos(\sin x)]$.
 25. $-2 \sin x$. 27. $\frac{-2 \cos 2u (\cos 2u + 2u \sin 2u)}{u^2}$.
 29. $30x^2 \cos^4(2x^3 + 4)$. 31. $-3 \cot^2 3t(1 + 2 \sin^2 3t)$.
 35. $v = ak \cos t_1 - bk \sin kt_1, a = -ak^2 \sin kt_1 - bk^2 \cos kt_1$.
 37. $y - \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. 39. $3 \sin^2 \cos, 3 \sin^2 x \cos x$.
 41. $-(6t - 2) \sin [3t^2 - 2t], -(6x - 2) \sin (3x^2 - 2x)$.
 43. $\frac{1}{(1 - x)^2}; \frac{2}{(1 - x)^3}; \frac{6}{(1 - x)^4}$.
 45. $x \cos x + \sin x, -x \sin x + 2 \cos x, -x \cos x - 3 \sin x$.
 53. $D_x \sec u = \sec u \tan u D_x u$.

Sección 3.10, pp. 154-155

1. Sí, $c = \frac{2}{3}$. 3. Sí, $c = 4$. 5. Sí, $c = \frac{8}{27}$.
 7. Sí, $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$. 9. Sí, $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Sección 3.11, pp. 160-161

1. $\frac{3x^2}{2} + 2x + k$. 3. $-\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} + 4x + k$.
 5. $6x^{1/2} - \frac{2}{3}x^{3/2} + k$. 7. $\frac{1}{3}(2x)^{2/2} + k$.
 9. $\frac{(1 + 3x^3)^{4/3}}{12} + k$. 11. $-\frac{2}{3}(4 - x^2)^{1/2} + k$.
 13. $-\frac{2}{5b}(a - bt)^{5/2} + k$. 15. $\frac{1}{3}(3x^2 - 6x)^{1/2} + k$.
 17. $\frac{3}{4} \sin 4x + k$. 19. $-\frac{1}{2} \cos (2x + 3) + k$.

21. $4 \sin \frac{1}{2}x + k$.
 25. $\frac{1}{9} \sin^3 3x + k$.
 29. $F(x) = x^3 + 3$.
 33. $H(x) = -\frac{1}{3}(25 - x^2)^{3/2} + 21$.
 37. (a) $S(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t + \frac{20}{3}$, (b) $S(t) = \frac{1}{9}(3t - 4)^2 + \frac{82}{9}$.
 39. $y = 2x^2 + 2x - 3$.
 45. $V = \{(t, v) \mid v = -12t + 50; t \in [0; \frac{25}{3}]\}$,
 $S = \{(t, s) \mid s = -6t^2 + 50t; t \in [0; \frac{25}{3}]\}$.
 47. $V = \{(t, v) \mid v = 2t - 3; t \in [0; 3]\}$,
 $S = \{(t, s) \mid s = t^2 - 3t + 5; t \in [0; 3]\}$.
 49. $V = \{(t, v) \mid v = \cos \frac{2}{3}t; t \in [0; 3\pi]\}$,
 $S = \{(t, s) \mid s = \frac{3}{2} \sin \frac{2}{3}t + 10; t \in [0; 3\pi]\}$.

Sección 3.12, pp. 166-167

1. $-\frac{3x}{4y}$.
 7. $\frac{\cos x}{\sin y}$.
 13. $\frac{x}{y}$.
 17. $y = x + a, x + y - 3a = 0$.
 21. $8x + 5\sqrt{5}y - 36 = 0, 25x - 8\sqrt{5}y - 18 = 0$.
 25. $\frac{b^2x}{a^2y}; \frac{a^2b^2y^2 - b^4x^2}{a^4y^3}$.
 3. $-\left(\frac{y}{x}\right)^{1/2}$.
 9. $\frac{y}{x}$.
 15. $3x - 4y = 25, 4x + 3y = 0$.
 19. $8x - y + 17 = 0, x + 8y - 6 = 0$.
 27. $\frac{-y^{1/3}}{x^{1/3}}; \frac{a^{2/3}}{3x^{4/3}y^{1/3}}$.
 31. $(4, -3), (-4, 3)$.

Sección 3.13, pp. 169-170

1. (a) $\Delta y = 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3, 0.331, 0.030301$;
 (b) $3x^2 + 3x \Delta x + (\Delta x)^2, 3.31, 3.0301$; (c) $3x^2, 3, 27$.
 5. $-x^3$. 7. $4x - 3$. 9. $4x^3$. 11. $8x - 3$.
 13. $2 - 2x$. 15. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. 17. $\frac{-50}{x^3}; \frac{-25}{4}; \frac{-50}{27}$. 19. $60 \cos \theta, 30\sqrt{2}, 0$.

Sección 3.14, pp. 178-179

1. $dy = (2x - 4) dx, \Delta y = 2x \Delta x + (\Delta x)^2 - 4\Delta x; dy = 0.4, \Delta y = 0.41$;
 $dy = 0.04, \Delta y = 0.0401$; $dy = 0.004, \Delta y = 0.004001$.
 3. (a) 4.042, (b) 9.22. 5. 25.6π . 7. 43.076.
 9. (a) $(4x^3 - 4) dx$, (b) $9x^2(x^3 - 1)^2 dx$, (c) $\frac{(3x - 1) dx}{\sqrt{2x - 1}}$, (d) $3 \sin^2 x \cos x dx$, (e) $-2x \sin x^2 dx$, (f) 0, (g) $\frac{2 \sin x - (2x + 1) \cos x}{\sin^2 x} dx$, (h) $\frac{-dx}{(x^2 - 1)^{3/2}}$.
 11. $y = x^3 - 3x + 1$.
 15. $y = -\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{4}$.
 19. $y = -\frac{7}{3(x^3 - 4)} + k$.
 23. $y = \frac{\sin 3x}{3} + k$.
 13. $y = -(5 - 4x)^{1/2} + 6$.
 17. $y = 2\sqrt{x^2 + 4} + k$.
 21. $s = \frac{(2t^2 + 4t)^{3/2}}{6} + k$.
 25. $r = \frac{\sin t^3}{3} + k$.

27. $y = -\frac{\cos 3x}{3} + \frac{3 \sin 5x}{5} + 2 \cos \frac{x}{2} + k$.
 29. $\frac{y - x^2}{y^2 - x}$.
 31. $\frac{\cos xy - xy \sin xy}{x^2 \sin xy}$.

Ejercicios adicionales al capítulo 3, pp. 179-180

1. $-6 \left(\frac{2a^6 + 5a^4x^2 + 4a^2x^4 + x^6}{x^{12}} \right)$.
 5. $x^2(3x \cos 3x + 4 \sin 3x)$.
 9. $\frac{\sin \sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x} \cos \sqrt{x}}{\sin^2 \sqrt{x}}$.
 13. No se aplica el Teorema del Valor Medio, puesto que F no es continua sobre $[-1; 1]$.
 15. $F(x) = -\frac{1}{7(7x + 2)} + k$.
 19. $F(x) = \frac{1}{9}(2x^3 + 4)^{3/2} + k$.
 23. $y = 2x^4 - x^2 + k$.
 27. $y = \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) + k$.
 3. $\frac{12x^3 - 6}{(x^3 + 3x + 1)^2}$.
 7. $8 \sec^2 2x \tan 2x$.
 11. $c = \frac{7}{2}$.
 17. $F(x) = -\frac{1}{15} \cos^5 5x + k$.
 21. $F(x) = -\frac{1}{4} \cos x^4 + k$.
 25. $y = -\frac{1}{6} \cos 2x^3 + k$.
 29. $y = -\frac{2}{3\sqrt{3x - 5}} + k$.

Sección 4.1, p. 188

1. Creciente sobre $(0; +\infty)$, decreciente sobre $(-\infty; 0)$.
 3. Creciente sobre $(-\infty; -1/\sqrt{3})$ y $(1/\sqrt{3}; +\infty)$, decreciente sobre $(-1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3})$.
 5. Creciente sobre $(-\infty; 2)$ y $(3; +\infty)$, decreciente sobre $(2; 3)$.
 7. Creciente sobre $(-2\pi; -\frac{3}{2}\pi)$, $(-\pi/2; \pi/2)$, y $(\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$, decreciente sobre $(-\frac{3}{2}\pi, -\pi/2)$ y $(\pi/2; \frac{3}{2}\pi)$.

Sección 4.2, pp. 196-197

1. 5 y 5, dominio = $[0; 10]$.
 3. $20\sqrt{5}$ dm. por $40\sqrt{5}$ dm.
 5. $r = \frac{2}{3}\sqrt{2}a, h = \frac{4}{3}a, v = \frac{32}{81}\pi a^3$.
 7. Altura = $5\sqrt{3}$, ancho = 5.
 9. Los valores críticos son $-5, -2, 2, 5$; el valor máx. es $F(-5) = \frac{65}{2}$, el valor mín. es $F(5) = -\frac{65}{2}$.
 11. Los valores críticos son $-1, \frac{7}{11}, 1$; el valor máx. es $F(\frac{7}{11})$, el valor mín. es $F(-1) = F(1)$.
 13. Los valores críticos son $-\pi/2, \pi/2, \pi$; el valor máx. es $F(\pi/2) = 1$, el valor mín. es $F(-\pi/2) = -1$.
 15. Los valores críticos son $-2, 0, 2$; el valor máx. es $F(-2) = F(2) = 21$, el valor mín. es $F(0) = -3$.
 17. El valor máx. relativo es $F(1) = 5$, el valor mín. relativo es $F(3) = 1$.
 19. El valor máx. relativo es $F(0) = 0$, el valor mín. relativo es $F(\sqrt{3}) = F(-\sqrt{3}) = -9$.
 21. Los valores críticos son $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$; $F(\pi/2)$ es un valor máx. rel. y es el valor máx., $F(3\pi/2)$ es un valor mín. relativo y es el valor mín.

25. Los valores máx. rel. son $F(2) = 2$ y $F(-1) = 2$; los valores mín. rel. son $F(-2) = -2$ y $F(1) = -2$. El valor máx. es $F(2) = F(-1) = 2$; el valor mín. es $F(-2) = F(1) = -2$.
27. Los valores máx. rel. son $F(0) = 1$ y $F(4) = 1$; los valores mín. rel. son $F(1) = -8$ y $F(3) = -8$. El valor máx. es $F(0) = F(4) = 1$; el valor mín. es $F(1) = F(3) = -8$.

Sección 4.3, pp. 205-207

1. $F(1) = 1$ y $F(-1) = -1$ son valores máx. rel.; $F(0) = 0$ es un valor mín. rel.; los puntos de inflexión son $(-1/\sqrt{3}, 1/3)$ y $(1/\sqrt{3}, 1/3)$.
3. $F(-1) = -4$ es un valor máx. rel.; $F(1) = 4$ es un valor mín. rel.; no hay puntos de inflexión.
5. $F(-2) = 4$ es un valor máx. rel.; $F(0) = 0$ es un valor mín. rel.; no hay puntos de inflexión.
7. $F(1) = 14$ es un valor máx. rel.; $F(-1) = -2$ y $F(3) = -2$ son valores mín. rel.; los puntos de inflexión son $(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ y $(\frac{3-2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$.
9. $F(0) = 4a$ es un valor máx. rel.; $(a/\sqrt{3}, 3a)$ y $(-a/\sqrt{3}, 3a)$ son puntos de inflexión.
11. $F(\pi/2) = 1$ es un valor máx. rel.; $F(0) = 0$ y $F(\pi) = 0$ son valores mín. rel.; $(\pi/4, 1/2)$ y $(3\pi/4, 1/2)$ son puntos de inflexión.
13. Radio = $2\sqrt{25}$ m, altura = $4\sqrt{25}$ m.
15. (a) $r = \sqrt{v/2\pi h}$, $v = 2\sqrt{v/2\pi h}$; (b) $r = \sqrt{v/2\pi h}$, $v = 2\sqrt{v/2\pi h}$; (c) En (a), $h/r = 2/1$. En (b), $h/r = 1/1$.
17. $\frac{1}{2}(36)^{1/3}$ m por $\frac{1}{2}(36)^{1/3}$ m por $\frac{1}{2}(36)^{1/3}$ m.
19. Largo = 24 cm, ancho = 32 cm.
21. $a\sqrt{2}$ por $b\sqrt{2}$.
23. $\theta = \pi/2$.
25. $F(1) = 5$ es un valor máx. rel.; $F(3) = 1$ es un valor mín. rel.; $(2, 3)$ es un punto de inflexión; la ecuación de la línea tangente es $3x + y - 9 = 0$.
27. El radio del círculo = altura del rectángulo.

Sección 4.4, pp. 214-215

1. $D_x F^*(x) = \frac{1}{2y} = -\frac{1}{2y^2}$; $D_y F^*(x) = \frac{1}{2x} = -\frac{1}{2x^2}$.
3. $D_x F^*(x) = \frac{1}{2y} = -\frac{1}{2y^2}$; $D_y F^*(x) = \frac{1}{2x} = -\frac{1}{2x^2}$.
5. $D_x F^*(x) = \frac{1}{3y^2 - 6y + 3}$; $D_y F^*(x) = \frac{1}{3x^2 - 6x + 3}$.

Ejercicios adicionales al capítulo 4, p. 215

1. $F(x)$ es creciente sobre $(-\infty, 1]$, decreciente sobre $[1, 5]$, y creciente sobre $(5, +\infty)$.

3. $F(x)$ es decreciente sobre \mathbb{R} .

5. $F(1) = 0$ es un valor máx. rel.; $F(2) = -20$ es un valor mín. rel.; $(1/2, -13/2)$ es un punto de inflexión.

7. $F(2) = -14$ es un valor mín. rel.; $F(-1, 0, 3)$ son puntos de inflexión.

9. $F(-a) = -a/2$ es un valor mín. rel.; $F(a) = a/2$ es un valor máx. rel.; $(0, 0)$ es un punto de inflexión.

Sección 5.1, pp. 221-222

1. 2, 3, 4, 5. $\lim_{n \rightarrow \infty} C(n)$ no existe.

Sección 5.2, pp. 224-225

1. $1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 + 1/36$.
3. $1(2) + 2(3) + 3(4) + 4(5) + 5(6)$.
5. $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5$.
7. $\sum_{i=1}^n 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$.

11. $62.5\pi \sum_{i=1}^n x_i(18 - x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$.

Sección 5.4, p. 234

1. $5/8$; 3. $609/4$; 5. $242/5$.

Sección 5.5, p. 239

1. 12; 11. $2(\sqrt{2} - 1)$; 13. $1/5$; 15. $1/2(\pi^2 - 1)$; 17. $x^2 - 2x + 5$; 19. $1/5$.

Sección 5.7, p. 245

1. $73/12 - 5\sqrt{5}$; 3. $2\sin 4 - 3\sin 1 + 12$; 5. $24(281 - 10\sqrt{2})$.

Sección 5.8, pp. 255-256

1. $5/8$; 3. $28/3$; 5. $3/2$; 7. $9/2$.

13. $5/12$; 15. 24; 17. 12; 19. $2/3$; 21. $2/3$; 23. $2/3$.

25. 1; 27. 2; 29. $8/3$; 31. Dominio = $[-2; +2]$; valor máx. $F(\sqrt{2}) = 2$; área = $16/3$.

Sección 5.9, pp. 266-267

1. $15/2\pi$; 3. $1/3\pi h$; 5. $64/3\pi$; 7. $216\pi/5$.
9. $129/4\pi$; 11. $43/4\pi x$; 13. $1/3\pi(ab^2)$; 15. $\pi h^2 \left(\frac{r}{3} - \frac{h}{3}\right)$.

Sección 5.10, pp. 276-277

1. $1/2$ kgm; 3. 2.7 kgm; 5. 12800000π kgm.
7. $40.000.000\pi$ kgm; 9. $39.204.000\pi$; 11. $107.500.000\pi$.

$$13. \frac{250\pi}{3} r^2 (k^2 + 6h^2 + 12hk). \quad 15. \frac{3,200,000}{3} \pi. \quad 17. 614,400\pi.$$

Sección 5.11, pp. 283-284

$$\begin{array}{lll} 1. 18,000 \text{ kg.} & 3. 8,000/3 \text{ kg.} & 5. 125,000/3 \text{ kg.} \\ 7. 120,000 \text{ tons.} & 9. y = s/\sqrt{2}. & 13. 41,280 \text{ kg.} \end{array}$$

Ejercicios adicionales al capítulo 5, pp. 284-285

$$1. 13. \quad 3. \frac{39}{15} a^{3/2}. \quad 5. \frac{2}{3}. \quad 7. \frac{2}{15}. \quad 9. 80. \quad 11. 0. \quad 13. \frac{1}{3}. \quad 15. \frac{97}{6}.$$

Sección 6.1, pp. 289-291

$$\begin{array}{ll} 1. -2 \sin 2x. & 3. 2 \cos (2x - 1). \\ 5. \frac{-\cos 2x}{\sqrt{1 - \sin 2x}} & 7. \tan \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} y \sec^2 \frac{1}{2} y. \\ 9. 9 \tan^2 3s \sec^2 3s. & 11. 3 \csc (2 - 3x) \cot (2 - 3x). \\ 13. \cot x^2 - 2x^2 \csc^2 x^2. & 15. 0. \\ 17. [\sec^2 (\tan x)] \sec^2 x. & 19. \sec^2 x - 1. \\ 21. 2a \sec^2 ax \tan ax. & 23. a \sec^2 \frac{x}{2} \tan \frac{x}{2}. \\ 25. \frac{2 + 2x^2}{\sec^2 y (1 - x^2)}. & 27. \frac{1 - 2y \sec^2 2x}{\tan 2x}. \\ 29. \pi/4. & 31. h = 4a, r = a\sqrt{2}. \\ 33. y = \frac{1}{3} \sec 3x + k. & 35. y = -\frac{1}{a} \csc ax + k. \\ 37. y = 2 \tan x + 2 \sec x - x + k. & 39. y = -\frac{1}{8} \cos^4 2x + k. \\ 41. y = -\frac{1}{4} \csc 4x + \frac{5}{4}. & 43. y = \frac{1}{3} \sec 3x + 1. \\ 45. \frac{8}{\pi} \text{ unidades cuadradas.} & \\ 47. S'(t) = 15 \cos 3t, S''(t) = -45 \sin 3t. & \\ 49. S'(t) = -32 \sin 4t, S''(t) = -128 \cos 4t. & \end{array}$$

Sección 6.2, pp. 303-305

$$\begin{array}{ll} 1. \frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2 - \frac{1}{4})^2}} & 3. -\frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}. \\ 5. \frac{2x}{1 + x^4}. & 7. \frac{3}{x^3 - 6x + 18}. \\ 9. \frac{2x}{(x^2 - 4) \sqrt{x^4 - 8x^2 + 15}} & 11. \frac{x}{1 + x^2} + \arctan x. \\ 13. \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}} & 15. \frac{2 \arcsen x}{\sqrt{1 - x^2}} \\ 17. \frac{-1}{\sqrt{-2 + 3x - x^2}} & 19. \frac{2}{x^2 + 1} \end{array}$$

EJERCICIOS IMPARES

$$\begin{array}{ll} 21. \frac{a}{x\sqrt{x^2 - a^2}}. & 23. \frac{1}{(2-x)\sqrt{(x-2)^2 - 1}} \\ 25. \frac{a-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}. & 27. y = \frac{1}{3} \arcsen \frac{3x}{4} + k. \\ 29. y = \frac{1}{2} \arctan 2x + k. & 31. y = \arcsen \frac{x}{2} + k. \\ 33. y = \arctan (x + 2) + k. & 35. y = \frac{1}{3} \arcsen 3x + \frac{17}{18}\pi. \\ 37. y = \frac{1}{2} \arcsen 2x + \frac{17}{12}\pi. & 39. \frac{\pi}{3}. \\ 41. -\frac{\pi}{18}. & 43. y = \frac{1}{2} (\arcsen x)^2 + k. \\ 45. y = \frac{1}{3} (\arctan v)^2 + k. & 47. \pi \text{ unidades cuadradas.} \\ 49. \frac{\pi}{3}. & 51. y = \arctan x - \frac{\pi}{4}. \end{array}$$

Sección 6.3, p. 311

$$5. 3, 2, 3, 5, 3, -4. \quad 7. 16\frac{1}{4}, 16\sqrt{2}.$$

Sección 6.5, pp. 317-319

$$\begin{array}{lll} 1. \frac{5}{x}. & 3. \frac{1}{x \ln x}. & 5. -\frac{1}{x}. \\ 7. \cot x. & 9. \frac{1 - \ln |x|}{x^2}. & 11. 2x \ln x + x. \\ 13. \tan x. & 15. \frac{1 - \frac{1}{2} \ln |x|}{x\sqrt{x}}. & 17. \frac{2x + 3}{x^2 + 3x}. \\ 19. \frac{1}{2x(1-x)}. & 21. \sec x \csc x. & 23. \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{x}{x^2 - 1}. \\ 25. \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}. & 27. \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}. & \\ 29. y = \frac{1}{2} \ln |3x^2 + 5| + k. & 31. w = \frac{1}{2} \ln |5x - 9| + k. & \\ 33. y = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 12x + 3| + k. & 35. y = -\ln \cos x + k. & \\ 37. y = \frac{1}{2} \ln |2x + 3| - \frac{1}{2} \ln 3. & 39. 3,920. & \\ 41. \frac{1}{2} \ln \frac{13}{8}. & 43. -1. & \\ 45. x - y - 1 = 0, x - ey = 0. & 49. 2 \ln 5 \text{ unidades cuadradas.} & \\ 51. 10 \ln \frac{3}{2} + 2\frac{1}{2} \text{ unidades cuadradas.} & 55. (4, 2.773). & \end{array}$$

Sección 6.6, p. 321

$$\begin{array}{l} 1. \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \left(\frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{2x}{x^2 - 1} \right). \\ 3. \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} \left[\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)} \right]. \\ 5. (x+1)^{2/3} (2x+5)^{2/3} \left[\frac{2}{3(x+1)} + \frac{3}{2x+5} \right]. \\ 7. x^{\cos x} \left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \ln x \right). \end{array}$$

Sección 6.7, pp. 325-326

1. $4xe^{2x^2}$.
5. $2 \sin x \cos xe^{\sin^2 x}$.
9. $\frac{1}{2}(e^{x/2} + e^{-x/2})$.
13. $-6e^{3-6x}$.
17. $2e^{2x} \cos e^{2x} e^{2 \tan e^{2x}}$.
21. $\sec^2 x e^{\tan x}$.
25. $y = -e^{-x} + k$.
29. $y = -e^{\cos x} + k$.
33. $y = \frac{1}{2}e^{2x-x^2} + \frac{7}{2}$.
37. $\frac{1}{2}(1 - e^{-4})$.
41. $F(-1) = -\frac{1}{e}$ es un valor mín. rel., $(-2, -\frac{2}{e^2})$ es un punto de inflexión.
43. 0.865 unidades cuadradas.
47. 48.400 unidades cuadradas.
51. 745π unidades cúbicas.
3. $e^x \ln x + \frac{1}{x} e^x$.
7. $3x^2$.
11. $10^{3x^2} \cdot 6x \cdot \ln 10$.
15. $2x \cdot 2^{x^2} \ln 2$.
19. $3(\sec 3x \tan 3x + e^{3x})$.
23. $\frac{-e^{-x}}{1 + e^{-2x}}$.
27. $r = \frac{1}{2}e^{x^2} + k$.
31. $y = a(e^{x/a} - e^{-x/a}) + k$.
35. $\frac{1}{2}(e^x - 1)$.
39. $8x \ln 2 - y = 24 \ln 2 - 8$.
45. 18.136 unidades cuadradas.
49. 0.272 unidades cuadradas.

Sección 6.8, p. 330

1. $r = 3e^{2x}$.
3. $F(t) = e^{-2t}$.
5. $u = 15e^{8t}$.
7. $y = 3e^{1-(x/2)}$.
9. $p = 1.033 e^{-0.00013x}$, $p = 0.519$ cuando $h = 5,000$,
 $p = 0.451$ cuando $h = 6,000$, $p = 0.341$ cuando $h = 8,000$.
11. $q = q_0 e^{-0.00085t}$; $q = 0.96q_0$ para $t = 100$,
 $q = 0.83q_0$ para $t = 500$, $q = 0.38q_0$ para $t = 25,000$.
13. $t = 46.4$ años.

Ejercicios adicionales al capítulo 6, pp. 330-331

1. $\sec x$.
7. $(2 \ln 5)(\cos x) 5^{1+2 \ln x}$.
13. $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
17. $\frac{\sqrt{x(x-a)(x-b)(x-c)}}{n} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} \right)$.
19. $a(2^{ax+b}) \ln 2$.
23. $y = \frac{1}{b} \arcsen \frac{bx}{a} + k$.
3. $\frac{-a \sin 2ax}{1 + \cos^2 ax}$.
9. $\sec x$.
15. $\frac{2x-4}{(x-1)(2x-3)}$.
21. $y = -\frac{1}{3} \ln(5-2x) + k$.
25. $\frac{1}{2} \ln 2$.
5. $\frac{2xa^4}{(x^4 + a^4)^{3/2}}$.
11. $\frac{x}{1+x^2}$.
27. $\frac{1}{a} \arctan \frac{b}{a}$.

Sección 7.1, pp. 337-338

1. $-\frac{1}{x} + k$.
5. $\frac{3}{2} \ln |1+2x| + k$.
9. $-\frac{1}{2}e^{-2x} + k$.
13. $\frac{1}{3} \sin 3x + k$.
3. $\frac{1}{5} \sin^5 x + k$.
7. $\ln |x| - 2x + \frac{1}{2}x^2 + k$.
11. $-\frac{1}{2} \left(\frac{10^{-2x}}{\ln 10} \right) + k$.
15. $\frac{1}{2} \sec 2x + k$.

EJERCICIOS IMPARES

17. $\frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} + k$.
21. $\operatorname{arcsec} 3x + k$.
25. $-\frac{1}{2}(1 + 2 \cos 2x)^{3/2} + k$.
29. $\ln(\ln x) + k$.
33. $-\ln |\cot x + 1| + k$.
37. $\ln[(x+1)^2 + 16] - \frac{5}{4} \arctan \frac{x+1}{4} + k$.
39. $\frac{1}{4}[\ln(1+x^2)]^2 + k$.
43. $\ln(1 + \sin^2 x) + k$.
47. $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + k$.
51. $\frac{1}{3} \arcsen \frac{3x}{4} + k$.
19. $\arcsen \frac{x}{3} + k$.
23. $(8+x^2)^{1/2} + k$.
27. $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + k$.
31. $x^2 + k$.
35. $\arctan \left(\frac{x}{2} - 1 \right) + k$.
41. $\frac{1}{4} \sin^4 e^x + k$.
45. $2 \tan \sqrt{x} - 2\sqrt{x} + k$.
49. $\frac{1}{2}e^{2x^2} + k$.
53. $\ln |\csc x - \cot x| + k$.

Sección 7.2, p. 341

1. $x \sin x + \cos x + k$.
5. $x \tan x - \ln |\sec x| + k$.
9. $\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x| + k$.
13. $x \operatorname{arcsec}^2 x - \frac{2}{x^2 - x} - \frac{2}{x} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + k$.
15. $-\frac{1}{2} \cos x^2 + k$.
19. $\frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6} \ln |1+x^2| + k$.
21. $-\frac{1}{4} \cos 2x \csc^2 2x + \frac{1}{4} \ln |\csc 2x - \cot 2x| + k$.
25. $2 \ln 2 - \frac{1}{4} = 0.63630$ unidades cuadradas.
27. $\pi \left(\frac{\pi \sqrt{3}}{18} + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ unidades cúbicas.
3. $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + k$.
7. $\frac{1}{2}e^x (\sin 2x - 2 \cos 2x) + k$.
11. $x \arccos x - (1-x^2)^{1/2} + k$.
17. $\frac{1}{2}x^3 \operatorname{arcsec} x - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + k$.

Sección 7.3, pp. 347-348

1. $\frac{1}{4}[x - \sin 2x + \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x)] + k$.
3. $-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 2x + k$.
5. $-\frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos^3 3x - \frac{1}{7} \cos^5 3x + \frac{1}{9} \cos^7 3x + k$.
7. $-\frac{1}{2} \cot 2x - \frac{1}{8} \cot^3 2x + k$.
9. $\frac{1}{10} \tan^5 x - \frac{1}{2} \tan^3 x + \frac{1}{2} \tan x - \frac{1}{2}x + k$.
11. $-\frac{1}{2} \csc^2 x + \ln |\csc x| + k$.
15. $-\frac{1}{16}x + \frac{5}{16} \sin 2x \cos 2x - \frac{1}{4} \cos 4x + k$.
17. $-\frac{1}{15} \cos^5 3x + k$.
21. $\frac{2}{3} \sec^3 \frac{x}{2} + k$.
23. $\tan x + 2 \ln |\csc 2x - \sin 2x| - \cot x + k$.
25. $\frac{1}{3} \ln |\sec 3x + \tan 3x| + k$.
29. $\frac{1}{2} \cos(-x) - \frac{1}{10} \cos 5x + k$.
33. $\frac{1}{m-n} [-\sin(m\pi + n\pi)] + k$.
35. $-\frac{1}{m-n} [\sin(m\pi - n\pi)] - \frac{1}{m+n} [\sin(m\pi + n\pi)] + k$.
37. $\frac{1}{2m} [\sin 2m\pi] + k$.
13. $\frac{1}{2} \sin^2 x + k$.
19. $\frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{3} \tan^3 x + k$.
27. $2 \sin x + k$.
31. $-\frac{1}{2} \sin(-x) + \frac{1}{18} \sin 9x + k$.

Sección 7.4, pp. 361-362

1. πab unidades cuadradas.
3. $\frac{80}{3} - 12 \ln 3$ unidades cuadradas.
5. $8000 \left(\frac{8\pi}{3} + 3\sqrt{3} \right) \text{ kgm.}$
7. $\frac{81\pi}{16}$
9. $\frac{\sqrt{3}-1}{8}$
11. $-\frac{2}{25}(2-5x)^{3/2}(x+\frac{4}{15}) + k, x \leq \frac{5}{2}$.
13. $\frac{3}{2} \ln |x^{2/3}-1| + k, x \neq 0, 1$.
15. $3x^{1/3} - 6x^{1/6} + 6 \ln |x^{1/6}+1| + k, x \neq 0$.
17. $-\frac{\sqrt{x^2+9}}{9x} + k, x \neq 0$.
19. $-\frac{x}{16\sqrt{x^2-16}} + k, |x| > 4$.
21. $\frac{a^2}{2} \left[\arcsen \frac{x-a}{a} + \frac{(x-a)\sqrt{2ax-x^2}}{a^2} \right] + k$.
23. $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \arctan x + k, x \in \mathbb{R}$.
25. $-\frac{\sqrt{x^2+9}}{9x} + k, x \neq 0$.
27. $\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\tan x + 2 - \sqrt{3}}{\tan x + 2 + \sqrt{3}} \right| + k$.

Sección 7.5, p. 368

1. $5 \ln |x+2| + \frac{7}{x+2} + k$.
3. $\ln(|x|\sqrt{x^2-1}) + k$.
5. $\ln |x-2| - \frac{1}{4} \ln |(x-1)^2(x+3)| + k$.
7. $\frac{1}{2a^2} \ln \left| \frac{x^2}{a^2-x^2} \right| + k$.
9. $\ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{1}{x} + k$.
11. $x + \frac{10}{x-1} - \ln |x-1| + k$.
13. $x - 4 \ln |x+2| - \frac{5}{x+2} + k$.
15. $\frac{1}{8} \ln \frac{x^2}{x^2+4} - \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + k$.
17. $3 \ln (x^2+1) - \frac{3x^2}{x^2+1} + k$.
19. $\frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{x^2+4} + \frac{9}{16} \arctan \frac{x}{2} + \frac{x}{8(x^2+4)} + k$.

Sección 7.6, pp. 370-371

1. $\frac{1}{8} \left(\frac{x}{x^2+4} \right) + \frac{1}{16} \arctan \frac{x}{4} + k$.
9. $\frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\sec x| + k$.

Ejercicios adicionales al capítulo 7, pp. 371-373

1. $\frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln(ax+b) + k$.
3. $-\frac{1}{3(x^2+9x-7)} + k$.
5. $\frac{1}{2}x^3 + x^2 + 4x + 8 \ln(x-2) + k$.
7. $2 \ln(x^2+2x+2) + \arctan(x+1) + k$.

9. $(x^2+3x) \ln x - \frac{x^2}{2} - 3x + k$.
11. $3 \ln(x^2+4x+13) - 3 \arctan \frac{1}{2}(x+2) + k$.
13. $2\sqrt{x+2} \left[\frac{1}{2}(x+2)^2 - \frac{4}{3}(x+2) + 4 \right] + k$.
15. $\frac{1}{4}(x^4-1) \arctan x + \frac{1}{4}x - \frac{1}{12}x^3 + k$.
17. $\frac{e^{ax}(b \sin bx + a \cos bx)}{a^2+b^2} + k$.
19. $-(x^4-12x^2+24) \cos x + (4x^3-24x) \sin x + k$.
21. 0.511.
23. $y = -2 \ln(4-x^2)$.
29. (a) $\frac{128}{315}$; (b) $\frac{63\pi}{512}$.

Sección 8.1, pp. 378-379

1. 9 cm² por segundo.
3. (5, -5).
5. 6168 lbs.
7. $16/\sqrt{41}$.
9. $27/92.16\pi$ l/minuto.
11. 1.28 kms./hora, 4.28 kms./hora.
13. 0.06 Radianes por minuto.

Sección 8.2, pp. 389-390

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
3. $y = 2x^2, x \in [-1; 1]$
5. $y' = \frac{12}{x}; x \in (-\infty; 0); 3x + y = 12$.
7. $y = \frac{4}{\sqrt{3}} x^{1/2}; x \in [0; +\infty); y-4 = \frac{2}{3}(x-3)$.
9. $y = x^2 + 4x, x \in \mathbb{R}; 4x + y + 16 = 0$.
11. $D_x y = \frac{6t+5}{3t^2+4}, D_x^2 y = \frac{-18t^2-30t+24}{(3t^2+4)^2}$.
13. $D_x y = \frac{2t}{e^t}; D_x^2 y = \frac{2(1-t)}{e^{2t}}$.
15. $D_x y \Big|_{t=1} = \frac{e^2+1}{e^2-1}; D_x y \Big|_{t=-1} = \frac{1+e^2}{1-e^2}; D_x y \Big|_{t=2} = \frac{e^4+1}{e^4-1}; D_x y \Big|_{t=-2} = \frac{1+e^4}{1-e^4}$.
19. $y=0; y=2x; y=-2x, t=1: (3, 3); t=-1: (-3, 3)$.
23. La ecuación de la línea tangente es $x-y = \frac{1}{2}ax - 2a$, la ecuación de la línea normal es $x-y = \frac{1}{2}a\pi$.
25. $D_x y = 2t, D_x^2 y = 2$.
27. $D_x y = -\frac{5}{4} \cot \theta, D_x^2 y = -\frac{5}{16} \csc^3 \theta$.

Sección 8.3, pp. 399-401

1. (a) (6, -2), (b) (-2, 8), (c) (16, -9), (d) (8, 12).
7. $y^2 = 4x; V = (8t, 4), A = (8, 0)$.
9. $y^3 = x^2; V = (3t^2, 2t), A = (6t, 2)$.

11. $y = 3e^{x/2}$; $V = (2, 3e^t)$, $A = (0, 3e^t)$.
 13. $x_t = -2\frac{1}{6}$, $y_t = 1\frac{1}{6}$.
 17. $x = -\cos t + 1$, $y = \sin t$.
 15. $x = t^2 + 1$, $y = t^3 - 2$.
 19. $x = 2(1 - \cos t)$, $y = 3 \sin t + 4$.

Sección 8.4, pp. 402-403

1. $x = (60/\sqrt{2})t$, $y = (60/\sqrt{2})t - \frac{1}{2}gt^2$.
 $y = x - (g/3600)x^2$.
 $v = (60/\sqrt{2}, 60/\sqrt{2} - gt)$, $V = (60/\sqrt{2}, 60/\sqrt{2} - 3g)$.
 5. $x = 250\sqrt{3}t$, $y = 250t - \frac{1}{2}gt^2$, $500/g$, $500^2\sqrt{3}/2g$.

Sección 8.5, pp. 415-417

3. $A(2, \sqrt{3})$, $B(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$, $C(-\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2})$,
 $E(-4, 0)$, $F(0, 5)$, $G(3, 0)$.
 5. $x^2 + y^2 = 25$.
 9. $x^2 + y^2 = 6y$.
 17. $r(2 \cos \theta + 4 \sin \theta) = 5$.
 21. (a) y (c) son correctas; $A = \frac{3}{2}\pi a^2$.
 23. $\frac{1}{4}$.
 25. $3\frac{2}{3}$.
 27. $\frac{3}{2}\pi a^2$.
 29. $\frac{\pi a^2}{4}$.
 31. $\frac{1}{2}\pi a^2$.
 33. $\frac{2}{3}(3\sqrt{3} + 2\pi)$.

Sección 8.6, pp. 425-427

1. $\ln(\sqrt{2} + 1)$.
 5. $\frac{1}{64}(97\sqrt{97} - 52\sqrt{52})$.
 9. 4.
 13. 12.
 17. $\ln|1 - \sqrt{1 + e^2}| - 1 - \sqrt{2} + \sqrt{1 + e^2} - \ln|1 - \sqrt{2}|$.
 19. $30\sqrt{29} + 375 \ln\left(\frac{2 + \sqrt{29}}{5}\right)$.
 23. $\pi a \sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{1}{2}a \ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2})$.
 3. $\frac{3}{2}\pi(13^{2/3} - 8)$.
 7. 4π .
 11. $2\sqrt{2} + 2 \ln|\sqrt{2} + 1|$.
 15. $\sqrt{2}(e^2 - 1)$.
 21. 4.
 25. $\frac{3}{2}\pi a$.

Sección 8.7, pp. 433-434

1. $\frac{98\pi}{81}$.
 3. $\frac{49\pi}{3}$.
 5. $\pi(2\sqrt{2} + \ln|\sqrt{2} + 1| - \ln|\sqrt{2} - 1|)$.
 7. $\frac{\pi}{9}[(82)^{3/2} - 1]$.
 9. $\pi\left(-\frac{111}{4}\sqrt{37} + \frac{35}{8}\ln[6 + \sqrt{37}]\right)$.
 11. $1225/4\pi$.
 13. 131.1, aproximadamente.
 15. 36 unidades cuadradas.
 17. $5\pi^2 a^3$.
 19. $\frac{4ab^2\pi}{3}$.
 21. 259.2π .
 23. $\pi a^2(2 - \sqrt{2})$.

Sección 8.8, pp. 442-443

1. $h = t + \frac{1}{2}\left(\frac{t^4 + 16}{t^3}\right)$, $k = \frac{4}{t} + \frac{t^4 + 16}{8t}$, $R = \frac{1}{8}(17)^{3/2}$, centro $\left(\frac{19}{2}, \frac{49}{8}\right)$.

3. $h = t - \frac{1}{4}t^3$, $k = \frac{5}{6}t^3 + \frac{2}{t}$, $R = \frac{5}{4}\sqrt{5}$, $\left(\frac{3}{4}, \frac{17}{6}\right)$.
 5. $h = -8t^2$, $k = 6t^2$.
 7. $h = 0$, $k = 0$.
 9. $x^2 - 19x + y^2 - 49y + 51 = 0$.
 15. 0; porque y'' es cero.
 17. $R = 1$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$.
 19. $R = \frac{1}{2}$, $\left(3, \frac{15}{2}\right)$.
 21. (a) $\frac{2}{25}\sqrt{5}$, (b) $\frac{8}{25}\sqrt{5}$.

Sección 8.9, pp. 453-454

1. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \sin x$.
 3. $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}(x+1)^{-6}$.
 5. $\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{1}{5}(x-1)^5 - \frac{1}{6x^6}(x-1)^6$.
 7. $\cos x = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 \cos x$.
 9. $\ln 1.2 \approx 0.1823$ con error < 0.000011 .
 13. $e^2 \approx 7.389$, $\sqrt{e} \approx 1.649$.
 15. $\cos \frac{2\pi}{3} \approx -0.4997$.
 17. $\sqrt[3]{x} = 2 + \frac{1}{6}(x-8) - \frac{1}{9 \cdot 16 \cdot 2}(x-8)^2 + \frac{4}{27 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 64 \cdot 2}(x-8)^3 + R_3(x)$, $\sqrt[3]{9} \approx 2.08$.
 19. (b) 0.0021.

Ejercicios adicionales al capítulo 8, pp. 454-456

1. 3 kms/hora.
 3. (a) No. Si $x = U(t) = t^2 - 1$, entonces U no es biunívoca en Re .
 (b) $x_t = 2t$, $y_t = 3t^2$, $m_t = \frac{3}{2}t$.
 (c) $3x - 2y - 6 = 0$, la ecuación de la línea tangente; $3y + 2x + 9 = 0$, ecuación de la línea normal;
 (d) $(y-4)^2 = (x+1)^2$.
 5. La parte (b) del ejercicio 4 determina una función;
 $D_x y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, $D_x^2 y = \frac{1}{2}$.
 7. $A = (2, 2)$.
 9. (a) $V = (2t, 2)$, $A = (2, 0)$.
 (b) $V = (4, 2)$, $A = (2, 0)$; $|V| = 2\sqrt{5}$, $|A| = 2$.
 11. (a) $V = (2 \cos t, -2 \sin 2t)$, $A = (-2 \sin t, -4 \cos 2t)$.
 (b) $V = (\sqrt{2}, -2)$, $A = (-\sqrt{2}, 0)$; $|V| = \sqrt{6}$, $|A| = \sqrt{2}$.
 13. (a) $(1, \pi/3)$, $(1, 5\pi/3)$, $(0, 0)$.
 15. $2\frac{5}{2}(\pi + 2)$.
 17. $\ln(2 + \sqrt{3})$.
 19. $\frac{1}{27}(13\sqrt{13} + 80\sqrt{16} - 16) \approx 10.5$.

21. $\frac{8\pi}{3}$.

23. $\frac{56\pi}{3}$.

25. Radio $\frac{5}{4}\sqrt{5}$, centro $(\frac{1}{4}\pi - \frac{5}{2}, \frac{5}{4})$.

27. $h = 9t^2 - \frac{7}{8}, k = 1 + t - 36t^2$.

Sección 9.1, pp. 464-465

- 5 unidades del eje x , 4 unidades del eje y , 3 unidades del eje z , 5 unidades del origen;
3 unidades del eje x , 4 unidades del eje y , 5 unidades del eje z , 5 unidades del origen;
4 unidades del eje x , 5 unidades del eje y , 3 unidades del eje z , 5 unidades del origen;
 $\sqrt{13}$ unidades del eje x , $2\sqrt{10}$ unidades del eje y , $3\sqrt{5}$ unidades del eje z , 7 unidades del origen;
 $\sqrt{5}$ unidades del eje x , $\sqrt{17}$ unidades del eje y , $2\sqrt{5}$ unidades del eje z , $\sqrt{21}$ unidades del origen;
5 unidades del eje x , $2\sqrt{5}$ unidades del eje y , $\sqrt{13}$ unidades del eje z , $\sqrt{29}$ unidades del origen;
 $2\sqrt{5}$ unidades del eje x , $\sqrt{41}$ unidades del eje y , $\sqrt{29}$ unidades del eje z , $3\sqrt{5}$ unidades del origen;
 $\sqrt{13}$ unidades del eje x , $2\sqrt{10}$ unidades del eje y , $3\sqrt{5}$ unidades del eje z , 7 unidades del origen.

3. (a) $\sqrt{22}$, (b) $\sqrt{6}$, (c) $\sqrt{227}$, (d) $2\sqrt{14}$.

5. (a) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, (b) $\sqrt{b^2 + c^2}$, (c) $\sqrt{a^2 + c^2}$, (d) $\sqrt{a^2 + b^2}$.

7. $\{(x, y, z) \mid x = 0, z = 0\}$; $\{(x, y, z) \mid x = 0, y = 0\}$.

9. (a) Plano paralelo al plano yz que pasa por $(4, 0, 0)$;

(b) Plano paralelo al plano xz que pasa por $(0, 5, 0)$;

(c) Plano paralelo al plano xy que pasa por $(0, 0, -2)$.

11. (a) $(6, 3, \frac{5}{2})$, (b) $(7, 4, \frac{10}{3})$, (c) $(9, 6, \frac{14}{3})$, (d) $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

13. $-3x - 3y - 2z + 36 = 0$.

15. (a) $4\sqrt{19}$, (b) $\sqrt{2}$, $5\sqrt{5}$, $\sqrt{101}$.

17. (a) esfera, $C(-4, 0, 5)$, radio = 6; (b) ecuación del conjunto nulo;

(c) esfera, $C(0, 0, 9)$, radio = 9.

19. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 42x - 16y - 32z + 123 = 0$;

$C(-7, \frac{8}{3}, \frac{16}{3})$, radio = $\frac{2}{3}\sqrt{98}$.

Sección 9.2, pp. 471-472

1. $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{1}{2}$; 60° ; 45° ; 60° .

3. $-\frac{1}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{1}{2}$; 120° ; 135° ; 60° .

5. $2, -2, 2$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

7. $1, -3, 2$; $\frac{\sqrt{14}}{14}$, $-\frac{3\sqrt{14}}{14}$, $\frac{\sqrt{14}}{7}$.

9. (a) $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{1}{2}$; 60° , 45° , 120° .

13. $54^\circ 44'$.

11. b, c, d .

15. $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$.

17. $-\frac{3\sqrt{29}}{29}$, $\frac{4\sqrt{29}}{29}$, $\frac{2\sqrt{29}}{29}$.

EJERCICIOS IMPARES

Sección 9.3, p. 475

1. $\cos \theta = 0$; perpendicular.

3. $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{13}}$.

7. $\cos \theta = \frac{3\sqrt{2}}{13}$.

9. Perpendicular.

11. $2, -5, -11$.

13. $1, 2, -1$.

Sección 9.4, pp. 481-482

1. $4, -12, 3$.

3. $-12, -6, -4$.

7. $2x + 3y - 2z + 10 = 0$.

9. $x + 3z - 5 = 0$.

11. $40x - 19y - 52z - 124 = 0$.

13. $2x + 9y - 9z = 0$.

15. 60° .

17. Perpendicular.

19. $\cos \theta = \frac{3\sqrt{70}}{70}$.

Sección 9.5, pp. 486-488

1. $x = 1 + 3t, y = 6 + 3t, z = -3 + 5t$.

3. $x = -4 + 7t, y = 3 + 2t, z = 2 - 3t$.

5. $x = -4 + 12t, y = -8 + 4t, z = 3 - 3t$.

7. $x = -3 - 3t, y = 4, z = -2 + 2t$.

9. $\frac{x+9}{-10} = \frac{y+8}{-7} = \frac{z}{1} = -\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{7}{30}\sqrt{6}, \frac{1}{30}\sqrt{6}$.

11. $\frac{x-\frac{2}{3}}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{3} = \frac{\sqrt{14}}{7} = \frac{\sqrt{14}}{14} = \frac{3\sqrt{14}}{14}$.

13. Intersecta al plano xy en $(\frac{14}{5}, \frac{3}{5}, 0)$, al plano yz en $(0, 9, 14)$, al plano xz en $(3, 0, -1)$.

19. $x = 4 + 2t, y = 3, -t, z = -5 - 3t$.

21. $(-2, -3, 1)$.

23. $\frac{14}{\sqrt{273}}$.

25. 60° .

27. $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$.

29. $x = 1 + 4t, y = 3 + 6t, z = 1 - 2t$.

31. $x = 1 + t, y = -1, z = 2$.

33. 7.

Sección 9.6, p. 490

1. Círculo.

3. Cilindro circular.

5. Hipérbola.

7. Curva exponencial.

9. Cilindro circular.

11. Cilindro circular.

13. Cilindro.

15. Cilindro parabólico.

17. $x^2 + y^2 - 2x = 0$; cilindro circular.

Sección 9.7, p. 494

1. Eje z , gráfica de $z = x^2$ ó $z = y^2$.

3. Eje x , gráfica de $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ ó $\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$.

5. Eje x , gráfica de $y^2 = 4x$ ó $z^2 = 4x$.

7. Eje x , gráfica de $z = x^2$ ó $z = y^2$.

9. Eje x , gráfica de $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ ó $\frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1$.

Sección 9.8, p. 501

1. Esfera.
5. Cono.
9. Paraboloide hiperbólico.
13. Cilindro circular.
17. Cono.
3. Hiperboloide de una hoja.
7. Cono.
11. Paraboloide circular.
15. Cilindro circular.

Sección 9.9, p. 505

3. (b) $x = 5 - \frac{3}{2}t, y = 3 + t, z = 3 + t$.
5. (b) $\frac{1}{8}(12 + 5 \ln 5)$; (c) $x = \frac{1}{2} + t, y = 1 + 2t, z = \frac{1}{4} + t$.

Ejercicios adicionales al capítulo 9, pp. 505-507

1. $4\sqrt{3}; (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 48$.
3. $4x + 2y - 25 = 0$, plano.
7. (a) $x^2 + y^2 = 16$, (b) $x^2 + z^2 = 9$, (c) $y^2 + z^2 = 25$.
9. $\cos \gamma = 0, \cos \beta = 0, \cos \alpha = 0$. 11. $\cos \theta = \frac{2}{3}$.
13. (a) Perpendicular, (b) paralelo, (c) perpendicular, (d) $\cos \theta = \frac{1}{2}$.
15. $(1, 2, -1), x + 3y + z = 6$.
17. $x = -1 + 3t, y = 2 - 5t, z = 3 + t$; longitud = $\sqrt{35}$.
19. $k < 13, k = 13, k > 13$.
23. $3(x^2 + y^2 + z^2) - 6x + 2y - 2z - 63 = 0$; esfera, centro $(1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $r = \frac{10}{3}\sqrt{2}$.
25. $\sqrt{3}(e - 1)$.

Sección 10.1, pp. 514-515

1. $D = [-1; 5], R = [-4; 5]$.
5. D es el plano xy ; esto es $D = \{(x, y) | -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty\}$.
7. $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$, D es una región abierta.
9. Si. 11. Si. 13. No.
15. Una región, un conjunto ni abierto ni cerrado.

Sección 10.2, pp. 521-523

1. $a \sec^2(ax + by), b \sec^2(ax + by)$.
3. $\frac{-1}{\sqrt{y-2x}}, \frac{1}{2\sqrt{y-2x}}$.
5. $D_x F(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} & \text{si } y > 0 \text{ y } x \neq y, \\ -\frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} & \text{si } y < 0 \text{ y } x \neq y; \end{cases}$
- $D_y F(x, y) = \begin{cases} \frac{-x}{y\sqrt{y^2 - x^2}} & \text{si } y > 0 \text{ y } x \neq y, \\ \frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}} & \text{si } y < 0 \text{ y } x \neq y. \end{cases}$

EJERCICIOS IMPARES

7. $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$
9. Para el ejercicio 3, $D = \{(x, y) | y \geq 2x\}$; para el ejercicio 4, $D = \{(x, y) | x^2 \geq y\}$; para el ejercicio 6, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$; para el ejercicio 7, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 4\}$; para el ejercicio 8, $D = \{(x, y) | x^2 \geq y^2\} \cup \{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 4\}$.
11. $F_x(x, y) = -8x, F_y(x, y) = -2y, F_z = \{(x, y, z) | z = -8x\}, F_v = \{(x, y, z) | z = -2y\}$; dominio de $F = \{(x, y) | 4x^2 + y^2 < 4\}$, dominio de $F_z =$ dominio de $F_v =$ dominio de F ; $F(\frac{1}{2}, 1) = 2, F_z(\frac{1}{2}, 1) = -4, F_v(\frac{1}{2}, 1) = -2$.
13. $F_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}; F_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}$.
 $F_z = \{(x, y, z) | z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}\}$,
 $F_v = \{(x, y, z) | z = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}\}$;
 dominio de $F = \{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 9\}$, dominio de $F_z = \{(x, y) | x^2 + y^2 > 9\}$, dominio de $F_v = \{(x, y) | x^2 + y^2 > 9\}$; $F(-3, 2) = 2, F_z(-3, 2) = -\frac{3}{2}, F_v(-3, 2) = 1$.
15. $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}; \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$.
19. $D_x F(x, y, z) = 6x^2 - 2y \cos z, D_y F(x, y, z) = 8y - 2x \cos z, D_z F(x, y, z) = 2xy \sin z$.
21. $D_x F(x, y, z) = 4xye^{2xz} + \ln(y^2 - z^2), D_y F(x, y, z) = e^{2xz} + \frac{2xy}{y^2 - z^2}$;
 $D_z F(x, y, z) = \frac{-2xz}{y^2 - z^2} + \frac{6z}{1 + 9z^4}$.
23. $F_x(x, y, z) = 2x, F_y(x, y, z) = -4y, F_z(x, y, z) = 6z$;
 $F_u = \{(x, y, z, u) | u = 2x\}, F_v = \{(x, y, z, u) | u = -4y\},$
 $F_z = \{(x, y, z, u) | u = 6z\}$.
25. $F_x(x, y, z) = 3x^2 - 6yz, F_y(x, y, z) = 3y^2 - 6xz, F_z(x, y, z) = 3z^2 - 6xy$;
 $F_u = \{(x, y, z, u) | u = 3x^2 - 6yz\}, F_v = \{(x, y, z, u) | u = 3y^2 - 6xz\},$
 $F_z = \{(x, y, z, u) | u = 3z^2 - 6xy\}$.
27. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xye^{2xy}; \frac{\partial z}{\partial y} = 2e^{2xy}y$.
29. $\frac{\partial z}{\partial x} = -2 \sin(y - 2x), \frac{\partial z}{\partial y} = -\sin(y - 2x)$.
31. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xyz + y^2z + yz^2; \frac{\partial u}{\partial z} = x^2z + 2xyz + xz^2; \frac{\partial u}{\partial z} = x^2y + y^2z + 2xyz$.
33. $\frac{\partial u}{\partial x} = -a \csc^2(ax + by + cz), \frac{\partial u}{\partial y} = -b \csc^2(ax + by + cz),$
 $\frac{\partial u}{\partial z} = -c \csc^2(ax + by + cz)$.

Sección 10.3, pp. 526-527

1. $F(x, y) = x^4y - x^3y^3 + 2y + 7y^3$.
3. $F(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + 3 \ln|y|$.
5. $F(x, y) = \frac{x^3}{3} - 2x^2y - 2xy^2 + \frac{y^3}{3} + c$.

7. $F(x, y) = \sin \frac{x}{y} + c$.
11. $F(x, y) = xe^y + ye^x + c$. 13. Sin solución.
15. $F(x, y) = e^x \cos y + x^2 + \sin y + y^2 + c$.
17. $F(x, y) = \frac{3}{2}y - \frac{y}{2} \cos 2x + c$.

Sección 10.4, pp. 530-531

1. (b) $F_x(1, 2) = -\frac{1}{2}$, $F_y(1, 2) = -1$.
 (c) La representación perpendicular de la línea tangente a C_1 es $y = 2$, $z - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1)$; la representación perpendicular de la línea tangente a C_2 es $x = 1$, $z - 2 = -1(y - 2)$. La representación paramétrica de la línea tangente a C_1 es $x = 1 + t$, $y = 2$, $z = 2 - \frac{1}{2}t$; la representación paramétrica de la línea tangente a C_2 es $x = 1$, $y = 2 + t$, $z = 2 - t$.
 (d) $x - 1 + 2(y - 2) + 2(z - 2) = 0$; las intersecciones x , y y z son 1, 2 y 2 respectivamente.
 (e) $x = 1 + t$, $y = 2 + 2t$, $z = 2 + 2t$.
3. Ecuación del plano tangente, $2(x - 2) + 4(y - 1) - (z - 4) = 0$; representación paramétrica de la línea normal, $x = 2 + 2t$, $y = 1 + 4t$, $z = 4 - t$.
5. Ecuación del plano tangente, $\sqrt{2}x + 2y + 4z - 8 = 0$; la representación paramétrica de la línea normal, $x = \sqrt{2} + \sqrt{2}t$, $y = 1 + 2t$, $z = 1 + 4t$.
7. Ecuación del plano tangente, $2x - 2y - z = 0$; representación paramétrica de la línea normal, $x = 1 - 2t$, $y = 1 + 2t$, $z = t$.
9. Ecuación del plano tangente, $z = ex$; representación paramétrica de la línea normal, $x = 1 + et$, $y = 1$, $z = e - t$.
11. Ecuación del plano tangente, $4(x - 1) + z - 4 = 0$; representación paramétrica de la línea normal, $x = 1 + 4t$, $z = 4 + t$.
13. 4; 8.

Sección 10.6, p. 539

1. $\Delta z = \Delta x(2x + 2y) + \Delta y(2x - 2y) + \Delta x(\Delta x + \Delta y) + \Delta y(\Delta x - \Delta y)$;
 $\theta_1(\Delta x, \Delta y) = \Delta x + \Delta y$, $\theta_2(\Delta x, \Delta y) = \Delta x - \Delta y$.
3. $\Delta z = \Delta x(4x - y) + \Delta y(2y - x) + \Delta x(2\Delta x - \frac{1}{2}\Delta y) + \Delta y(\Delta y - \frac{1}{2}\Delta x)$;
 $\theta_1(\Delta x, \Delta y) = 2\Delta x - \frac{1}{2}\Delta y$, $\theta_2(\Delta x, \Delta y) = \Delta y - \frac{1}{2}\Delta x$.
5. $\Delta u = \Delta x(2x + z) + \Delta y(-2y) + \Delta z(x - 1) + \Delta x(\Delta x + \frac{1}{2}\Delta z) + \Delta y(-\Delta y) + \Delta z(\Delta x)$.

Sección 10.7, pp. 545-547

1. $D_t z = 0$.
3. $D_t z = e^{t/2}(\frac{1}{2} \sin 2t + 2 \cos 2t) + e^{2t}(2 \sin \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}t)$.
5. $D_t z = t \ln(1 - 3t) - \frac{3t^2}{2(1 - 3t)}$.
7. $D_t z = 1$.
9. $D_t z = -2(9t + e^{2t}) \sin(9t^2 + e^{2t})$.
11. $D_t z = [y \cos(xy) - \sin y]e^t + [x \cos(xy) - x \cos y](te^t + e^t)$.
13. $D_t u = te^t(2 \ln t + t \ln t + 1)$.
15. $D_t u = (\cos t - \sin t + 2t) \cos(\sin t + \cos t + t^2)$.

EJERCICIOS IMPARES

17. $D_t u = 2 \cos 4t + 2 \sin 4t$. 19. $D_t u = 18t$.
21. $D_t P = -0.311 \text{ kg/cm}^2$ por segundo.
23. Creciente $D_t V = 40\pi \text{ cm}^3$ por minuto.
25. $D_x z = 8x + 2$. 27. $D_x z = \frac{-x(1 + 8x^2)}{3\sqrt{36 - x^2 - 4x^4}}$.
31. $D_t u = e^x(\sin x + \cos x + x + 1) + \sin x + x \cos x$.

Sección 10.8, p.

1. (a) 2, (b) 1, (c) $\frac{6}{\sqrt{2}}$. 3. (a) $\frac{3}{\sqrt{7}}$; (b) $\frac{3}{\sqrt{7}}$; (c) $\frac{3\sqrt{14}}{7}$.
5. (a) $\theta = 135^\circ$; $\mathcal{L}_{(0)} z = 0$; (b) $\theta = 45^\circ$; $\mathcal{L}_{(0)} z = \frac{-3\sqrt{14}}{7}$.
7. De (3, 4) al origen. 9. (a) $-2\sqrt{3} + \frac{1}{2}$, (b) $\sqrt{17}$.

Sección 10.9, pp. 553-554

1. (a) $dz = 2(x + y) \Delta x + 2(x - y) \Delta y$,
 $\Delta z = 2x \Delta x + \Delta x^2 + 2x \Delta y + 2y \Delta x + 2\Delta x \Delta y - 2y \Delta y - \Delta y^2$;
 (b) $dz = 1.4$, $\Delta z = 1.41$.
3. (a) 7, (b) 7.1407, (c) 7.14. 5. (a) 17, (b) 11.274.
7. $dz = \frac{y dx - x dy}{y\sqrt{y^2 - x^2}}$. 9. $dz = e^{2x+3y}(2dx + 3dy)$.
11. $du = yze^{xy} dx + xze^{xy} dy + xye^{xy} dz$.
13. $du = zye^{xy} dx + xze^{xy} dy + e^{xy} dz$. 15. 0.00047
17. $dz = 3t^2 dt$. 19. $dz = 0$.

Sección 10.10, p. 564

1. $\bar{F}_r(r, s) = (x^2 - y)6r + 3(y^2 - x)$, $\bar{F}_s(r, s) = 3(x^2 - y) + 6(y^2 - x)s$.
3. $\bar{F}_r(r, s) = (e^y + ye^x)s + \frac{xe^y + e^x}{s}$; $\bar{F}_s(r, s) = (e^y + ye^x)r - \frac{r(xe^y + e^x)}{s^2}$.
5. $\bar{F}_r(r, s) = 2x + 2yzs + 9z^2r^2$, $\bar{F}_s(r, s) = 2x + 2yzr$.
7. $\bar{F}_r(r, s) = y - z + xs + zs$, $\bar{F}_s(r, s) = 2y - z - x + xr + zr$.
9. $F_{r_1}(r_1, r_2, r_3) = F_{z_1}(x_1, x_2)D_{r_1}G_1(r_1, r_2, r_3) + F_{z_2}(x_1, x_2)D_{r_1}G_2(r_1, r_2, r_3)$,
 $\bar{F}_{r_2}(r_1, r_2, r_3) = F_{z_1}(x_1, x_2)D_{r_2}G_1(r_1, r_2, r_3) + F_{z_2}(x_1, x_2)D_{r_2}G_2(r_1, r_2, r_3)$,
 $\bar{F}_{r_3}(r_1, r_2, r_3) = F_{z_1}(x_1, x_2)D_{r_3}G_1(r_1, r_2, r_3) + F_{z_2}(x_1, x_2)D_{r_3}G_2(r_1, r_2, r_3)$.
11. $F_x(x, y) = 4xu + 2u^2x + v + (2x^2 + 3yu + 2ux^2) \cos x$
 $+ (3yu + x)(2xy + \frac{1}{x})$;
 $F_y(x, y) = 3uv + (2x^2 + 3yu + 2ux^2)(2y) + (3yu + x)(2x^2y)$.

Sección 10.11, pp. 568-569

1. $-\frac{9x}{4y}$. 3. $\frac{\cos y - y \cos x}{\sin x + x \sin y}$.

5. $-\frac{2 \sin 2x}{3 \sin 2y}$. 7. $\frac{y}{x}$.
9. $G_x(x, y) = -\frac{ax + hy + gz}{gx + fy + cz}$, $G_y(x, y) = -\frac{hx + by + jz}{gx + fy + cz}$.
11. $G_x(x, y) = G_y(x, y) = \frac{e^x \cos(x+y)}{1 - e^x \sin(x+y)}$.
13. $G_x(x, y) = -\frac{ye^{xy} + ze^{xz}}{xe^{xz} + ye^{yz}}$, $G_y(x, y) = -\frac{xe^{xy} + ze^{yz}}{ye^{yz} + xe^{xz}}$.
15. $G_x(x, y) = -\frac{e^x - 3yz}{e^x - 3xy}$, $G_y(x, y) = -\frac{e^y - 3xz}{e^y - 3xy}$.
17. $D_x \bar{F}(x) = (y \cos x + \sin y) + (\sin x + x \cos y) \left(\frac{2xy + y^3 + 2}{5 - x^2 - 3xy^2} \right)$,
 $D_y \bar{G}(y) = (y \cos x + \sin y) \left(\frac{5 - x^2 - 3xy^2}{2xy + y^3 + 2} \right) + (\sin x + x \cos y)$.
19. $4x + 3y - 3z + 4 = 0$; $x = -1 + 4t$, $y = 3 + 3t$, $z = 3 - 3t$.
21. $z = 3$; $x = 0$, $y = 0$.
23. $x - 4y - 4z + 20 = 0$; $x = 8 + t$, $y = 5 - 4t$, $z = 2 - 4t$.
25. $z - 3 = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

Sección 10.12, pp. 574-575

1. $F_{xx}(x, y) = 12x^2y^2$, $F_{yy}(x, y) = F_{zz}(x, y) = 8x^3y - 3y^2$, $F_{xy}(x, y) = 2x^3 - 6xy$.
3. $F_{xx}(x, y) = \frac{12x^2}{y} - \frac{2y^2}{x^2}$, $F_{yy}(x, y) = \frac{2x^3}{y^3} - \frac{2}{x}$, $F_{yz}(x, y) = F_{zy}(x, y) = -\frac{4x^3}{y^2} + \frac{2y}{x^2}$.
5. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x + 12y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y$.
7. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4y^4$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x - 24x^2y^3$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y - 16xy^3$.
9. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x \sin y$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos y$.
11. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1$,
 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 1$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 1$.
13. 10.
23. $x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x$.
21. $\frac{-2(x^2 + 2xy - y^2)}{(x - y)^3} e^{(x+y)/(x-y)}$.

Sección 10.13, p. 579

1. $\sin x \sin y = xy - \frac{1}{3!} [(x^3 + 3xy^2) \cos(\theta x) \sin(\theta y)]$

- $+ (y^3 + 3x^2y) \sin(\theta x) \cos(\theta y)]$, $0 < \theta < 1$.
3. $P_2(x, y) = 1 + \frac{1}{2}\pi y + \frac{1}{2!} \left[-\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)^2 + 2y\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right]$.

Sección 10.14, pp. 584-585

1. $F(0, 0) = 0$ es un valor mín-rel. 3. $F(3, 1) = 1$ es un valor mín-rel.
5. $F(a, a) = a^2$ es un valor máx-rel. 7. $\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}$.
9. Ningún punto máx., ningún punto mín.; paraboloide hiperbólico.
11. 16.

Ejercicios adicionales al capítulo 10, pp. 585-586

1. $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$, región cerrada.
3. $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 > 9\}$, región abierta.
5. $F_x(x, y) = 3x^2 + 3y$, $F_y(x, y) = 3x + 2y$, $F(1, 2) = 11$, $F_x(1, 2) = 9$, $F_y(1, 2) = 7$.
7. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(ad - bc)y}{(cx + dy)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(bc - ad)x}{(cx + dy)^2}$.
9. $(x - 2) - 4(y + 1) + 12(z - 2) = 0$; $x = 2 + t$, $y = -1 - 4t$, $z = 2 + 12t$.
11. $F(x, y) = x^2 - x \sin y + c$.
13. $6x - 16y - 5z = 25$; $x = 3 + 6t$, $y = -2 - 16t$, $z = 5 - 5t$.
15. (a) 0, (b) $\frac{1}{2}$; $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x, y)$ no existe.
19. $(3, \frac{9}{4}, 15\frac{3}{4})$. 21. $x = 2$, $y = 1 + 4t$, $z = 6 + t$.
23. $D_x z = 2(4t + e^{2t}) \cos(4t^2 + e^{2t})$. 25. $\frac{xe^x + e^x}{1 + e^{2x}}$.
27. $\text{Arctan } \frac{4}{3}$, $\mathcal{D}(z) = 10$.
29. $G_x(x, y) = \frac{-x}{2x + x}$, $G_y(x, y) = \frac{2y}{2x + x}$.
31. $\frac{-9}{\sqrt{11}}$. 37. $F(0, 2)$ es un valor mín. rel.

Sección 11.2, pp. 594-595

1. $\frac{16}{5}$. 3. $\frac{a^3}{6}$. 5. 5. 7. $\frac{\pi a^3}{6}$.
9. $\frac{\pi}{4}$. 11. $\frac{1}{3}$. 13. $8 \ln 8 - 16 + e$.

Sección 11.3, pp. 603-604

11. $\frac{3}{10}$. 13. 8π . 15. $\frac{5}{2} + \ln \frac{2}{3}$. 17. $\frac{625\pi}{2}$. 19. $\frac{7\pi}{4}$.

Sección 11.4, pp. 610-611

1. $\frac{\pi}{2}$. 3. $\pi - \frac{\pi}{3}$. 5. 16. 7. 19.

9. $\frac{1}{6}$. 11. 48π . 13. 16. 15. $\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}$.
 17. $\frac{5\pi}{16}$. 19. $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Sección 11.6, p. 617

1. $\frac{1}{8}$. 3. $\frac{\pi}{2}$. 5. $28\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\ln 5$.

Sección 11.7, pp. 624-625

9. 0. 11. $\frac{1}{24}$.

Sección 11.8, p. 626

1. $19\frac{1}{2}$. 3. $\frac{1}{4}$. 5. 8.

Sección 11.9, pp. 640-641

1. $\frac{14}{3}$. 3. πa^2 . 5. 8π . 7. $\frac{3\pi}{2}$.
 9. $2 + \frac{\pi}{4}$. 11. 32π . 13. $\frac{\pi a^3}{6}$. 15. 32π .

Sección 11.10, p. 652

1. $\frac{4\pi a^3}{3}$. 3. $\frac{2}{9}(3a^2\pi - 4a^2)$. 5. $\frac{2\pi a^2}{3}(1 - \cos b)$.
 7. $\frac{76\pi}{3}$. 9. $\frac{7\pi}{6}$.

Sección 11.11, p. 656

1. πa^2 . 3. $\frac{1}{2b}\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$.
 5. $\int_{1/4}^1 \int_{1/4}^{(9-4y)/2} \sqrt{y^2 + 1} dx dy$.
 7. $2\pi ah$. 9. $\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$.

Ejercicios adicionales al capítulo 11, pp. 657-658

1. $29\frac{1}{15}$. 3. $\frac{1}{3}\pi$. 5. 24π . 7. $128\frac{2}{3} + 8\pi$.
 9. $31\frac{1}{12}$. 11. $32\frac{2}{3}$. 13. $2\pi + 2$. 15. 0.

Sección 12.1, p. 661

1. $(\frac{1}{3}, \frac{5}{4}, \frac{5}{3})$. 3. $(19\frac{1}{6}, 11\frac{1}{6}, 31\frac{1}{6})$.

Sección 12.2, pp. 666-667

1. $k\pi a^4$. 3. $(\frac{3a}{8}, \frac{3a}{8}, \frac{3a}{8})$. 5. $(\frac{8}{3}, 0, 0)$.

7. $(0, \frac{1}{2}b, 0)$. 9. $(\frac{2}{3}b, 0, 0)$. 11. $(0, 0, \frac{h}{2})$.
 13. $(\frac{3a}{8}, \frac{3a}{8}, \frac{3a}{8})$. 15. $(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \frac{c}{4})$. 17. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Sección 12.3, pp. 672-673

1. $(\frac{6a}{5}, 0, \frac{h}{2})$. 3. $(0, \frac{8a}{5\pi}, \frac{h}{2})$. 5. $(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{h}{2})$.
 7. $(\frac{12}{5}, 0)$. 9. $(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi})$. 11. $(\frac{12}{25}, \frac{3}{7})$.
 13. $(\pi a, \frac{1}{3}a)$. 15. $(4\frac{4}{15}, 28\frac{8}{15})$. 17. $(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a)$.

Sección 12.4, p. 676

1. $(\frac{L}{2}, 0, 0)$. 3. $(\pi a, \frac{4a}{3})$. 5. $(\frac{3a\sqrt{3}}{2\pi}, 0)$.

Sección 12.5, p. 680

1. $S = 1100.7$ unidades cúbicas, $V = 953.2$ unidades cúbicas.
 3. $V = 2\pi^2$, $S = 4\pi^2$.

Sección 12.6, p. 682

1. El eje z como el eje del cilindro, $I_z = \frac{1}{2}\pi ka^2h$, $M = \frac{1}{2}\pi ka^4h$.
 3. El eje z como el eje del cilindro, $I_z = \frac{1}{10}\pi ka^4h$.
 5. $I_z = \frac{1}{2}\pi hkr^4$.
 7. $I_z = \frac{M}{5}(b^2 + c^2)$, $I_y = \frac{M}{5}(c^2 + a^2)$, $I_x = \frac{M}{5}(a^2 + b^2)$, donde $M = \frac{4}{3}\pi kabc$.

Ejercicios adicionales al capítulo 12, pp. 682-683

1. $(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi}; 0, 0)$. 3. $(\frac{4}{3}\ln 4, 0, 0)$. 5. $(\frac{4a}{3\pi}\sqrt{2}, 0)$.
 7. $(\frac{8}{15}, \frac{16}{105})$. 9. $(\frac{5}{6}a, \frac{3}{4}\sqrt{2}a)$. 11. $I_{xy} = 32\frac{2}{3}\pi$.
 13. $\frac{4}{9}\pi ka^4$. 15. $\bar{x} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2} - 1}$; $\bar{y} = 0$.

Sección 13.1, p. 692

1. 5. 3. 2. 5. $\frac{1}{3}$. 7. -2. 9. π . 11. π .
 13. $\ln \frac{a}{b}$. 15. $-\frac{3}{4}$. 17. $-\frac{1}{8}$. 19. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 21. 0.

Sección 13.2, p. 698

5. 0. 7. 0. 9. $\frac{a}{c}$. 11. 1.

13. 8. 15. 1. 17. $-\frac{\pi}{2}$. 19. $-\frac{\pi}{2}$.

Sección 13.3, pp. 705-707

1. El límite existe y es igual a cero.
 3. El límite no existe para $\frac{(x+1)^2}{4} \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$.
 11. 0. 13. 0. 15. -3. 17. 0. 19. 1.
 21. 1. 23. 0. 25. 0. 27. 0. 29. $\frac{1}{2}$.

Sección 13.4, pp. 710-711

3. Asíntota horizontal con ecuación $y = 1$, asíntota vertical con ecuación $x = -1$.
 5. Asíntota horizontal con ecuación $y = 0$, asíntotas verticales con ecuaciones $x = 1$, $x = -3$.
 7. Asíntota horizontal con ecuación $y = 1$, asíntota vertical con ecuación $x = -1$.
 9. Asíntota horizontal con ecuación $y = 1$, asíntotas verticales con ecuaciones $x = \sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$.
 11. Asíntota horizontal con ecuación $y = 0$, asíntotas verticales con ecuaciones $x = 1$, $y = -1$.

Sección 13.5, pp. 718-719

1. 1. 3. No definida. 5. e^i . 7. π .
 9. No definida. 11. No definida. 13. 9. 15. No definida.
 17. No definida. 19. a . 21. $-\frac{1}{2}$. 23. $2\sqrt{2}$.
 29. π unidades cúbicas.
 33. (a) $A = \ln t$, (b) $\lim_{t \rightarrow \infty} A$ no existe, (c) $V = \pi \left[-\frac{1}{t} + 1 \right]$,
 (d) $\lim_{t \rightarrow \infty} V = \pi$.
 37. 6a.

Sección 13.6, pp. 728-730

1. (a) 0, (b) $\frac{1}{12}$, (c) $-\frac{1}{2}$. 3. (a) $\frac{7}{30}$, (b) $\frac{3}{40}$.
 5. (a) -1, (b) -1. 7. (a) -1, (b) -1.
 9. -2π . 11. -2.

Sección 13.7, pp. 743-745

1. $\frac{e^4}{3}$. 3. $4\frac{1}{2}$. 9. -1. 11. 6. 13. $\frac{1}{2}$. 15. $1\frac{1}{2}$.
 17. $\frac{y}{x} + k$. 19. $\arctan \frac{1}{x} + k$. 21. $e^x - e^{-x} + k$.
 23. $x^3 + x^2y^2 + y^2 + k$. 25. $yx^2 - y^3x + k$. 33. $3\pi a^4$.
 35. $e^a \sin b$.

Ejercicios adicionales al capítulo 13, pp. 745-747

1. $-\frac{1}{2}$. 3. 0. 5. $\frac{1}{2}$.
 9. (a) Ninguna asíntota horizontal; la gráfica de $x = -1$ es una asíntota vertical;
 (b) $F(-2) = -4$ es un valor máximo relativo; $F(0) = 0$ es un valor mínimo relativo.
 11. $\frac{\pi}{6}$. 13. 2. 17. $\frac{1}{4}x^4 + 4x^2y + y^2 + k$.
 19. $\frac{1}{6}(x^2 + y^2)^2 + k$. 21. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{y+2x}{y-2x} \right| + k$.
 23. (a) 5, (b) $12\frac{3}{20}$, (c) 9. 25. $4\frac{1}{2}$.

Sección 14.1, p. 757

1. Convergente, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. 3. Divergente.

Sección 14.2, pp. 766-768

1. Convergente. 3. Convergente. 5. Divergente.
 7. Convergente. 9. Divergente. 11. Convergente.
 13. Divergente. 15. Convergente. 17. Convergente.
 19. Divergente. 21. Convergente. 23. Divergente.
 25. Divergente. 27. Divergente. 29. Convergente.
 35. Convergente. 37. Convergente. 39. Divergente.
 41. Convergente. 43. Convergente. 45. Divergente.
 47. Divergente.

Sección 14.3, p. 773

1. Condicional. 3. Absoluta. 5. Absoluta.
 7. Absoluta. 9. Condicional. 11. $n \geq 10^{10} - 1$.
 13. $n \geq e^{100} - 1$.

Sección 14.5, pp. 784-785

1. Intervalo de convergencia y conjunto de convergencia, Re .
 3. Intervalo de convergencia $(-1; 1)$, conjunto de convergencia $(-1; 1]$.
 5. Intervalo de convergencia $(-2; 2)$, conjunto de convergencia $[-2; 2]$.
 7. Intervalo de convergencia $(-5; 2)$, conjunto de convergencia $(-5; 2)$.
 9. Intervalo de convergencia $(-1; 1)$, conjunto de convergencia $[-1; 1]$.
 11. Intervalo de convergencia y conjunto de convergencia, Re .
 13. Intervalo de convergencia $(0; 2)$, conjunto de convergencia $(0; 2)$.
 15. $\{x | 1 < x < 2\}$. 17. $\{x | x > 0\}$. 19. $\{x | x \geq 1\}$ y $\{x | x < -1\}$.

Sección 14.6, pp. 793-794

1. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$

$$3. \ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} + \dots$$

$$7. \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, -1 \leq x \leq 1.$$

$$9. \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

$$11. \sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

Ejercicios adicionales al capítulo 14, pp. 794-795

7. Convergente.

9. Convergente.

Sección 15.1, p. 801

$$1. (a) (1+x)^{1/4} = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + \frac{5}{128}x^3 + \dots,$$

$$(c) 1.029892, (d) 2.0598.$$

$$3. (a) (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots, (b) 1.01015.$$

$$5. 0.1736.$$

$$7. 1.008.$$

$$9. (a) (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots, (b) 1.0954.$$

Sección 15.2, p. 803

$$1. 7.389. \quad 3. 0.135. \quad 5. 8.166. \quad 7. 0.999. \quad 9. 0.5299.$$

Sección 15.3, p. 806

$$1. 1.6094. \quad 3. 2.3980. \quad 5. 1.3863. \quad 7. 2.0794. \quad 9. 0.3010.$$

Sección 15.4, pp. 809-810

$$1. 0.764. \quad 3. 0.747. \quad 5. 0.069. \quad 7. 1.809.$$

$$9. 0.659.$$

$$11. 0.1974.$$

$$13. 0.2915.$$

Sección 15.5, p. 814

$$1. 3.84. \quad 3. 3.811. \quad 5. 3.827.$$

Sección 15.6, p. 817

$$1. A_1 = 732.00, A_2 = 728.00.$$

$$3. A_1 = 33.10, A_2 = 32.65.$$

$$5. A_1 = 3.28, A_2 = 3.24.$$

$$7. 728.$$

$$9. 32.67.$$

Sección 15.7, pp. 821-822

$$1. 2.0946.$$

$$3. 1.70.$$

$$5. 2.54.$$

$$7. 1.51.$$

$$9. 2.24.$$

$$11. (a) 1\frac{1}{3}, (b) 1.31.$$

Ejercicios adicionales al capítulo 15, pp. 822-823

$$1. 3.6088.$$

$$5. 0.000,000,08.$$

$$13. \frac{116,748}{\pi} \text{ unidades cúbicas } \acute{o} \text{ } 37,162 \text{ unidades cúbicas.}$$

Indice alfabético

Aceleración, 131

función en movimiento rectilíneo, 131

media, 132

vector, 398

Angulo formado por líneas, 446, 472-473

Angulos direccionales, 436

Antiderivada, 155

Antidiferencial, 738

general, 742

Aproximación polinomial, 798

Arco regular, 720

longitud diferencial de, 419

función, 421

Arco senoillo, 388

Área, de revolución, 428

de una región en el espacio-2, 247, 251, 604

de una superficie, 652

por integrales dobles, 604

suma de aproximación, 247, 250

usando coordenadas polares, 623

Argumentación de una red, de una partición, 227

en el espacio-2, 589

en el espacio-3, 391

Arquímedes, espiral de, 409

Asíntotas, 707, 708

Cardioide, 404-405

Cartesiano, producto, 32

Centro, de curvatura, 438

de masa de un cuerpo, 662

de una lámina, 669

de un alambre, 674

de un sistema de partículas, 660

Centroide, de una curva, 676

de una región en el espacio-3, 666

en el espacio-2, 671

Cicloide de curvatura, 439

Cilindro, 488

directriz de un, 488

elemento de un, 488

sección normal de un, 488

Componentes, de un par ordenado, 28 82

de un vector, 394

Cónica hacia abajo, 197

Cónica hacia arriba, 197

Condición en un conjunto, 27

solución de una, 27

Condiciones en la frontera, 157, 176

Conjunto, 25

abierto, 513

cartesiano, 32

condición en un, 27

conexo, 514

elemento de un, 25

finito, 25

infinito, 25

nulo, 27

subconjunto de un, 29

subconjunto propio de un, 29

solución, 27

universal, 26

Conjunto abierto en un espacio-2, 513

Conjunto cartesiano, 32

Conjunto conexo, 515

Conjunto finito, 25

Conjunto infinito, 25

Conjunto nulo, 27

860/INDICE ALFABETICO

Conjuntos iguales, 26
 Conjuntos, producto cartesiano de, 32
 iguales, 26
 intersección de, 30
 unión de, 30
 Conjuntos, solución de una condición, 27
 de una proposición S_{xy} , 462
 Conjunto solución de una proposición S_{xyz} , 462
 Cono, 500-501
 Constante, 26-27
 Continuidad y derivabilidad, 117
 Construcción de, tablas exponenciales, 801
 tablas logarítmicas, 803-806
 tablas trigonométricas, 801
 Convergencia absoluta, 770
 Convergencia condicional, 771
 Coordenadas cilíndricas, 641
 en integración, 645
 Coordenadas esféricas, 647
 en integración, 651
 Coordenadas en el espacio-3, 458
 Coordenadas polares, 403, 634
 Coordenadas rectangulares de tres dimensiones, 458
 Correspondiente creciente sobre un intervalo, 181
 en un punto, 181
 Correspondiente decreciente sobre un intervalo, 181
 en un punto, 181
 Correspondiente, de x bajo F , 39
 de (x,y) , bajo F , 39
 decreciente de un intervalo, 181
 derivada de una, 112
 creciente en un intervalo, 181
 límite de una, 82
 límite en una, 531
 Cos, 94
 Cos x , 94
 derivada del, 136
 Cosenos direccionales, 466
 Cot x , 94
 Csc, 94
 Csc x , 94
 Crecimiento natural, ley del, 328
 Criterio de comparación, 762
 Criterio de convergencia de una serie, 775
 Criterio de la integral, 766
 Criterio de la razón, 765-766
 Cuanto, uso del, 84n
 Cuerpo continuo, 661
 Cuerpo heterogéneo, 662

Cuerpo homogéneo, 661
 Curva, 387
 cerrada, 387
 continua, 387
 longitud de una, 387
 plana, 502
 rectificable, 419
 regular, 720
 sencilla, 720
 Curva alabeada, 501, 502
 Curva cerrada, 387
 Curva, cerrada simple, 387
 alabeada, 502
 continua simple, 387
 en el espacio-3, 501
 línea tangente a una, 504
 representación bisuperficial de una, 502
 representación paramétrica de una, 504
 Curva continua, 387
 Curva generatriz, de una curva de revolución, 490
 Curva plana, 501
 Curva rectificable, 419
 Curva regular, 720
 Curva sencilla, 720
 Curva simple cerrada, 387
 Curva simple conexa, 387
 Curvatura, 435
 centro de, 438
 círculo de, 438
 radio de, 438
 Definición, 26
 Derivabilidad, 112
 y continuidad, 117
 Derivable, sobre un intervalo, 112
 en un punto, 112
 Derivación, 112
 implícita, 162, 564
 parcial, 516
 Derivación logarítmica, 319-321
 Derivación implícita, 162, 564
 Derivación parcial, 515
 teorema básico para, 535
 Derivada, de seno, 135-136
 de una suma, 122
 total, 539-540
 Derivada, de una función compuesta, 142-143
 de cos, 135, 136
 de exp., 322
 de $F(x)$, 111
 de log., 313, 314
 de sen, 135-136

de un cociente, 139
 de un correspondiente, 111, 123
 de un producto, 138
 de una función, 112, 123
 de una función derecha, 122
 de una función inversa, 211
 direccional, 547
 enésima, 126
 por la derecha, 127
 por la izquierda, 127
 parcial, 515, 516
 segunda, 125
 total, 531
 Derivada direccional, 547
 Derivadas parciales, de funciones compuestas, 560, 563
 de $F(x,y)$, 515, 516
 de $F(x,y,z)$, 520
 de orden superior, 269, 270
 Derivada por la derecha, 127
 Derivada por la izquierda, 127
 Derivadas, teoremas acerca de, 112
 Derivada total, 539
 Derivada unilateral, 127
 Desigualdad, 66
 solución de una, 67
 Diferencial, longitud de arco, 421
 de $F(x)$, 170
 de $F(x,y)$, 554
 de $F(x,y,z)$, 555
 Directriz de un cilindro, 488
 Discontinuidad, 100, 534
 Distancia entre dos puntos, 460
 División de un segmento de línea, 463
 Dominio de una relación, 31
 e, 313
 aproximación hacia, 314
 Ecuación con derivada, 314
 condiciones en la frontera para una, 157
 Ecuación, 574
 Ecuación de Laplace, 574
 Ecuación diferencial, 176
 condiciones a la frontera para una, 176
 Ecuación paramétrica de una curva, en el espacio-3, 503
 en el espacio-2, 379
 Eje de rotación, 490
 Eje polar, 403
 Ejes coordenados en el espacio-3, 457
 Elemento de un conjunto, 25
 Elemento de un cilindro, 488

INDICE ALFABETICO/861

Eliminación de un parámetro, 379, 381
 Elipsoide, 498
 de revolución, 498
 Eneada ordenada, 457
 En torno de un espacio-2, 512
 Entre, uso de, 67-68
 Envolver, 441
 Error, por aproximación, 797
 por redondeo, 797
 Error por redondeo, 797
 Esferoide, oblata, 264
 prolata, 264
 Espacio-2, 461
 Espacio-3, 461
 Espacio de cuatro dimensiones, 461
 Espacio n dimensional, 461
 3, 461
 2, 461
 Espiral de Arquímedes, 409
 Exponentes, 305, 306
 leyes de los, 305
 Forma diferencial exacta, 738
 Forma de Lagrange del residuo en la fórmula de Taylor, 789
 Fórmula integral del residuo en la fórmula de Taylor, 789
 Fórmula más simple de un cociente, 44
 Fórmula de Cauchy del residuo de la fórmula de Taylor, 789
 Fórmula de McLaurin con residuo para $F(x)$, 450
 Fórmula de Taylor con residuo, de $F(x)$, 450
 de $F(x,y)$, 578
 Fórmulas de reducción, 368-370
 Fórmulas para derivadas de cocientes, 139-140
 Fórmulas para derivadas de productos, 138-139
 Fuerza debida a la presión de los fluidos, 280
 Función, 38
 aceleración, 132
 algebraica, 49
 compuesta, 57, 559
 constante, 47
 continua, 534
 correspondiente de x bajo una, 39
 derivada de, 112
 derivable, 112
 discontinua, 46
 valor absoluto, 49
 Función algebraica, 49
 Función biunívoca, 62
 Función cero, 47

362/INDICE ALFABETICO

- Función compuesta, 56
 - derivada de una, 142, 143
 - derivada parcial de una, 558-564
- Función constante, 47
- Función continua, 100, 433-434
- Función, cosecante inversa, 299
 - coseno inverso, 293
 - cotangente inversa, 295
 - secante inversa, 297
 - seno inverso, 291
 - tangente inversa, 294
- Función de n -ésimo grado, 49
- Función de primer grado, 46
 - de segundo grado, 47
 - de tercer grado, 48
- Función velocidad en el movimiento rectilíneo, 131-132
- Función, exponencial, 306
 - cero, 47
 - algebraica simple, 49
 - de dos variables independientes, 510
 - continuas, 534
 - de grado n , 48
 - de grado n simple, 48
 - de n variable independientes, 510
 - de primer grado, 46
 - de segundo grado, 47
 - de segundo grado simple, 47
 - de tres variables independientes, 510
 - gráfica de una, 38
 - mayor entero, 50
 - biunívoca, 62
 - identidad, 47
 - inversa de una, 62
 - inversa de cosecante, 299
 - inversa de coseno, 293
 - inversa de cotangente, 295
 - inversa de secante, 297
 - inversa de seno, 291
 - inversa de tangente, 294
 - logarítmica, con base a , 308
 - con base e , 309
 - polinomial, 49
 - posición, 130
 - racional, 49
 - raíz cuadrada simple, 51
 - real, 38
 - segunda derivada de una, 126
 - tercer grado simple, 48
 - tercera derivada de una, 126
 - trascendental, 49
 - velocidad, 131
- Función exponencial de base a , 306
 - derivada de la, 322
 - de base e , 321
 - derivada de la, 322
- Función idéntica, 47
- Función integrable, 228
- Función logarítmica de base a , 306
 - derivada de la, 314-313
 - de base e , 315
 - derivada de la, 315
- Función mayor entero, 50
- Función pendiente, 75
- Función polinomial, 47
 - de grado n , 47
- Función racional, 49
- Función raíz cuadrada, 51
- Función real, 38
- Función seccionalmente lineal, 50
- Función trascendente, 49
- Función trigonométrica, 94, 287
- Funciones, álgebra de, 52
 - cociente de, 52
 - diferencia de, 52
 - hiperbólicas, 327
 - iguales, 42
 - producto de, 52
 - trigonométricas, 94, 255
 - trigonométricas inversas, 300
 - suma de, 52
- Funciones hiperbólicas, 500, 501
- Funciones iguales, 42
- Funciones trigonométricas inversas, 291, 300
- $F(x)$, 39, 40
- $F(x) \rightarrow +\infty$, 699
- $F(x) \rightarrow -\infty$, 700
- $F(x, y)$, 510
- $F(x, y, z)$, 510
- Gráfica, de una ecuación, 44
 - de una función, 144
 - concavidad, 197
 - de una relación en el espacio-2, 33
 - de una proposición en S_{xy} , 33
 - de una proposición en S_{xyz} , 462
 - en coordenadas polares, 404
 - en el espacio-3, 462
- Hélice circular, 503
- Hipocicloide, 431
- Incremento, de x , 167
 - de y , 168
 - de z , 537-538

INDICE ALFABETICO/863

- Integración aproximada utilizando series infinitas, 806
 - por medio de la regla de Simpson, 814
 - por medio de la regla trapezoidal, 810
- Integración de los integrandos racionales, 362-367
 - por sustitución, 348-360
 - por la regla del trapecio, 812
 - por medio de tablas, 371-372
 - por sustitución trigonométrica, 351
- Integración, usando coordenadas cilíndricas, 645
 - de integrandos racionales, 262-367
 - indefinida, 334
 - paramétrica, 443
 - por la regla de Simpson, 816
 - por la regla trapezoidal, 811-813
 - por partes, 339
 - por sustitución, 348-360
 - por sustitución trigonométrica, 351
 - usando coordenadas polares, 638
 - usando coordenadas esféricas, 651
 - usando series infinitas, 806
 - usando tablas, 371
- Integración indefinida, 334
- Integral curvilínea, 732
- Integral de una función continua, 230
 - curvilínea, 722
 - definida, 228
 - existencia de, 229
 - de Riemann, 228, 590, 612
 - doble, 590
 - generalizada, 711-712, 714-715
 - indefinida, 333
 - iterada, 593
 - triple, 612-613
- Integral de Riemann, 228, 590, 612
- Integral definida, 228
 - existencia de la, 229
 - propiedades de la, 229
- Integral doble, 590
- Integral indefinida, 333
- Integral triple, 612-613
- Integrales dobles, áreas y volúmenes por, 604
 - y coordenadas polares, 638
- Integrales generalizadas, en $[a; b]$, 713-715
 - en $[a; +\infty)$, 711, 712
 - en $(-\infty; b]$, 711, 712
 - en \mathbb{R} , 712
- Integrales iteradas, de $F(x, y)$, 593
 - de $F(x, y, z)$, 617
- Integrales trigonométricas, 343-346
- Integrando, 228
 - de una integral indefinida, 333
- Integrandos racionales, 362-367
- Intersección de conjuntos, 30
- Intersección, de una gráfica, 447
 - de un plano, 477
- Intervalo, 35
 - abierto, 35
 - abierto por la derecha, 35
 - abierto por la izquierda, 35
 - cerrado, 35
 - de convergencia de una serie de potencias, 35
 - extremo derecho de un, 36
 - extremo izquierdo de un, 36
 - finito, 36
 - infinito, 36
 - longitud de un, 779 n
- Intervalo abierto, 35
- Intervalo cerrado, 35
- Intervalo abierto por la derecha, 35
- Intervalo abierto por la izquierda, 35
- Inversas de una función, 62
 - derivada de la, 212-213
 - de una relación, 59
 - de una transformación, 630
- Jacobiano de una transformación, 629
- Jacobianos, 629
- Láminas, 667
- Ley de crecimiento natural, 328
- Leyes de los exponentes, 305
- Leyes exponenciales de crecimiento y decrecimiento, 328
- Límite, de $F(x)$, por la izquierda, 85
 - cuando $x \rightarrow a$, 53
 - cuando $x \rightarrow +\infty$, 692-693
 - cuando $x \rightarrow -\infty$, 692-693
 - de $F(x, y)$, 531
 - del término general de una sucesión, 218
 - teorema de, 86-89
- Límite de $F(x)$, por la derecha, 85
- Límite inferior de integración, 228
- Límite superior de integración, 228
- Límites de integración, 228
- Límites infinitos, 698-699, 703-704
- Línea en el espacio-3, representación paramétrica de una, 483
 - proyección plana de una, 484
 - representación biplanar de una, 482
 - representación dos puntos de una, 484
 - representación perpendicular de una, 483
 - representación simétrica de una, 483

M/INDICE ALFABETICO

nea normal, a una curva en el espacio-2, 76
 a uno plano, 475
 a una superficie, 529
 neas paralelas en el espacio-3, 471
 neas perpendiculares en el espacio-3, 474
 nea tangente a una curva, 75
 en el espacio-3, 504
 -garitmos, comunes, 310
 naturales, 310-311
 propiedades de los, 310
 ngitud de una curva, en coordenadas pola-
 res, 425
 en el espacio-2, 417
 en el espacio-3, 504
 de un intervalo, 779
 agnitud de un vector, 381
 asa, de un cuerpo, 662
 de un alambre, 673
 de una lámina, 667
 étodo de Newton, 818-820
 omento de inercia, de un cuerpo, 690
 de un sistema de partículas, 659
 omento de masa, de una partícula, 659
 de un sistema de partículas, 660
 ovimiento curvilíneo, 391, 398
 ovimiento rectilíneo, 129, 398
 ultiplicación de un vector de un número
 real, 392
 ural, logaritmo, 310-311
 rma de una red, en el espacio-3, 612
 en el espacio-2, 588
 de una partícula, 226
 tación sigma para sumas, 222-223
 ísima derivada, 127
 ímeros direccionales, 469
 uso de, 30n
 tantes, 458
 den de una derivada, 126
 ígen, 403, 457
 ppus, teorema de, 677-678
 raboloide, de una hoja, 500-501
 de dos hojas, 500, 501
 raboloide elíptico, 498-501
 raboloide hiperbólico, 500, 501
 r ordenado, 28
 r crítico de $F(x, y)$, 580
 rtes, integración por, 339
 rámetro, 379
 rtición de un intervalo cerrado, 226
 aumentación de una, 227
 norma de una, 227
 Pendiente, de una línea, 74
 de una curva, 125
 Plano en el espacio-3, 475, 476
 Plano tangente a una superficie, 529
 Planos coordenados, 458
 Planos paralelos, 480
 Planos perpendiculares, 480
 Polinomio de Taylor de $F(x)$, 445
 Posición, función de, de un punto en movi-
 miento rectilíneo, 130
 Presión de flúidos, 280
 Primera componente de un par ordenado,
 28
 Primer momento, de una línea, 669
 de un alambre, 674
 de un sistema de partículas, 660
 de una partícula, 660
 Producto cartesiano, 32
 Progresión geométrica, 28
 suma de una, 217
 Proyectoil, 401
 alcance de un, 402
 tiempo de vuelo de un, 402
 Proyección plana de una lámina, 484
 Proyección plana de una línea, 484
 Punto de inflexión de una gráfica, 198
 Punto frontera, 514
 Punto interior, de un intervalo, 181
 de un conjunto en el espacio-3, 513
 de una región, 590
 Punto máximo relativo, de una superficie, 580
 Punto múltiple de una curva, 381
 Puntos extremos de una curva, 387
 Radio de curvatura, 438
 Rango de una relación, 31
 Razón de cambio, 375
 promedio, 168
 instantáneo, 168
 Razón relacionada, 375-377
 Red, en una región, en el espacio-3, 612
 en el espacio-2, 589
 Región abierta, 514
 Región acotada, 587
 Región, área de una región plana, 247, 248
 acotada, 587
 cerrada, 587
 del tipo $S_{1,2}$, 618
 del tipo $S_{1,3}$, 619
 del tipo $S_{2,3}$, 619
 del tipo T_1 , 592
 del tipo T_2 , 592
 del tipo $T_{1,2}$, 592
 del tipo $T_{1,3}$, 592
 del tipo $T_{2,3}$, 626

Región cerrada, 514
 Región múltiple conexa, 723
 Región simplemente conexa, 733
 Región tipo $S_{1,2}$, 618
 Región tipo $S_{2,3}$, 618
 Región tipo T_1 , 592
 Región tipo $T_{1,2}$, 592
 Región tipo T_2 , 592
 Región tipo $T_{1,3}$, 626
 Región, área de una región plana, 247, 248
 múltiple conexa, 733
 simplemente conexa, 733
 Regla de Simpson, 816
 Regla trapezoidal, 812
 Reglas de L'Hôpital, 687-691
 Relación, 31
 dominio de una, 31
 en el espacio-3, 462
 en R^2 , 32
 gráfica de una, en un sistema de coordena-
 das polares, 404
 en el espacio-2, 33
 en el espacio-3, 462
 inversa de una, 59
 Representación biplanar de una línea, 482
 Representación de dos puntos de una línea en
 el espacio-3, 484
 Representación bisuperficial de una curva en
 el espacio-3, 501-502
 Representación paramétrica de una curva, en
 el espacio-3, 503
 de una línea en el espacio-3, 433
 de una relación, 379
 Representación paramétrica de una línea en
 un espacio-3, 483
 Representación perpendicular de una línea en
 el espacio 3, 484
 Representación simétrica de una línea en el
 espacio-3, 483
 Resultante de vectores, 394
 Sec., 94
 Secante a una línea, 74
 Secante a una curva, línea, 74
 Sec x , 94
 Sector de un círculo, 97
 Sección normal de un cilindro, 488
 Sección plana de una superficie, 490
 Segmento de línea, división de un, 463
 punto medio de un, 463
 Segunda componente de un par ordenado,
 28
 Segunda derivada, 126
 Sen, 94
 Sen x , 93
 derivada de, 135
 Sen x
 $\frac{1}{x}$, límite de, cuando $x \rightarrow 0$, 97, 98
 Serie, armónica, 761
 alternante, 769
 hélice circular, 503
 Serie convergente, 758, 775
 Serie divergente, 759, 775
 Serie de Taylor, 786
 Serie de potencia, 777
 intervalo de una convergencia, 779
 779
 Series infinitas, 217, 758, 774
 uso de integración aproximada de, 906
 Series, 758, 775
 absolutamente convergentes, 770
 alternantes, 768
 armónicas, 761
 alternantes, 769
 condicionalmente convergentes, 771
 conjunto de convergencia, 775
 convergentes, 770, 775
 criterio de comparación para, 762
 criterio de la integral para, 768
 criterio de la razón, 764
 de potencias, 777
 intervalo de convergencia, 762
 representación de una función para una,
 785
 de términos positivos, 762
 divergentes, 770, 775
 p , 770
 sucesión de sumas parciales de una, 758
 suma de una, 759
 Series alternantes, 768
 Series armónicas alternantes, 769
 Series p , 783
 Sistema con derivadas, 156
 parcial, 525
 solución de un, 157
 Simetría con respecto a un plano, 459-460
 Sistema de coordenadas derecho, 458
 Sistema coordinado derecho, 457
 Sistema de coordenadas izquierdo, 457
 Sistema de coordenadas polares, 403
 gráfica de un, 404
 Sistema de coordenadas polares de tres dimen-
 siones, 457
 Sistema de derivadas parciales, 523

866/INDICE ALFABETICO

- Sistema diferencial, 176
 - solución de un, 176
- Solución de un sistema con derivadas, 157
 - de una ecuación con dos variables, 31
- Sólido de revolución, 256
 - volumen de un, 258
- Subconjunto, 29
 - propio, 29
- Subintervalo, 226
- Sucesión, 213, 749, 774
 - acotada, 752
 - convergente, 750-751
 - de Cauchy, 752
 - divergente, 751, 774
 - monótona, 752
 - suma parcial de una, 758
- Sucesión acotada, 752, 753
- Sucesión convergente, 750-751, 775
- Sucesión de Cauchy, 752
- Sucesión divergente, 751, 774
- Sucesión infinita, 218, 749, 774
- Sucesión monótona, 752
- Sucesiones infinitas, 218, 749, 774
- Suma de aproximaciones para un área plana, 247, 250
 - para fuerza, 280
 - para volumen, 258
 - para trabajo, 267, 269
- Suma, de una serie, 759
 - de vectores, 393
- Suma de vectores, 393
- Sumas parciales, de una sucesión, 758
- Superficie, 448
 - área de una, 653
 - cilíndrica, 448
 - cuadrática, 490
 - de revolución, 490
 - área de una, 428
 - curva generalizada de una, 490
 - eje de rotación de una, 490
 - sencilla, 612
 - traza de una, 495
- Superficie cuadrática, 494
- Superficie sencilla, 613
- Sustituciones en la integración para racionalizar, 353-354
- Sustitución, integración por, 348, 360
- Sustituciones trigonométricas para evaluar integrales, 351
- Sustituyente, la variable como, 26
- Tablas integrales, 371
- Tan, 94
- Tan x , 94
- Teorema de Green, 730
- Teorema de Rolle, 150
- Teorema de Taylor, 443
- Teorema del valor medio para derivadas, 151
- Teorema fundamental del cálculo, 235
 - demostración del, 239-240
 - para derivación parcial, 535
 - para integrales dobles, 595, 596
 - para integrales triples, 617
- Tercera derivada, 126
- Término del residuo, 789
- Término, de una sucesión, 750
 - de una serie, 758, 774
- Término n -ésimo, de una sucesión, 218
 - de una serie, 758, 774
- Término general, del rango de una sucesión, 218
 - de una sucesión, 749
 - de una serie, 758, 774
- Trabajo, hecho al vaciar un tanque, 270
 - hecho por una fuerza, 268
- Transformación, en el espacio-3, 628
 - en el espacio-2, 627
- Traza, de una gráfica en un plano, 495
 - de una superficie en un plano, 495
- Triada ordenada, 457
- Unilateral, derivada, 128
- Unión de conjuntos, 30
- Universal, conjunto, 26
- Universo, 26
- Valor absoluto, 49, 67
 - función, 49
 - teoremas de, 68-70
- Valor crítico de x para $F(x)$, 190
- Valor, de $F(x)$ en a , 40
 - de $F(x,y)$ en (a,b) , 510
 - de una variable, 26
- Valor máximo de $F(x)$, 188
 - relativo, 188
 - primera prueba para, 192
 - segunda prueba para, 200-201
- Valor máximo de $F(x,y)$, 579
- Valor máximo relativo de $F(x)$, 188
 - de $F(x,y)$, 579
- Valor, mínimo de $F(x)$, 188
 - relativo, 188
 - primera prueba para, 159
 - segunda prueba para, 200-201
- Valores extremos, de $F(x)$, 189
 - de $F(x,y)$, 580

INDICE ALFABETICO/867

- Variable, 26
 - dependiente, 44, 509
 - independiente, 44
 - unitario de una, 26
 - valor de una, 26
- Variable independiente, 509
- Variable dependiente, 510
- Variables independientes, 510
- Vecindad de un punto en el espacio-2, 512-513
 - cerrada, 514
- Vector, 391
 - aceleración, 398
 - cero, 392
 - componente de un, 394
 - magnitud de un, 391
 - multiplicación por un número real, 392
 - posición, 395
 - punto extremo de un, 391
 - punto inicial de un, 391-392
 - unitario, 394
 - velocidad, 395
- Vecindad cerrada en el punto en el espacio-2, 514
- Vector cero, 613
- Vector suma, 393
- Vector de posición, 395
- Vector unitario, 394
- Vector velocidad, 395
- Vectores, suma de dos, 394
 - resultante de dos, 394
 - unitarios, 394
- Velocidad de una partícula, en un movimiento curvilíneo, 461
 - en un movimiento rectilíneo, 131-132
- Velocidad media en el movimiento rectilíneo, 130-131
- Volumen, 607, 615
 - de un sólido de revolución, 258
 - por integrales dobles, 607
 - por integrales triples, 619-620
- y, uso de, 30n
- y/o, uso de, 30n